DÉTECTION DÉCENTRALISÉE ASYMPTOTIQUE: ÉTUDE PAR LES GRANDES DÉVIATIONS

Frédéric BALDIT†, *Jean* DESHAYES‡

IRISA†/IRMAR‡Université de Rennes I

Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex - France

RÉSUMÉ

On étudie le comportement asymptotique des détecteurs décentralisés composés de deux capteurs en parallèle et d'un fusionneur sans observations. Pour cela on calcule les vitesses de décroissance des erreurs de type I et II à l'aide de formules de Chernoff. Pour le critère de Neyman-Pearson, les formules des vitesses de décroissance des erreurs sont établies, à la fois pour le test utilisant la règle de fusion du OU et du ET logique. On montre de cette façon que la règle OU et la règle ET sont respectivement préférables aux petites et aux grandes erreurs de type I. Un modèle Gaussien est présenté, qui confirme ces résultats.

ABSTRACT

An asymptotic study of decentralized detectors, with two sensors in parallel and a boolean fusion center is presented. For this purpose, we derive the rate of decrease of type I and type II errors by use of Chernoff formulae. With Neyman-Pearson criterion, simple expressions for the parameters of exponential decrease are given both for the test using the logical OR fusion rule and the AND rule. This approach yields an asymptotic justification of the known result that the OR and AND detector are respectively better for low or high type I errors. A practical example for Gaussian observations is presented, which confirms those results.

1. INTRODUCTION

Le domaine de la détection décentralisée, [TS81, Tsi88], qui a donné lieu a une importante littérature depuis ces dix dernières années, se propose d'étendre les résultats classiques de détection en abandonnant le postulat de la centralisation des traitements. Dans ce cadre, et en dehors de la recherche théorique et pratique des tests décentralisés optimaux, un travail important devrait être consacré au développement d'outils mesurant les performances des détecteurs décentralisés par rapport aux détecteurs centralisés. Une approche possible à ce problème, qui est utilisée ici, est de justifier l'usage de certains tests par leurs propriétés asymptotiques, au moyen des outils de la théorie des grandes déviations. Une modeste contribution allant dans ce sens est proposée, où on retrouve simplement des propriétés qui sont connues par ailleurs sur les tests décentralisés à deux capteurs.

2. MODÈLISATION STATISTIQUE DU PROBLÈME

On suppose un problème de test d'hypothèses simples $\{H_0, H_1\}$ sur des v.a. bivariées $X_i = (X_{i,1}, X_{i,2})$, $i \geq 1$, à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Les X_i forment une suite i.i.d, $X_i \sim P_j$ sous H_j, $j = 0, 1$. On suppose de plus que $X_{i,1}$ et $X_{i,2}$ sont indépendantes conditionnellement à toute hypothèse, i.e. $P_j = P_{j,1} \otimes P_{j,2}$ si $X_{n,i} \sim P_{j,i}$ sous H_j, $i = 1, 2$. On suppose que le modèle statistique de chaque observation est homogène[1]. On pose $P_{j,i} = f_{j,i}.\mu_i, i = 1, 2,\ j = 0, 1$, où μ_i est une mesure dominante. L'optique choisie est asymptotique: on note X^n le n-échantillon global $(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_i^n = (X_{1,i}, \ldots, X_{n,i})$ le n-échantillon local, $i = 1, 2$. Deux suites de tests sont envisagées. Le test centralisé est une suite $(\gamma_{c,n})_{n \geq 1}$ de règles de décisions, de $\mathcal{X}^n$ dans $\{0, 1\}$, définies par $x^n \mapsto u_{c,n} = \gamma_{c,n}(x^n)$. Le test décentralisé est une suite $(\gamma_{n,0}, \gamma_{n,1}, \gamma_{n,2})_{n \geq 1}$ de triplets de règles de décisions. Les règles $\gamma_{n,i}$, $i = 1, 2$ vont de $\mathcal{X}_i^n$ dans $\{0, 1\}$ et les règles $\gamma_{n,0}$ vont de $\{0, 1\}^2$ dans $\{0, 1\}$. L'évaluation de la décision avec le test décentralisé se fait selon le mécanisme décrit sur la figure (1), soit $u_{d,n} = \gamma_{n,0}(u_{n,1}, u_{n,2})$, où $u_{n,i} = \gamma_{n,i}(x_i^n)$, $i = 1, 2$.

