

Compromis Performances / Complexité en Estimation Spectrale Paramétrique "Music 2D"

**Laurence Hafemeister*, Patrick Duvaut*,
René Garelo**, Bruno Emile****

e-mail : hafemeister@ensea.fr

*ETIS, ENSEA, 1 allée des chênes pourpres, 95014 Cergy Cedex
**GTI, département MSC, Telecom Bretagne, BP 832, 29295 Brest

RESUME

La méthode d'analyse spectrale paramétrique "Music 2D" présente un bon comportement en environnement bruité. Cependant ses performances se voient occultées par une grande complexité calculatoire de l'algorithme. Nous proposons une approche 1D directionnelle mettant en œuvre Music 1D successivement sur les lignes et les colonnes des images et pouvant présenter des performances asymptotiques équivalentes pour l'estimation des fréquences d'un ou plusieurs modes.

1. Introduction

Le problème de l'estimation spectrale paramétrique 2D se pose chaque fois que l'étendue du signal dans l'une ou l'autre dimension est insuffisante pour réaliser une bonne estimation par les méthodes dites classiques, de type périodogramme. Ce manque "d'espace" peut survenir par exemple lors d'analyses spatio-temporelle radar, chaque fois que le nombre de capteurs ne permet pas une résolution assez fine dans la caractérisation des angles et fréquences d'ondes planes arrivant sur un réseau linéaire [1]. Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas se présentant en traitement d'image où une analyse spatiale 2D est à effectuer localement. Ne pouvant toujours compter sur une stationnarité à long terme lors d'observation d'un champ d'ondes, l'étude doit être menée à partir d'une observation 2D unique de taille réduite (typiquement 16*16 pixels).

Dans le cas d'ondes planes pouvant être modélisées localement par une somme de sinusoides 2D, on choisit d'utiliser l'algorithme Music [2] étendu au cas 2D. Nous commençons par présenter, dans le deuxième paragraphe, une formulation et les particularités de la méthode "Music 2D" ainsi que ses performances obtenues à différents rapports signal à bruit. Cependant, le bon comportement de cet estimateur en environnement bruité (rapport signal à bruit < 0 dB) ne doit pas faire oublier la complexité accrue qui survient lors de la diagonalisation de la matrice de covariance ou de la projection sur l'espace bruit de "vecteurs fréquence 2D". On pense alors à lui substituer une méthode "1D directionnelle" moins coûteuse

ABSTRACT

The high resolution spectral estimation technique Music expanded to the 2D case shows good performances over noisy data. However the computational cost of the algorithm is a drawback. An alternative method named "1D directional" based on the 1D Music algorithm performed successively on the rows and the columns of the 2D data set, is proposed. This approach is shown to be a viable alternative in terms of asymptotic performances of the estimation of one or several frequencies.

que nous introduisons au troisième paragraphe. Des performances équivalentes entre ces deux approches, en terme de variance asymptotique, sont recherchées en fonction de la taille du signal, du nombre de moyennages décorrélés, et du rapport signal à bruit. Le cas de l'interférence de deux ondes et de l'ambiguïté résultante sur le choix des couples fréquence verticale - fréquence horizontale est alors étudié.

2. Estimation spectrale "Music 2D"

Le signal 2D utile S est représenté par P sinusoides complexes, d'amplitudes a_k non corrélées entre elles, de fréquences réduites ν_k, u_k , suivant les axes horizontal et vertical, et de phase aléatoire distribuée uniformément sur $[0; 2\pi]$. Le modèle choisi X comporte un bruit B additif, et s'écrit :

$$X = S + B \quad \text{de composante :} \\ x(n, m) = s(n, m) + b(n, m) \\ \text{avec } s(n, m) = \sum_{k=1}^P a_k e^{i2\pi(\nu_k n + u_k m) + \phi_k} \quad (1)$$

La fenêtre 2D d'observation est formée de n lignes et m colonnes avec $0 \leq n \leq N_2 - 1$ et $0 \leq m \leq N_1 - 1$.

Pour satisfaire les conditions d'utilisation de la méthode Music [1], ce modèle doit en outre respecter :

- nombre d'échantillons en ligne et colonne supérieurs au nombre de modes P ,
- bruit centré et totalement décorrélé spatialement,
- matrice de covariance $E[SS^+]$ non singulière et nombre d'observations supérieur au nombre d'échantillons.



