



**THEORIE 2-D DE LA DETECTION
DE SAUTS DE MOYENNE
PAR DECOMPOSITION EN ONDELETTES**

A.DENJEAN, F.CASTANIE

*LEN7-GAPSE, ENSEEIHT
2, Rue Camichel
31071 TOULOUSE CEDEX*

**RÉSUMÉ
RESUME**

**ABSTRACT
ABSTRACT**

La détection de non-stationnarités est un problème classique du traitement du signal et aux multiples applications. Nous abordons ici au moyen de la transformée en ondelettes continues le cas particulièrement important du saut de moyenne noyé dans un processus aléatoire stationnaire. Après avoir brièvement rappelé quelques résultats statistiques et présenté les diverses stratégies possibles pour la détection [1], une étude bi-dimensionnelle permettant d'utiliser la redondance d'information dans le plan (temps, échelle) est menée, comparativement aux méthodes classiques de segmentation.

Non-stationnarities detection is a classical problem in signal processing with various applications. By means of the Continuous Wavelet Transform (CWT), we consider here the particularly important case of a mean value jump imbedded in a stationary random process. After recalling briefly some statistical results, and after the presentation of various possible detection strategies [1], a bi-dimensional study is done which takes advantage of information redundancy in the (time, scale) plane, and is compared to classical segmentation methods.

1. INTRODUCTION

Le champ d'application des méthodes de détection de changements abrupts dans un signal est très vaste; en effet, ces méthodes sont employées dans des domaines aussi divers que la détection de pannes, la maintenance ou la sécurité de systèmes industriels, que le contrôle de signaux bio-médicaux ou spatiaux [2]. Nous portons une attention particulière à la détection du plus simple de ces changements, le saut de moyenne dans un processus aléatoire stationnaire, car de nombreux problèmes peuvent être rattachés à ce cas type.

$x(t)$ sont souvent partiellement connues, et la classe des sauts inclus dans un processus d'innovation offre la propriété avantageuse de quasi-blanchéur.

L'outil d'analyse est la décomposition en ondelettes continues (CWT); en effet, la transformée discrète à partir de la famille d'ondelettes orthogonales de Daubechies ne permet pas d'utiliser la signature 2-D de la discontinuité à des fins de détection car elle n'est pas invariante par translation [4].

1.1 Modèle de signal

$$y(t) = \Delta m \cdot U(t - t_0) + x(t) = s(t) + x(t) \quad (1)$$

$U(t)$: échelon

Δm : amplitude du saut

$x(t)$: processus aléatoire stationnaire à moyenne nulle de fonction de corrélation $R_x(\tau)$

et de Densité Spectrale de Puissance (DSP) $S_x(f)$

t_0 : instant du saut inconnu

$x(t)$ correspond généralement au processus d'innovation d'un filtre de Kalman, selon le principe du Rapport de Vraisemblance de Willky [3]; les propriétés statistiques de

1.2 Définition générale de la CWT [4] de Eq(1)

$$C_y(\alpha, \tau) = \alpha^{-1/2} \int_R y(t) \cdot \Psi^* \left(\frac{t - \tau}{\alpha} \right) dt$$

$\Psi(t)$: ondelette normée dans L^2

de transformée de Fourier $\phi(f)$

1.3 Expression de la signature

Par linéarité de la décomposition en ondelettes :

$$C_y(\alpha, \tau) = C_s(\alpha, \tau) + C_x(\alpha, \tau) \quad (2)$$

$C_x(\alpha, \tau)$ est le bruit transformé et $C_s(\alpha, \tau)$ la signature déterministe de la discontinuité dans le plan (temps, échelle), de forme conique.

$$C_s(\alpha, \tau) = -\Delta m \cdot \alpha^{1/2} I_{\Psi}^* \left(\frac{t_0 - \tau}{\alpha} \right) \quad (3)$$



avec : $I_\Psi(t) = \int_{-\infty}^t \Psi(u) du$

Notre problème de détection revient à reconnaître cette signature incluse dans le bruit transformé, donc à fournir une description statistique de $C_x(a, \tau)$.

