Estimation d'exponentielles complexes à partir d'une décomposition adaptative en sous-bandes

Mohsine Karrakchou et **Christian van den Branden Lambrecht**

Laboratoire de Traitement des Signaux
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
CH–1015 Lausanne Suisse
email: mohsine@ltssg3.epfl.ch

Résumé

Dans cet article, une nouvelle approche d'analyse spectrale haute résolution est présentée. Celle–ci effectue une décomposition en sous–bandes au moyen des paquets d'ondelettes en minimisant un nouveau critère adapté au problème d'estimation d'exponentielles complexes. La méthode de Tufts et Kumaresan est ensuite appliquée dans chacune des sous–bandes sélectionnées. Ce nouveau critère consiste en l'évaluation du nombre de modes présents dans chaque sous–bande au moyen du critère de description de longueur minimale (MDL). Des simulations effectuées sur des signaux synthétiques confirment le gain en performance de la méthode proposée.

Abstract

In this paper, a new approach of high resolution spectral estimation is presented. It is based on an adaptive subband decomposition performed thanks to wavelet packets and minimizing a new appropriate criterion designed for the problem of complex exponentials estimation. The Tufts and Kumaresan method is then applied on each of the selected subbands. The new criterion consists in the evaluation of the number of modes contained in each subband, using the minimal description length criterion. Simulations performed on synthetic signals confirmed the gain in performance of the proposed method.

1 Introduction

L'estimation spectrale, ou plus particulièrement l'estimation des positions de lignes spectrales localisées, est un problème inhérent à diverses applications réelles telles qu'en radar et sonar. Parmi les méthodes modernes de traitement de signal s'attaquant à ce problème, les approches offrant la plus haute résolution sont basées sur une modélisation autorégressive et sur la propriété de déficience de rang de la matrice d'autocorrélation du signal. Tufts et Kumaresan [1] ont développé une méthode robuste (TK) combinant la prédiction linéaire et l'approximation de faible rang de la matrice d'autocorrélation réalisée au moyen d'une décomposition en valeurs singulières de cette dernière. Cette approximation est ensuite utilisée pour estimer le vecteur de prédiction linéaire.

Dans un récent travail, Rao et Pearlman [2] ont démontré la superiorité de l'estimation spectrale après décomposition en M sous-bandes par rapport à celle effectuée directement sur le signal original. Toutefois leur démonstration suppose l'utilisation d'un banc de filtres d'analyse idéal. Un tel banc de filtres n'existant pas, un problème majeur apparaît dû au recouvrement spectral apparaissant entre bandes adjacentes. Celui-ci peut donc conduire à une atténuation de certains modes présents dans le signal, voire parfois à leur disparition. De ce fait, une décomposition dépendante du contenu spectral du signal est souhaitable. Une telle décomposition, créant un banc de filtre non–uniforme en fonction du signal, permettrait non seulement de ne pas atténuer ces modes mais également d'isoler autant que faire se peut chaque mode dans une bande fréquentielle propre, conduisant ainsi à une estimation de qualité nettement supérieure suite à la réduction de l'effet d'interférences entre les différents modes.

Les paquets d'ondelettes [3] sont un outil d'analyse temps–fréquence qui permet une telle décomposition adaptative du signal. Il est ainsi possible de choisir dans un arbre de décomposition fréquentielle binaire le sous–arbre de décomposition optimale, optimisant un critère donné [4].

Cet article est organisé comme suit: dans la section 2 une des méthodes d'estimation spectrale est détaillée, les avantages d'une estimation en sous–bandes sont exposés dans la section 3. La section 4 donne un bref résumé du concept de paquets d'ondelettes utilisé dans l'approche proposée, cette dernière est détaillée dans la section 5. Finalement, la section 6 présente un résultat expérimental illustrant l'éfficacité de la méthode proposée.

2 Méthode d'estimation de Tufts et Kumaresan

Le problème envisagé est l'estimation des p fréquences d'une combinaison linéaire de p exponentielles complexes noyées dans du bruit blanc à moyenne nulle:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{p} c_k \, e^{j\omega_k n} + w[n] \qquad (1)$$

où les valeurs c_k et ω_k représentent respectivement les amplitudes complexes et les pulsations à estimer. $w[n]$ est le bruit blanc additif.