Dans le cadre d'une observation unique, cette dernière condition est mise en défaut si le modèle comporte plus d'un mode. Pour y remédier, on utilise une fenêtre glissante d'observation sur des intervalles définis comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(k,l) & \dots & x(k,l+M_2-1) \\ \vdots & & \vdots \\ x(k+M_1-1,l) \dots x(k+M_1-1,l+M_2-1) \end{bmatrix} \text{ où } \begin{cases} k=0, \dots, N_1-M_1 \\ l=0, \dots, N_2-M_2 \end{cases}$$

Il en résulte que le nombre de moyennages introduits par fenêtre est de $(N_1 - M_1 + 1)(N_2 - M_2 + 1)$ et que M_1 et M_2 , nombre d'échantillons en ligne et colonne, doivent respecter :

$$2P < 2M_1 < N_1 + 1 \quad \text{et} \quad 2P < 2M_2 < N_2 + 1.$$

Remarquons alors que les échantillons du bruit ne sont pas tous indépendants d'une fenêtre à l'autre. Par conséquent, et contrairement à Music, les méthodes de maximum de vraisemblance ne peuvent être appliquées.

L'extension de l'algorithme Music 1D au 2D se fait naturellement [3]. Nous proposons ici une écriture qui permet de retrouver la formulation 1D en introduisant la notion de "vecteur fréquence 2D" et l'écriture des matrices de données et de bruit sous forme de vecteurs colonne \underline{x} et \underline{b} de taille $M_1 M_2$ composés successivement des lignes des matrices respectives.

Le vecteur fréquence \underline{u}_k (similairement \underline{v}_k) de taille M_1 ,

$$\underline{u}_k = \begin{bmatrix} e^{i2\pi u_k} & \dots & e^{i2\pi(M_1-1)u_k} \\ 1 & & \end{bmatrix}^T \quad (1 \leq k \leq P)$$

permet d'introduire le "vecteur fréquence 2D" qui se caractérise par M_2 blocs de la forme :

$$\underline{e}_k = e^{i2\pi v_k n} \underline{u}_k$$

et qui s'écrit par l'intermédiaire du produit de Kronecker [4] :

$$\underline{e}_k = \underline{v}_k \otimes \underline{u}_k \quad (\text{voir note 1})$$

Dans ce contexte, l'équation (1) peut se formuler comme suit :

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^P \underline{e}_k a_k + \underline{b} \quad \text{soit} \quad \underline{x} = \underline{E} \underline{a} + \underline{b}$$

\underline{A} étant la matrice bloc diagonale des amplitudes, la matrice de covariance du signal s'exprime alors similairement au cas 1D :

$$\Gamma_x = \Gamma_s + \Gamma_b \quad \text{avec} \quad \Gamma_s = \underline{E} \underline{A} \underline{A}^{\dagger} \quad \text{et} \quad \Gamma_b = \sigma_{\text{bruit}}^2 \underline{I}$$

Music fait partie des méthodes paramétriques spécifiques qui reposent sur un modèle des données et qui exploitent la structure propre de la matrice de covariance Γ_x [5]. La décomposition de cette matrice en éléments propres fait apparaître l'ensemble des vecteurs propres normés μ_j ($1 \leq j \leq M_1 M_2$) rangés dans l'ordre décroissant de leurs valeurs propres associées. Ceux-ci se partagent en vecteurs engendrant l'espace signal pour les P premiers et vecteurs engendrant l'espace signal orthogonal pour les $(M_1 M_2 - P)$ autres. A partir de l'un de ses espaces, une fonction discriminante est créée qui s'annule pour

les P couples de fréquences du signal. En pratique, on choisira les maxima de la fonction 2D suivante, évaluée en (v, u) balayant tout le plan fréquentiel :

$$\frac{1}{\underline{e}^{\dagger}(v,u) \underline{U} \underline{U}^{\dagger} \underline{e}(v,u)} \quad \text{avec} \quad \underline{U} = [\mu_{P+1} \dots \mu_{M_1 M_2}]$$

$$\underline{e}(v,u) = \underline{e}(v) \otimes \underline{e}(u), \quad \underline{e}(u) = \begin{bmatrix} 1 & e^{i2\pi u} & \dots & e^{i2\pi(M_1-1)u} \end{bmatrix}^T$$

Les performances asymptotiques de Music 2D pour l'estimation des fréquences sont évaluées sur 100 réalisations d'un bruit gaussien centré, et sont données sur la figure 1 en fonction du rapport signal à bruit et pour une taille d'image 16*16. On constate un bon comportement de cet estimateur en environnement bruité : variance de 10^{-5} et biais réduit à 0 dB. Ces performances comparées aux bornes de Cramér Rao (voir note 2), montrent une limite de validité aux abords de -6 dB. Les probabilités d'estimations (figure 2) permettent d'apprécier les taux d'erreurs encourus dans un contexte donné.