Le critère choisi est celui de Neyman-Pearson pour les deux types de test, pour lequel on cherche à minimiser les erreurs de type II, $\beta_n = P_1[U_n = 0]$, lorsque les erreurs de type I, $\alpha_n = P_0[U_n = 1]$, sont bornées supérieurement par $\alpha_n \in (0, 1)$, suite fixée à priori de niveaux convergeant vers zéro. Pour étudier et comparer deux tests, on va comparer les comportements asymptotiques des suites d'erreurs des deux types pour chaque test, ceci à l'aide des outils fournis par la théorie des grandes déviations. Plus précisément, ayant vérifié la décroissance exponentielle des erreurs des deux types pour chaque test, on fixera pour les deux tests une suite de niveaux exponentiels,à l'aide d'une vitesse de convergence $\alpha > 0$, et on comparera les vitesses β de décroissance des erreurs de type II. Un test T_1 sera uniformément supérieur à un test T_2 si, pour tout α, il fournit une vitesse $\beta_1 > \beta_2$. Bien entendu, les suites de tests comparés doivent être optimaux pour les niveaux α_n imposés: nous présentons maintenant la structure des tests centralisés et décentralisés optimaux pour ces niveaux.

3. STRUCTURE DES TESTS CENTRALISÉS ET DÉCENTRALISÉS OPTIMAUX

En détection centralisée, on sait, [Leh86], que les tests optimaux au sens de Neyman-Pearson sont les tests de rapport de vraisemblance (r.d.v.). Pour un niveau α, ces tests seront ici déterministes et peuvent être écrits

[1] i.e. les lois locales sont équivalentes

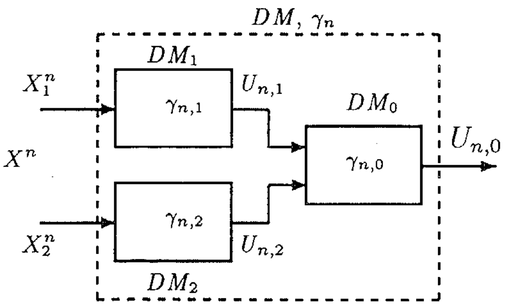

Figure 1: Architectures centralisée (pointillés) et décentralisée de détection.

$$\gamma_{c,n} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\log\left[\frac{f_{1,1}}{f_{0,1}}(X_{i,1})\right] + \log\left[\frac{f_{1,2}}{f_{0,2}}(X_{i,2})\right]\right\} \overset{U_{c,n}=1}{\underset{U_{c,n}=0}{\gtrless}} a,\ n \geq 1.$$

En détection décentralisée, on montre, [BLC93, WW92], que dans la classe (à priori sous-optimale) des stratégies décentralisées à *randomisation indépendante*, et sous l'hypothèse supplémentaire[2] que les r.d.v. des observations locales $X_{n,i}$ sont sans masses ponctuelles sous chaque hypothèse, que les stratégies locales de décision $\gamma_{n,i}$ qui sont optimales sont des tests de r.d.v. locaux, i.e.

$$\gamma_{n,i} : \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left[\frac{f_{1,i}}{f_{0,i}}(X_{k,i})\right] \overset{U_{n,i}=1}{\underset{U_{n,i}=0}{\gtrless}} a_i,\ i=1,2,\ n \geq 1. \qquad (1)$$

On montre également que la règle de fusion optimale, $\gamma_{n,0}$ est une règle booléene monotone (au sens de l'ordre partiel naturel sur $\{0,1\}^2$), donc soit le OU soit le ET logique dans notre cas.