Le signal non bruité $y_p[n] = \sum_{k=1}^{p} c_k \, e^{j\omega_k n}$peut être modélisé par un processus autorégressif suivant les équations progressives et rétrogrades:

$$\begin{aligned} y_p[n] &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} a_k \, y_p[n-k] \\ y_p^*[n] &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} a_k \, y_p^*[n+k] \end{aligned} \qquad (2)$$

Le vecteur de prédiction, constitué des paramètres a_k, permet de déduire les valeurs des fréquences cherchées par calcul des zéros du polynome $A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k \, z^{-k} = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - c_k \, e^{j\omega k} \, z^{-1}\right)$. Cette formulation donna naissance à un grand nombre de méthodes. Une méthode de référence largement citée fût introduite par Tufts et Kumaresan [1].

$\mathbf{A}\,\mathbf{a} = \mathbf{b}$, où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y[L-1] & y[L-2] & \cdots & y[0] \\ y[L] & y[L-1] & \cdots & y[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y[N-2] & y[N-3] & \cdots & y[N-L-1] \\ y^*[N-L] & y^*[N-L+1] & \cdots & y^*[N-1] \\ y^*[N-L-1] & y^*[N-L] & \cdots & y^*[N-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y^*[1] & y^*[2] & \cdots & y^*[L] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_L \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{b} = \Big[\; y[L] \;\; y[L+1] \;\; \cdots \;\; y[N-1] \;\; y^*[N-L-1] \;\; y^*[N-L-2] \;\; \cdots \;\; y^*[0] \; \Big]^T,$$

$L > p$ est l'ordre de prédiction choisi.

(3)

Cette méthode est basée sur la résolution du sytème d'équations linéaires 3 par une approximation de faible rang de la matrice $\mathbf{A}$ au moyen d'une décomposition en valeurs singulières suivie d'une résolution par moindres carrés. La qualité de l'estimation est liée à la robustesse des valeurs singulières vis–à–vis des perturbations apportées aux éléments de la matrice. Ceci permet également d'estimer très précisément le nombre de modes présents dans le signal sans connaissance à priori de ce dernier.

3 Estimation spectrale en sous–bandes

Les techniques de traitement de signaux en sous–bandes ont bénéficié d'un grand intérêt lors des dernières années, plus particulièrement dans le domaine du codage. Ce n'est que très récemment que R. P. Rao et W. Pearlmann [2] ont envisagé l'utilisation de telles techniques en estimation spectrale pour une application de DPCM (differential pulse coded modulation).

Ils ont ainsi montré théoriquement et sur la base de notions de théorie de l'information, supposant l'existence d'un banc de filtres idéal, que l'estimation spectrale en sous–bandes présente plusieurs avantages, à savoir:

- L'erreur de prédiction minimale obtenue sur le signal original dépasse la somme des erreurs de prédiction minimales sur les sous–bandes.
- Le spectre de l'erreur de prédiction en sous–bandes est plus plat que celui de l'erreur de prédiction sur le signal original.
- L'entropie composite des signaux codés en sous–bandes est plus proche de l'entropie de la source que l'entropie du codage du signal original, ceci pour le même ordre de prédiction global.

La motivation d'utiliser des techniques de décomposition en sous–bandes pour le problème décrit auparavant consiste non seulement en les avantages cités ci–dessus mais encore en l'importance de l'isolement des différents modes présents dans le signal. En effet, il est bien connu que moindre est le nombre de modes présent, meilleure est la limite de Cramer–Rao. Néanmoins le caractère non idéal de tout banc de filtres réels introduira des zones de recouvrement spectral autour des fréquences de coupure des filtres d'analyse. Ceci peut atténuer certains modes et compromettre ainsi gravement la qualité de l'estimation.

4 Décomposition adaptative en sous–bandes

Les paquets d'ondelettes sont une généralisation directe du concept de la décomposition en octaves selon une base d'ondelettes orthonormale. La différence se situe dans le sens où, au lieu d'avoir une décomposition fréquentielle rigide et indépendante du signal, les paquets d'ondelettes offrent la souplesse d'adaptation de la base par rapport au contenu spectral du signal. Il est donc possible de créer, à partir de ce type d'expansions, une décomposition en sous–bandes non uniformes optimisant un critère donné.