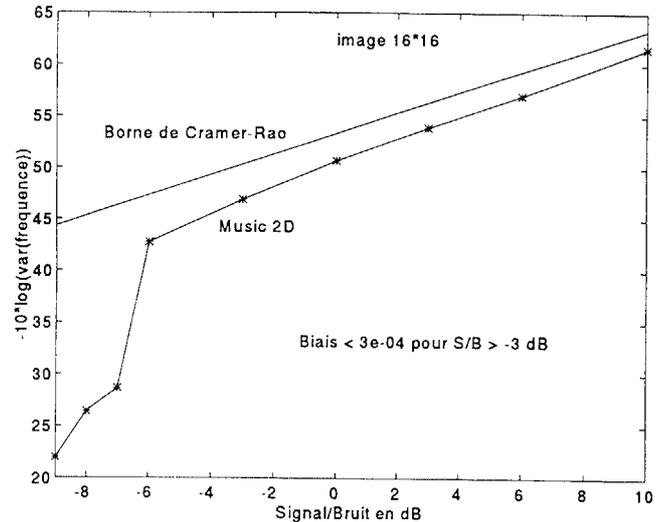


Figure 1 : Performances asymptotiques de Music 2D

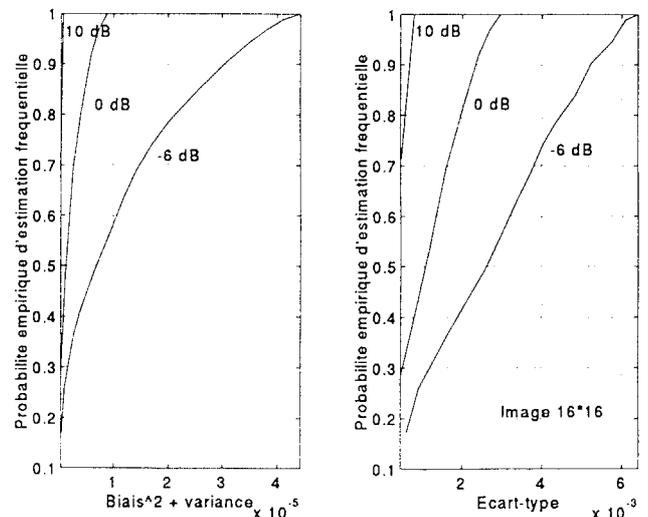


Figure 2 : Probabilités d'estimation, obtenues par Music 2D



Ces performances s'expliquent aisément compte tenu du nombre d'échantillons de l'observation. Cependant, la mise en œuvre reste complexe. Elle s'effectue à partir d'une estimation de la matrice de covariance Γ_x des données qui peut s'exprimer comme le produit $\underline{X}^T \underline{X}$ avec \underline{X} matrice de données de structure bloc suivante construite à partir de la fenêtre d'observation :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_{M_1-1} \cdots X_0 \\ \vdots \\ X_{N_1-2} \cdots X_{N_1-M_1-1} \end{bmatrix} \quad X_k = \begin{bmatrix} x(k, M_2-1) \cdots x(k, 0) \\ \vdots \\ x(k, N_2-2) \cdots x(k, N_2-M_2-1) \end{bmatrix}$$

La singularisation de cette matrice donnant accès aux vecteurs propres de Γ_x estimée, est la principale source de complexité. Au vue de ses dimensions $[4M^2, M^2]$, si $N_1=N_2=N$ et $M_1=M_2=M=N/3$, le nombre d'opérations s'élève à $12M^6$, d'après l'algorithme de Golub [6]. Quant à la minimisation non linéaire dans l'espace fréquentiel à deux dimensions, introduite par la fonction discriminante, elle se révèle elle aussi onéreuse en temps de calcul.

C'est pourquoi nous proposons de réduire la complexité de cette méthode en introduisant une nouvelle procédure directionnelle fondée sur Music 1D.

3. Approche 1D directionnelle

Une première approche consiste à réaliser l'équivalent d'une formation de voie utilisée en application radar. Dans le cas spatial 2D, il s'agit de faire tourner le plan image autour d'un axe orthogonal à ce plan, et d'estimer à chaque rotation, dans une direction horizontale par exemple, les fréquences des modes présents. Un mode est détecté soit lorsque sa direction de propagation coïncide avec l'axe d'étude, la fréquence de ce mode est alors maximale, soit lorsque la direction d'étude est orthogonale à la propagation, on observe alors un puits de fréquence. La figure 3 illustre cette approche pour un signal comportant deux modes.