4. VITESSE DE CONVERGENCE DES ERREURS DANS LES TESTS DE VRAISEMBLANCE

La théorie des grandes déviations donne le moyen, par les formules dites de Chernoff, d'étudier le comportement asymptotique des erreurs de type I et II dans les tests de r.d.v. Plus précisément (cf. [Dac79a, Dac79b]), pour un test qui s'écrit sous la forme (1) (en omettant l'indice i), et en posant $Z_k = \log f_1/f_0(X_k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ on a

$$\forall a > -K(P_0,P_1),\ \lim_n \frac{1}{n}\log P_0[S_n \geq n.a] = -h_Z(a). \qquad (2)$$

La fonction h_Z est la transformée de Cramer (t.c.) de la loi de Z_1 prise sous H_0, qui est définie comme la duale de Legendre de ψ_Z, la fonction génératice des cumulants (f.g.c.) de Z (toujours prise sous H_0). Les formules de définitions de la f.g.c. et de la t.c. sont respectivement

$$\psi_Z(t) = \log \mathbb{E}_0[\exp tZ] \quad \text{et } h_Z(a) = \sup_{t:\psi(t)<\infty} [a.t - \psi_Z(t)].$$

La formule (2) est non triviale pour un seuil sufisament élevé, ce qui explique l'intervention de la distance de Kullback de P_0 et P_1, $K(P_0,P_1)$, qui n'est autre que la moyenne sous H_0 de Z_1. Le cas particulier des tests de r.d.v. permet d'écrire simplement la vitesse de décroissance exponentielle des erreurs de type II lorsque le seuil du test est fixé égal à a. Celle-ci vaut

$$\beta = \alpha - a,\ \ \forall a < K(P_1,P_0).$$

Les résultats que nous venons de rappeler permettent d'énoncer une philosophie possible de comparaison de deux tests T_1 et T_2 au moyen des grandes déviations:

(i) Fixer pour T_1 et T_2 une vitesse de type I égale à $\alpha > 0$,

(ii) en déduire les seuils a_1 et a_2 nécessaires sur chaque test,

(iii) comparer les vitesses de type II β_1 et β_2 associées à ces seuils.

Un ordre (partiel) peut ainsi être établi entre tests: T_1 sera uniformément supérieur à T_2 si, pour toute valeur de α, on a $\beta_1 > \beta_2$. Dans notre cas ce principe est légèrement modifié, puisque on doit régler *deux* seuils pour un test décentralisé. Nous passons maintenant à l'application de ces idées à l'étude des tests décentralisés.

5. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES DÉTECTEURS DÉCENTRALISÉS

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut simplement quantifier le comportement asymptotique des détecteurs décentralisés utilisant le OU et le ET logique. Dans la classe des détecteurs utilisant le OU et dans celle utilisant le ET, on sait que l'optimalité au sens de Neyman-Pearson[3] est obtenue pour des tests à r.d.v., ce qui permet d'utiliser un principe de décroissance exponentielle des erreurs sur chaque capteur. On peut donc écrire, tout d'abord pour le OU, en notant $\alpha_n = P_0[U_{n,0}=1]$ et $\alpha_{n,i} = P_0[U_{n,i}=1]$, $i=1,2$ et en remarquant que $\alpha_n \leq \alpha_{n,1}+\alpha_{n,2}$

$$\max\{\alpha_{n,1},\alpha_{n,2}\} \leq \alpha_n \leq 2.\max\{\alpha_{n,1},\alpha_{n,2}\}.$$

Ce simple encadrement permet d'aboutir, après un calcul élémentaire et sous réserve que chaque test possède un seuil correctement réglé, à la formule

$$\lim_n \frac{1}{n}\log\alpha_n = \max\{\lim_n \frac{1}{n}\log\alpha_{n,1}, \lim_n \frac{1}{n}\log\alpha_{n,2}\}.$$

Pour l'erreur de type II, la même démarche conduit, avec des notations évidentes, à

$$\beta_n = \beta_{1,n}.\beta_{2,n}$$

puis

[2] que nous ferons dans tout ce qui suit

[3] avec les hypothèses mentionnées au début, et en se restreignant à la classe des détecteurs à randomisation indépendante

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \beta_n = \lim_n \frac{1}{n} \log \beta_{n,1} + \lim_n \frac{1}{n} \log \beta_{n,2}.$$

Un raisonment en tout point identique donne des formules analogues sur le test ET, de sorte qu'on peut résumer ces résultats sous la forme suivante, où α_{ou}, β_{ou} et α_{et}, β_{et} sont les limites précédentes, qui représentent les vitesses de type I et II du test OU et ET respectivement