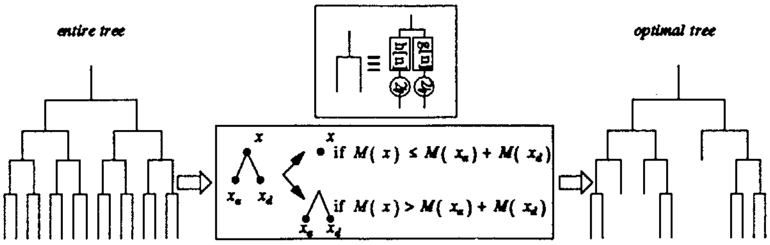

Figure 1: Illustration de la méthode de la meilleure base

Vu sous l'angle de bancs de filtres et non d'outil d'analyse temps–fréquence, l'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes se résume comme suit: soient un signal discret à analyser $x[n]$ de longueur N et deux filtres d'analyse de réponses impulsionnelles $h[n]$ et $g[n]$, satisfaisant aux conditions exposées dans [5], un arbre binaire de profondeur $\log_2(N)$ est généré par filtrages et sous–échantillonages en cascade, comme illustré dans la figure 1. La fusion de certaines sous–branches de cet arbre conserve l'orthogonalité de l'expansion offrant ainsi la possibilité d'obtenir différents partionnements fréquentiels.

Parmi cette collection d'expansions, celle optimisant un critère donné est choisie. La recherche de la meilleure décomposition est faite par une procédure de fusion/scission appliquée localement sur chaque noeud de l'arbre (voir figure 1) partant des feuilles et allant vers la racine. Dans cette procédure, le critère est évalué pour un noeud ainsi que pour ses deux descendants. Les noeuds garantissant l'optimalité sont conservés.

5 Algorithme et critère

La sélection du jeu de sous–bandes optimal est réalisée en maximisant le nombre de modes sur la décomposition. Ceci permet de bloquer la décomposition de certaines bandes dès l'instant où un mode serait perdu par recouvrement spectral. Il a été montré que deux critères d'information couramment utilisés, le critère d'Akaike (AIC) et le critère de description de longueur minimale (MDL), possèdent une expression analytique dans le cas d'exponentielles complexes. L'expression de ce dernier est donnée par [6]:

$$\begin{aligned}\mathrm{MDL}(k) = \; & -2\log\left(\frac{\left(\prod_{i=k+1}^{L}\lambda_i\right)^N}{\left(\frac{1}{L-k}\sum_{i=k+1}^{L}\lambda_i\right)^{(L-k)N}}\right) \\ & +\tfrac{1}{2}k(2L-k)\log(N),\end{aligned} \tag{4}$$

où les λ_i représentent les L valeurs propres de la matrice d'autocorrélation, N étant le nombre d'échantillons. Le nombre de modes est alors le nombre k qui minimise l'un ou l'autre de ces critères. Le critère est donc utilisé de la manière suivante: Au cours du processus de décomposition, le critère est à chaque fois évalué sur un noeud et ses descendants.

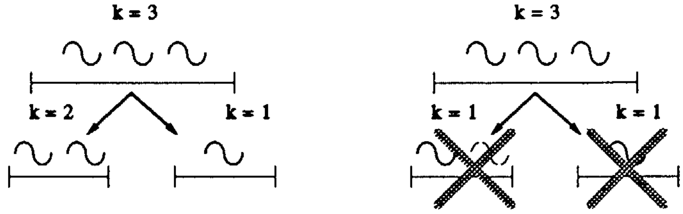

Figure 2: Illustration du comptage du nombre de modes sur l'arbre. A gauche, le nombre de mode est conservé, la décomposition est acceptée. A droite, un mode est perdu, la décomposition sera refusée

Si le nombre de modes reste constant, la décomposition est acceptée (figure 2, partie gauche). Si, par contre, suite au recouvrement spectral, un mode est fortement atténué, il ne sera plus détecté par le critère d'information (figure 2, partie droite). De ce fait, la procédure de maximisation du critère refusera la décomposition. Une fois la décomposition choisie, la méthode TK est appliquée dans chacune des sous-bandes comme elle l'aurait été sur le signal original. Les valeurs des fréquences estimées dans chacune des sous–bandes sont ensuites converties à leurs valeurs dans la bande de base. Les ordres de prédiction en sous–bandes sont choisis de manière à ce que leur somme soit égale à l'ordre optimal déterminé sur le signal original [2]. Il faut également noter que l'ordre de prédiction en chacune des sous–bandes est proportionnel à la largeur de celles-ci. Il est à préciser que l'utilisation de la méthode TK est un choix particulier qui n'exclut pas l'emploi de tout autre méthode d'estimation d'exponentielles complexes. Ce partitionnement adaptatif en fréquence permet donc de bénéficier des avantages de l'estimation spectrale en sous–bandes, à savoir un gain en résolution fréquentielle introduit par décimation ainsi que la réduction de l'effet d'interférence inter–modes, sans pour autant subir de pertes de modes.