2. RESULTATS STATISTIQUES

2.1 Expression des moments

Les propriétés suivantes décrivent le comportement au premier et second ordre de la CWT du bruit :

$$E\{C_x(a, \tau)\} = 0 \quad \forall a, \tau \quad (4)$$

$$E\{C_x(a_1, \tau_1)C_x^*(a_2, \tau_2)\} = \mu(a_1, a_2, \tau_1 - \tau_2) \quad (5)$$

$\mu(a_1, a_2, t)$ a pour transformée de Fourier, en accord avec la formule des interférences de Blanc-Lapierre :

$$M(a_1, a_2, f) = \sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot S_x(f) \phi^*(a_1 f) \phi(a_2 f) \quad (6)$$

De Eq(5) se déduit la variance :

$$\begin{aligned} Var\{C_x(a, \tau)\} &= \int_{\mathcal{R}} R_x(u) R_\Psi(u/a) du \quad (7) \\ &\sim S_x(0) \quad \text{quand } a \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où : $R_\Psi(u) = \int_{\mathcal{R}} \Psi(t)^* \Psi(t+u) dt$ est la fonction de corrélation de l'ondelette.

Il est intéressant de remarquer que cette variance est asymptotiquement constante dans le plan (a, τ) pour de grandes valeurs de a , alors que l'amplitude de la signature augmente comme $a^{1/2}$.

2.2 Expression du rapport signal à bruit

Le gain apporté par une telle décomposition par rapport à l'espace de départ apparaît nettement dans la formulation du nouveau rapport signal à bruit (SNR) :

$$\begin{aligned} \gamma(a, \tau) &= \frac{|C_s(a, \tau)|^2}{Var\{C_x(a, \tau)\}} \\ \gamma(a) &\sim \Delta m^2 \cdot a \cdot |I_\Psi(0)|^2 / S_x(0) \quad \forall \tau \quad (8) \end{aligned}$$

En effet, les performances de détection vont augmenter avec l'échelle, jusqu'à atteindre la borne imposée par la longueur de la fenêtre d'analyse.

2.3 Choix de la base d'ondelettes

Le choix de l'ondelette optimale selon le critère de maximisation du rapport signal à bruit fait apparaître la classe de solutions des fonctions de module constant sur l'ensemble de l'intervalle (Borne de Schwartz atteinte pour la colinéarité de $\text{set } \psi$).

D'autre part, certaines propriétés de symétrie sont désirables pour l'ondelette, de façon à obtenir un estimateur de position t_0 non biaisé : par exemple, les ondelettes de Haar ou Morlet sont telles que $|I_\Psi(t)|$ est maximum pour $t = 0$.

L'ondelette de Haar remplit ces deux conditions dans le cas d'un saut abrupt de moyenne, et nous lui prêterons une attention particulière dans nos simulations. Par contre, des sauts en erf, arctan, polynômes nécessitent le calcul de la nouvelle classe optimale d'ondelettes.

3. PERFORMANCES DES DETECTEURS

3.1 STRATEGIES DE DETECTION

Présentons tout d'abord les diverses approches envisagées en matière de détecteurs :

- L'approche la plus simple consiste à seuiller une coupe en échelle de la CWT selon Eq(2) et (3). L'échelle est choisie assez grande de manière à garder un SNR élevé sans toutefois dépasser la distance qui sépare la discontinuité des bornes de la fenêtre d'observation (SNR maximum).

Le seuillage peut également se faire à partir d'une somme de ces coupes, car le détecteur bénéficie alors d'information de l'ensemble du plan (temps, échelle). Il est en particulier possible d'obtenir un écart entre les échelles qui respecte l'indépendance des $C_x(a, \tau)$. Pour cela, on s'intéresse au rayon de corrélation r que donne Eq(5) et (6), car les filtres d'ondelettes pris pour des échelles séparées de plus de r sont pratiquement orthogonaux.

D'après Eq(8), la cône de la discontinuité va pour de telles échelles émerger du bruit transformé.

- L'approche optimale du filtrage adapté utilise la connaissance de la signature de la discontinuité $-\sqrt{a} I_\Psi^*(-\tau/a)$ ainsi que la DSP du bruit transformé $a S_x(f) \cdot |\phi(\alpha f)|^2$ pour une coupe donnée. Notons que l'avantage du bruit blanc est perdu lors du filtrage introduit par la CWT, ce qui complique quelque peu les calculs. D'autre part, des difficultés s'ajoutent dues à l'hypothèse où $S_x(f)$ est inconnue ou à l'irréalisme du filtre adapté.