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_{ou} & = & \min\{\alpha_1, \alpha_2\} \\ \beta_{ou} & = & \beta_1 + \beta_2 \end{array} \right. , \text{ et } \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_{et} & = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_{et} & = & \min\{\beta_1, \beta_2\}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Les formules données par l'équation (3) sont valides pourvu que le seuil a_i de chaque détecteur local soit compris entre $-K(P_{0,i}, P_{1,i})$ et $K(P_{1,i}, P_{0,i})$. On verra au paragraphe suivant que les tests décentralisés asymptotiquement optimaux vérifient bien de telles conditions. Ayant montré que les détecteurs OU et ET satisfont à un principe de décroissance des erreurs des deux types, selon des formules simples, nous pouvons passer à la comparaison de ces tests.

6. COMPARAISON DES DIVERS DÉTECTEURS

Reprenant les idées du paragraphe 4, nous allons successivement comparer les performances asymptotiques du test centralisé avec le test OU et le test ET, puis comparer entre eux ces deux tests. Un résultat préliminaire intéressant est le suivant

Proposition 1 *Soit α une vitesse de décroissance de l'erreur de type I, $-K(P_0, P_1) < \alpha < K(P_1, P_0)$, fixée à priori dans le test centralisé.*

(i) *Si $\alpha > \min\{K(P_{1,1}, P_{0,1}), K(P_{1,2}, P_{0,2})\}$, il n'existe pas de test* OU *ayant une vitesse de type I égale à α,*

(ii) *il existe toujours un test* ET *réalisant la vitesse α de type I.*

Preuve: On utilise les propriétés des f.g.c. de Z, Z_1 et Z_2 et de leurs duales (les t.c.), telles quelles sont présentées dans [Dac79b]. Pour le point (i), en notant $\alpha_i(a_i)$ la vitesse de type I sur le capteur i et $\alpha_{ou}(a_1, a_2)$ celle du test global, on a $\alpha_i(a_i) \leq K(P_{1,i}, P_{0,i})$ $\forall a_i$, $i = 1, 2$. L'hypothèse de la proposition implique $\alpha > \min\{K(P_{1,1}, P_{0,1}), K(P_{1,2}, P_{0,2})\} \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2\} = \alpha_{ou}(a_1, a_2)$, $\forall a_1, a_2$. Le point (ii) est direct, car $\alpha_{et}(a_1, a_2) = \alpha_1(a_1) + \alpha_2(a_2)$ et $K(P_1, P_0) = K(P_{1,1}, P_{0,1}) + K(P_{1,2}, P_{0,2})$. □

La proposition (1) indique que les vitesses de type I trop élevées sont irréalisables avec le test OU. Dans la plage où on peut comparer les tests T_c et T_{ou} et T_c et T_{et}, il est intéressant de vérifier que le test centralisé est uniformément meilleur. Nous donnons une démonstration de ce fait dans le cas où $P_{j,1} = P_{j,2}$, $j = 0, 1$. La preuve du cas général est une généralisation qui doit s'obtenir sans grandes difficultés.

Proposition 2 *Dans la plage des valeurs de α où T_{ou} et T_{et} peuvent être comparés à T_c, et si $\beta(\alpha), \beta_{ou}(\alpha)$ et $\beta_{et}(\alpha)$ sont les vitesses de type II des tests centralisés* OU *et* ET*, on a $\beta_{ou}(\alpha) < \beta(\alpha)$ et $\beta_{et}(\alpha) < \beta(\alpha)$.*