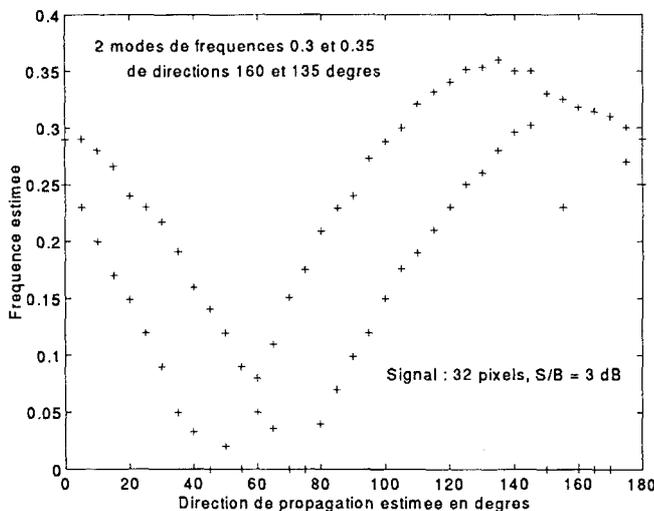


Figure 3 : Fréquences estimées par Music 1D pour différentes directions d'étude

Néanmoins, en raison du nombre limité d'observations et de la discrétisation du signal, toutes les orientations ne se révèlent pas équivalentes en terme de précision d'estimation des fréquences. Les performances sont instables et soumises en particulier aux approximations dues aux rotations.

Une alternative est proposée en tenant compte de la séparabilité de l'algorithme Music 2D en ligne-colonne. En effet si l'on s'intéresse par exemple à un vecteur ligne $x(n)$ l'équation (1) peut s'écrire comme suit :

$$x(n) = \sum_{k=1}^P a_k e^{i2\pi\nu_k n} u_k + b(n)$$

Il apparaît que la matrice de covariance associée ne s'exprime plus en fonction de la fréquence ν_k et de l'indice n de ligne :

$$E[x(n)x^T(n)] = \sum_{k,l=1}^P \sigma_k^2 u_k u_l^T + E[b(n)b^T(n)]$$

Il est donc possible d'estimer séparément les fréquences u_k et ν_k , par l'application de l'algorithme Music 1D, successivement suivant une ligne et une colonne. Il en résulte une réduction notable de complexité de l'ordre de M^3 pour la seule singularisation de la matrice de covariance.

Les principales limites de cette approche rejoignent celles de l'algorithme Music 1D, présentées dans de nombreux travaux [1], [7]. Elles sont liées au fait que la variance asymptotique de la méthode, limitée par la borne de Cramer Rao, est N fois plus grande que dans le cas 2D pour un rapport signal à bruit supérieur à 6 dB. Pour remédier à cette perte de performances, il est possible d'ajuster deux paramètres. On peut soit accroître la taille N de la fenêtre d'observation si la stationnarité du signal le permet, soit mettre à profit T différentes fenêtres d'observation 1D (lignes ou colonnes) pour effectuer un moyennage. [1] met en évidence pour les deux cas cités une amélioration de la variance asymptotique pour une complexité de l'ordre de M^3/T (pour $M = N/3$). La figure 4 illustre ce résultat pour différents rapports signal à bruit, révélant des performances asymptotiques comparables, calculées pour les trois scénarios suivants de complexité décroissante : Music 2D et fenêtre d'observation 16×16 , Music 1D et lignes et colonnes de taille 24 ou 16 pixels avec 8, respectivement 12 moyennages.

Dans le cas où plusieurs modes sont présents, l'approche directionnelle recherche deux fréquences suivant chaque direction orthogonale. Cependant, elle ne permet pas de coupler les fréquences deux à deux comme le réalise une approche 2D. On montre sur la figure 5 que cette ambiguïté peut être levée par l'étude fréquentielle dans une troisième direction, voire une quatrième. Les estimées des fréquences dans ces directions auxiliaires, projections des "vrais" couples de fréquence, ne



servent que lors de l'appariement et n'affectent pas l'estimation finale des fréquences. Les directions situées à ± 45 degrés se révèlent des directions privilégiées face au problème de discrétisation déjà cité.