Une méthode sous-optimale est alors envisagée, basée sur la corrélation de la CWT du signal avec le modèle composé de la signature 1- ou 2-D respectivement, et fonction uniquement du temps :

$$\begin{aligned} \Gamma_y(\tau) &= \int_{\mathcal{R}} C_y(a, t) \cdot M(a, \tau - t) dt \quad (\text{échelle fixée}) \\ \text{ou : } \Gamma_y(\tau) &= \int_{\mathcal{R}^2} C_y(a, t) \cdot M(a, \tau - t) da dt \quad (9) \end{aligned}$$

avec : $M = C_s$

3.2 ETUDE DES PERFORMANCES

3.2.1 Variance des détecteurs

L'étude du détecteur formé d'une coupe de la CWT à $\alpha = \alpha_k$ passe par la théorie statistique de la variable aléatoire

$C_{x_j}(\alpha_k)$ pour l'indice temporel j allant de 1 à m [Eq(2)], de moyenne nulle et variance $\sigma_{\alpha_k}^2$ [Eq(4) et (7)].

Cette variable aléatoire est gaussienne pour x gaussien d'après la propriété suivante : une intégrale de la forme $I(\tau) = \int f(t)K(t, \tau)dt$ où $f(t)$ est gaussien et $K(t, \tau)$ un noyau continu à deux variables, conserve le caractère gaussien. Il en est de même pour les autres détecteurs car ils mettent en oeuvre des opérations linéaires.

Par contre, la relation d'indépendance temporelle de la séquence de x initiale n'est pas maintenue pour les $C_x(\alpha_k)$, et l'étude des performances doit tenir compte de la matrice de covariance entre les différents échantillons.

Pour la somme des coupes :

$$\sum_k \hat{C}_{y_j}(\alpha_k) = \sum_k \hat{C}_{s_j}(\alpha_k) + \sum_k \hat{C}_{x_j}(\alpha_k)$$

avec $\sum_k \hat{C}_{x_j}(\alpha_k)$ centré et de variance :

$$var\left\{\sum_k \hat{C}_{x_j}(\alpha_k)\right\} = \sum_k \sigma_{\alpha_k}^2 + \sum_{k,l,k \neq l} \mu(\alpha_k, \alpha_l, 0)$$

Le cas particulier d'un écart entre les échelles supérieur au rayon de corrélation r va entraîner l'indépendance et la variance ci-dessus va se limiter au premier terme.

Le corrélateur 2-D $\Gamma_y(\tau) = \Gamma_s(\tau) + \Gamma_x(\tau)$ est également centré et de variance [Eq(9)] :

$$var\{\Gamma_x(\tau)\} = \iint_{s_2} \mu(\alpha, \alpha', t-t') \cdot M(\alpha, \tau-t) \cdot M'(\alpha', \tau-t') da dt da' dt'$$

3.2.2 Probabilités de fausse alarme et non détection

Les caractéristiques des détecteurs en terme de probabilités de fausse alarme (pfa) et non détection (pnd) découlent de l'application du test de Neyman-Pearson pour le cas normal à n dimensions.

Précisons tout d'abord quelques notations, pour le cas simple du détecteur constitué d'une coupe de la CWT :

les échelles sont $(\alpha_i)_{i=1...n}$, et les instants $(t_j)_{j=1...m}$.

C_y et M sont respectivement les échantillons du plan de la CWT et de la signature du saut.

$$C_y(\alpha) = C_{y_j}(\alpha)_{j=1...m}$$

$$M(\alpha) = -\Delta m \alpha^{1/2} \cdot I_{\psi_j}(\alpha)_{j=1...m}$$

$$C_y = C_y(\alpha_i)_{i=1...n} \quad (10)$$

$$M = M(\alpha_i)_{i=1...n} \quad (11)$$

$C_x(\alpha)$ suit une loi $N(0, \mu(\alpha))$

La matrice de covariance $\mu(\alpha)$ définie par :

$$\mu_{ij}(\alpha) = \left\{ E\left[C_{y_i}(\alpha) \cdot C_{y_j}^*(\alpha) \right] \right\}_{i,j=1...m}$$

est à symétrie hermitienne, ou symétrique réelle dans le cas de variables réelles, notamment pour l'ondelette de Haar.