Preuve: On donne la preuve dans le cas particulier où $P_{j,1} = P_{j,2}$, $j = 0, 1$, la preuve générale s'obtient de façon analogue. On montre d'abord que $\beta_{et}(\alpha) < \beta(\alpha)$. Comme $P_{j,1} = P_{j,2}$, $j = 0, 1$, on a $\psi_{Z_1} = \psi_{Z_2} = \psi/2$. Une simple construction géométrique montre que, si a est le seuil de T_c (i.e. $\alpha(a) = \alpha$), $a_1 = a_2 = a/2$ convient pour obtenir $\alpha_{et} = \alpha_1 + \alpha_2 = 2.\alpha/2$. La vitesse de type II correspondante est $\beta_{et} = \beta/2$. Pour tout autre couple (α'_1, α'_2) t.q. $\alpha'_1 + \alpha'_2 = \alpha$, on a β'_1 ou $\beta'_2 < \beta/2$, donc $\beta'_{et} < \beta/2$. Le meilleur test ET de vitesse de type I α est donc de vitesse de type II $\beta_{et} = \beta/2 < \beta$.
Pour le test OU, on remarque que la situation $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ est optimale. En effet, notant β_1, β_2 les vitesses associées à $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, on remarque qu'une modification de α_1 (ou α_2) en α'_1 (ou α'_2) ne change pas α_{ou} mais diminue la vitesse de type II: $\beta'_{ou} = \beta'_1 + \beta_2 < \beta_1 + \beta_2$. Finalement, en réglant le seuil $a_1 = a_2$ de T_{ou} on voit qu'il est nécéssaire d'avoir $a_1 = a_2 > a/2$ (associé à $\alpha/2 < \alpha$). En augmentant α on diminue nécéssairement β, donc $\beta_1 = \beta_2 < \beta/2$ et $\beta_{ou} = \beta_1 + \beta_2 < \beta$. □

Bien entendu, la sous-optimalité asymptotique des tests décentralisés est évidente, puisqu'elle est vraie à distance finie. Cependant, il faut bien voir que l'optimalité asymptotique qui nous intéresse n'implique pas nécéssairement une optimalité à distance finie: il se peut que les réglages des seuils décentralisés asymptotiquement optimaux ne correspondent pas à des seuils optimaux pour les n finis. Mais surtout, l'intêret de la preuve réside dans la compréhension du fonctionement asymptotique des tests décentralisés, dont on peut espérer se servir pour démontrer d'autres résultats.
On peut se demander si T_{ou} est supérieur à T_{et} sur une plage de vitesses de type I. Le rôle symétrique en α, β des équations (3) laisse présager un tel résultat. C'est bien ce que confirme la proposition suivante.

Proposition 3 **(i)** *Pour des vitesses α de type I sufisamment petites, T_{ou} est supérieur à T_{et}. Il est même asymptotiquement équivalent à T_c lorsque α tend vers zéro.* **(ii)** *Pour des vitesses α de type I sufisamment élevées, T_{et} est supérieur à T_{ou}; on a équivalence de T_{et} et T_c lorsque α tend vers $K(P_1, P_0)$.*

Preuve:(i) Si $\alpha \to 0$, il est clair que les vitesses α_1, α_2 du test OU de même vitesse tendent vers zéro. Donc les vitesses locales β_1, β_2 tendent respectivement vers $K(P_{0,1}, P_{1,1})$ et $K(P_{0,2}, P_{1,2})$ et $\beta_{ou} = \beta_1 + \beta_2$ tend vers $\beta = K(P_0, P_1)$, qui est aussi la vitesse de type II du test centralisé. Par contre, la vitesse de type II de T_{et} tend vers $\min\{K(P_{0,1}, P_{1,1}), K(P_{0,2}, P_{1,2})\} < K(P_0, P_1)$. (ii) Si $\alpha \to K(P_1, P_0)$, on a nécéssairement $\alpha_i \to K(P_{1,i}, P_{0,i})$, $i = 1, 2$ pour T_{et} et $\beta_{et} \to 0$, qui est bien la vitesse de type II du test centralisé. Par contre, comme on l'a vu, le test OU est innefficace dés que $\alpha > \min\{K(P_{1,1}, P_{0,1}), K(P_{1,2}, P_{0,2})\}$. □

La proposition (3) est intéressante, puisqu'elle justifie, par un point de vue asymptotique, le fait que le test OU est meilleur que le test ET aux faibles erreurs de type I. C'est bien le phénomène observé en détection décentralisée au sens de Neyman-Pearson sur les courbes C.O.R. des stratégies à randomisation indépendante. On peut même penser raisonablement qu'il existe une vitesse α_0 t.q. $\beta_{ou}(\alpha) > \beta_{et}(\alpha)$ sur $\alpha < \alpha_0$ et $\beta_{ou}(\alpha) < \beta_{et}(\alpha)$ sur $\alpha > \alpha_0$. C'est ce que confirme l'exemple suivant.