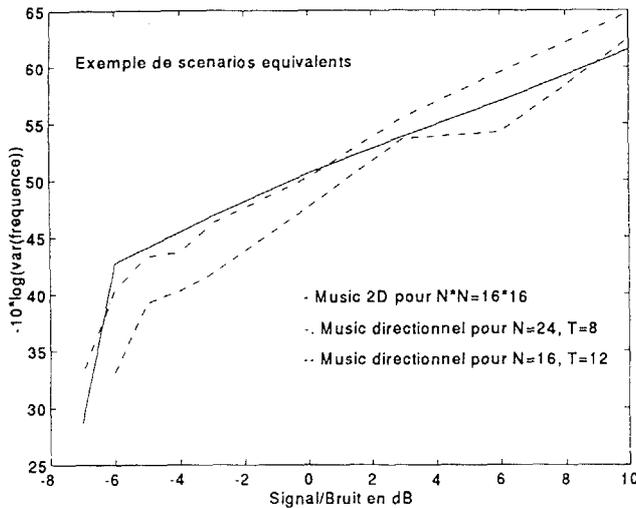


Figure 4 : Comparaison des performances asymptotiques pour Music 2D, Music directionnel

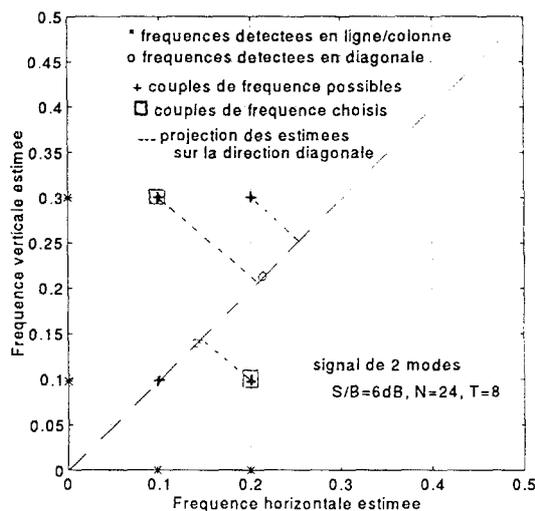


Figure 5 : Etude de deux modes par Music directionnel

Conclusion

La détermination de caractéristiques fréquentielles locales dans un contexte bidimensionnel est posé en terme de performances-complexité, non seulement afin de connaître les limites asymptotiques du cas typiquement 2D, mais aussi pour réduire les coûts calculatoires souvent prohibitifs lors d'analyse d'images. L'algorithme Music 1D, généralisable au cas 2D sert de support à cette étude. Les performances atteintes dans le cas 2D, typiquement variance de 10^{-5} à 0 dB et limite de validité à -6 dB, sont réalisables par l'approche directionnelle présentée avec un gain calculatoire non négligeable. L'ambiguïté sur les couples de fréquences à former dans le cas de superpositions de

modes est résolue grâce à l'augmentation du nombre de directions d'étude. En complément à cette étude, on cherchera à valider ces approches sur des images de scènes naturelles, où une étude locale est nécessaire.

Note 1 : Le produit de Kronecker de deux matrices A, B est une matrice bloc \underline{C} :

$$\underline{C} = A \otimes B \quad \text{où } [\underline{C}]_{i,j} = a_{i,j} B$$

désigne l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne bloc et $j^{\text{ème}}$ colonne bloc de \underline{C} .

Note 2 : La borne de Cramér Rao permet d'évaluer une borne théorique inférieure sur la variance des paramètres estimés. Dans le cas 2D, et pour l'estimation du paramètre fréquence, cette borne s'exprime en fonction de l'amplitude a de la sinusoïde complexe, de la variance σ^2 du bruit et de l'étendue du signal $N_x * N_y$, soit [8]:

$$CR\{f_{r_x}\} = \frac{6\sigma^2}{(2\pi)^2 a^2 N_x N_y (N_x^2 - 1)}$$

Références :

- [1] P. Stoica, A. Nehoral, "Music, maximum likelihood and Cramer Rao bound", IEEE trans. ASSP, vol. 37, n°5, May 1989.
- [2] R.O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation", IEEE trans. AP, vol. 34, n°3, 1986.
- [3] M. Wax, T.J. Shan, T. Kailath, "Spatio-temporal analysis by eigenstructure methods", IEEE trans. ASSP, vol 32, n°4, 1984.
- [4] A. Graham, "Kronecker products and matrix calculus with applications", J. Wiley and Sons, New-York, 1981.
- [5] P. Duvaut, "Traitement du signal. Concepts et applications", éd Hermès, Paris, 1991.
- [6] G.H. Golub, C.F. Van Loan "Matrix computations", chap. 6 et 8, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1984.
- [7] S.L. Marple "Digital spectral analysis with applications", Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [8] S. Kay, R. Nekovei, "An efficient two-dimensional frequency estimator", IEEE trans. ASSP, vol 38, n°10, 1990.