On définit également la matrice $\mu(\alpha_i, \alpha_j)_{i,j=1...n}$ par :

$$\mu_{kl}(\alpha_i, \alpha_j) = \left\{ E\left[C_{y_k}(\alpha_i) \cdot C_{y_l}^*(\alpha_j) \right] \right\}_{k,l=1...m} \quad (12)$$

C_y suit alors une loi $N(0, \mu)$ avec $\mu_{ij} = \mu(\alpha_i, \alpha_j)_{i,j=1...n}$.

μ est aussi à symétrie hermitienne (ou symétrique réelle).

Des variables complexes amènent les modifications :

$$\mu(\alpha) = \mu_r(\alpha) + i\mu_i(\alpha)$$

et de même pour $C_y(\alpha)$ et $M(\alpha)$.

$\mu(\alpha)$ est une matrice carrée $m \times m$ qui satisfait les hypothèses d'une distribution normale complexe multivariée, à savoir

$$\mu(\alpha) = \mu^H(\alpha) \text{ et } \forall z \in C^m \quad z^H \mu z \geq 0.$$

Par conséquent, $\bar{C}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} C_{y_r}(\alpha) \\ C_{y_i}(\alpha) \end{pmatrix}$ suit une loi

$N(\bar{M}(\alpha), \frac{1}{2}\bar{\mu}(\alpha))$ où :

$$\bar{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{M}_r(\alpha) \\ \bar{M}_i(\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\mu}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu_r(\alpha) & -\mu_i(\alpha) \\ \mu_i(\alpha) & \mu_r(\alpha) \end{pmatrix}$$

Des propriétés énoncées ci-dessus, il s'ensuit que $\bar{\mu}(\alpha)$ est symétrique réelle, ce qui nous ramène au cas de variables réelles, en nombre double.

Soient enfin $L(\bar{C}_y/\bar{C}_s)$ et $L(\bar{C}_y/0)$ les densités de probabilité de \bar{C}_y respectivement en présence et absence de signal [Eq(10), (11) et (12)] :

$$L(\bar{C}_y/\bar{C}_s) = \frac{\sqrt{\det \bar{\mu}^{-1}}}{2\pi^{m \cdot n}} e^{-1/2(\bar{C}_y - \bar{M})\bar{\mu}^{-1}(\bar{C}_y - \bar{M})}$$

Une relation similaire vaut pour $L(\bar{C}_y/0)$ en supprimant \bar{M} .

Le test s'écrit :

$$\frac{L(\bar{C}_y/\bar{C}_s)}{L(\bar{C}_y/0)} > k(\text{pfa})$$

soit :

$$\sqrt{M} \bar{\mu}^{-1} \bar{C}_y > d = \ln k + \frac{1}{2} \sqrt{M} \bar{\mu}^{-1} \bar{M}$$

A pfa fixée, la difficulté de choix du seuil d augmente en raison de la multiplicité des variables :

$$d = f((\alpha_i)_{i=1...n}, (t_j)_{j=1...m}, I_{\psi}, \Delta m)$$

La variable aléatoire ainsi obtenue suit une loi normale à une dimension avec $\sigma^2 = \sqrt{M} \bar{\mu}^{-1} \bar{M}$, d'où dérivent les caractéristiques classiques :

$$\text{pfa} = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf} \left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$$

$$\text{pnd} = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{d - \sigma^2}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$$



4. RESULTATS DE SIMULATION

4.1 Détection par CWT

Nous donnons ici l'exemple de la CWT sur 2048 échantillons d'un saut de moyenne à la date 800 et de SNR $\Delta m / \sigma_x^2$ égal à -10 dB, ceci pour l'ondelette de Haar de support 80. La figure 1 décrit l'évolution de l'abscisse du maximum en τ (τ_m) de coupes de la CWT à échelle donnée, d'une part pour le module de la transformée ($|CWT|$), d'autre part pour le filtrage adapté à chaque coupe ($|FA2D|$).