6 Résultats expérimentaux

La simulation présentée dans cette section consiste en l'estimation des fréquences d'un signal composé de deux exponentielles complexes noyées dans du bruit blanc à moyenne nulle. Les fréquences normalisées sont 0.11 et 0.15. L'expérience est réalisée sur la base de simulations de Monte–Carlo à différents rapports signal sur bruit (RSB). Ainsi 250 tirages successifs ont été réalisés pour chaque RSB. A chaque tirage, trois estimations sont effectuées: la première est faite sur le signal original, la seconde au départ d'une décomposition adaptative et la troisième depuis une décomposition rigide. La décomposition rigide correspond à un banc de filtres uniforme à huit bandes généré par un arbre de décomposition binaire uniforme sans aucune fusion de sous–branches. Les filtres d'analyse utilisés pour les deux décompositions sont les filtres de Daubechies D_{10} [5].

Les mesures de performances choisies sont la variance de l'estimation et le taux d'échec de détection, tout deux en fonction du RSB. Les graphes de variance représentent le logarithme de l'inverse de la variance. Ainsi, plus l'ordonnée est grande, plus faible est la variance. Le taux d'échec de détection représente le pourcentage de cas où aucune fréquence estimée ne se trouvait dans un voisinage raisonnable de la fréquence exacte.

Dans la figure 3.a, sont représentées les courbes de variance de l'estimation de la fréquence la plus basse. La figure 3.b représente le taux d'échec de détection de cette même fréquence. Dans ces figures, les courbes en trait plein correspondent aux estimations réalisées sur le signal original. Les courbes en trait pointillé au banc de filtres adaptatif et les courbes en trait mixte au banc de filtres rigide.

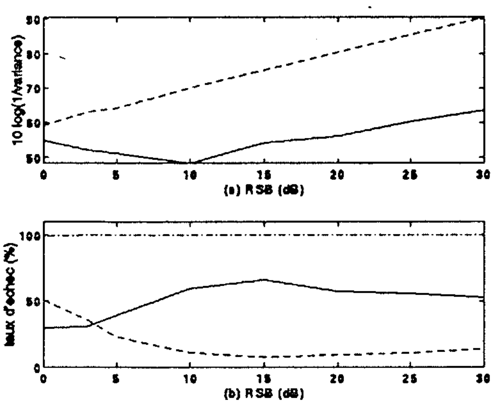

Figure 3: Performance de l'estimation de la fréquence basse du signal de test. En haut sont représentées les courbes de variance, bas les courbes de taux d'échec.

Il apparaît donc que la méthode proposée permet d'obtenir un taux d'échec de détection moindre ainsi qu'un gain sur la précision de l'estimation des fréquences de l'exponentielle complexe. Dans le cas d'un banc rigide, la fréquence à estimer étant très proche de la zone de transition du banc de filtre, le taux d'échec a été de 100%. Ceci illustre bien l'importance de l'adaptabilité de la décomposition. Le critère proposé a en effet bloqué la décomposition dès le moment où la nouvelle zone de transition devenait trop proche du mode en question.

7 Conclusion

Dans cet article, un nouveau schéma combinant les paquets d'ondelettes et les méthodes haute résolution a été proposé pour l'estimation de lignes spectrales localisées. Les avantages d'une estimation en sous–bandes sont exposés. L'utilisation des paquets d'ondelettes permet de créer des décompositions en sous-bandes adaptées au contenu spectral du signal. Un critère approprié à ce problème est introduit. Des simulations de Monte–Carlo effectuées sur des signaux synthétiques ont confirmé le gain en performances apporté par une telle approche.

Bibliographie

[1] D. W. Tufts and R. Kumaresan. Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood. *Proceedings of the IEEE*, 70(9), September 1982.

[2] S. Rao and W. A. Pearlman. On the Superiority of Coding and Estimation from Subbands. *Conference on Information Sciences and Systems*, March 1992.

[3] M.V. Wickerhauser. INRIA Lectures on Wavelet Packet Algorithms. *INRIA Lectures on Wavelet Packet Algorithms*, March 1991.

[4] C. van den Branden Lambrecht and M. Karrakchou. Subband Adaptive Filtering: The Mutual Wavelet Packets Approach. *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, April 1992.

[5] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI, 1988.

[6] M. Wax and T. Kailath. Detection of Signals by Information Theoretic Criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(2), April 1985.