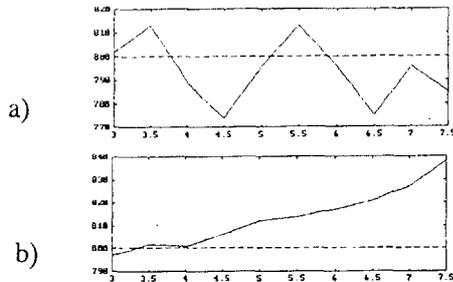


Fig.1 : abscisse du maximum en τ (échelles 3 à 7.5, pas 0.5)

- a) $|CWT|$
- b) $|FA2D|$

Les résultats des détecteurs 2-D de la somme des coupes en échelle ainsi que de la corrélation bi-dimensionnelle sont présentés fig.2. Notons qu'il est plus difficile de remplir la condition d'un écart entre échelles supérieur au rayon de corrélation donné par la covariance (fig.3) pour l'ondelette de Haar que pour celle de Morlet. Cependant, la redondance d'information dont bénéficient ces détecteurs semble tout à fait profitable.

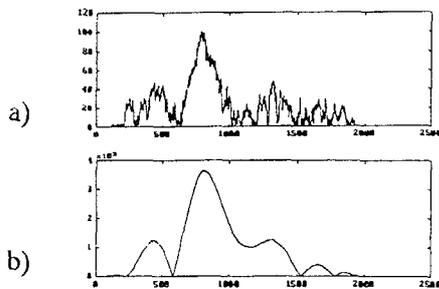


Fig.2 : détecteurs 2-D (abscisse du maximum en τ)

- a) Somme des coupes en échelle de $|CWT|$ ($\tau=796$)
- b) Corrélation 2-D ($\tau=815$)

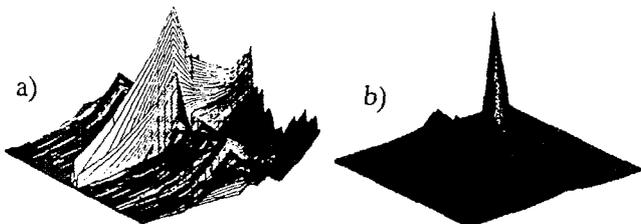


Fig.3 : module de la covariance (échelles 2^{-5} à 2^4)

- a) Haar
- b) Morlet

4.2 Comparaison avec les méthodes classiques

La figure 4 est obtenue en appliquant au même signal le filtrage adapté i.e. une simple intégration et l'algorithme des sommes cumulées [2] :

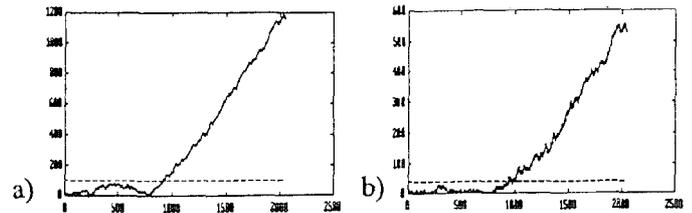


Fig.4 : méthodes classiques de segmentation

La détection a lieu à l'instant τ

- a) Intégrateur (seuil=100, $\tau=921$)
- b) Sommes cumulées (seuil=40, $\tau=922$)

5. CONCLUSION

Cet article développe les propriétés de la transformée en ondelettes continues pour le problème particulier de la détection d'un changement abrupt de moyenne d'un processus stationnaire. Parmi les résultats figurent la recherche de l'ondelette optimale qui maximise le SNR, la description de diverses stratégies de détection, et, moyennant le calcul de la covariance dans le plan (temps, échelle), les expressions des probabilités de fausse alarme et non détection.

Diverses simulations ont mis en évidence des performances comparables pour ces détecteurs, avec une préférence pour les détecteurs 2-D, et ont montré que la CWT est un outil puissant, même pour des SNR très défavorables.

En perspective, une comparaison précise avec les algorithmes classiques prendra en compte le critère du retard à la détection. Egalement, il sera intéressant d'appliquer les méthodes des ondelettes à des sauts non abrupts, et de s'attacher à évaluer leur robustesse.

REFERENCES

- [1] F.CASTANIE, A.DENJEAN : "Mean value jumps detection using wavelet decomposition". Proc. de IEEE-SP Time-Frequency and Time-Scale Analysis, 4-6 Oct. 1992, Victoria, BC, Canada, pp 181-184.
- [2] M.BASSEVILLE, I.NIKIFOROV : "Detection of abrupt changes". Prentice Hall, 1993.
- [3] A.S.WILLSKY, H.L.JONES : "A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in linear Systems". IEEE Trans. on A.C., Vol AC-21 n°1, pp 108-112, Fev. 1976.
- [4] J.M.COMBES, A.GROSSMANN, P.TCHAMITCHIAN : "Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space". Springer-Verlag, 1989.