7. ETUDE D'UN MODÈLE PARTICULIER

On a choisit un modèle Gaussien, où on suppose que les changements d'hypothèse sur chaque capteur sont associés à des changements de moyenne, soit

$$X_i \overset{H_j}{\sim} N(m_j, \Gamma),$$

où

$$m_j = \begin{pmatrix} m_{j,1} \\ m_{j,2} \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, i \geq 1,\ j = 0, 1.$$

Le calcul des vitesses de type II en fonction des vitesses de type I passe par celui des f.g.c. et des t.c. associées. On obtient après calcul

$$\psi_Z(t) = \psi_{Z_1}(t) + \psi_{Z_2}(t), \text{ où } \psi_{Z_i}(t) = K_i.t.(t-1)$$

avec

$$K_i = \frac{(m_{1,i} - m_{0,i})^2}{2\sigma_i^2} = K(P_{0,i}, P_{1,i}),\ i = 1, 2.$$

Les t.c. associées sont

$$\begin{cases} h_Z(a) &= \frac{(a+K)^2}{4K} \text{ pour } |a| < K = K_1 + K_2 = K(P_0, P_1), \\ h_{Z_i}(a_i) &= \frac{(a_i+K_i)^2}{4K_i} \text{ pour } |a_i| < K_i,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Les courbes $\beta(\alpha)$ obtenues pour T_c, T_{ou} et T_{et} selon le principe décrit au paragraphe (4) et en accord avec les équations (3) sont (on suppose $K_1 < K_2$)

$$\begin{cases} \beta(\alpha) &= (\sqrt{\alpha} - \sqrt{K})^2 \\ \beta_{ou}(\alpha) &= (\sqrt{\alpha} - \sqrt{K_1})^2 + (\sqrt{\alpha} - \sqrt{K_2})^2, \\ & \quad \text{si } 0 < \alpha < \min\{K_1, K_2\}, \\ \beta_{et}(\alpha) &= \begin{cases} \frac{1}{4}(\sqrt{2\alpha - (\sqrt{K_2} - \sqrt{K_1})^2} - (\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2}))^2 \\ \text{si } \alpha > (\sqrt{K_2} - \sqrt{K_1})^2 \\ K_1 \text{ si } \alpha \leq (\sqrt{K_2} - \sqrt{K_1})^2 \end{cases} \end{cases}$$

La figure (2) permet de vérifier les résultats du paragraphe 6 et confirme l'idée d'une valeur α_0 départageant le test OU du test ET. On vérifie également que le test ET est limité en vitesse de type II aux faibles vitesses de type I et que le test OU ne peut réaliser de trop grandes vitesses de type I.

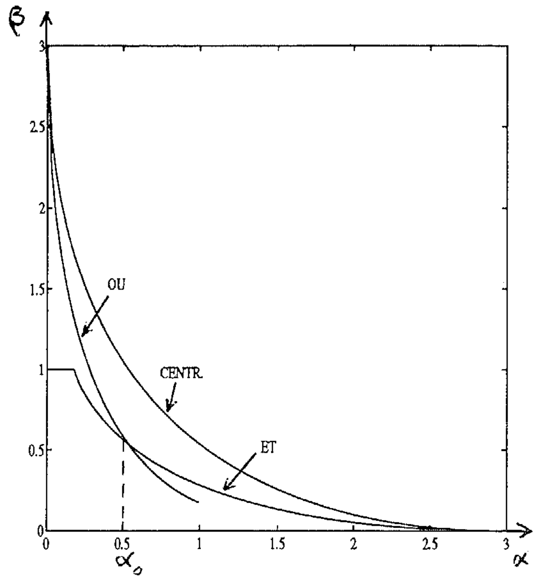

Figure 2: Courbes $\beta(\alpha)$ pour les tests centralisé, OU et ET dans un modèle Gaussien.

8. CONCLUSION

L'étude menée ci-dessus démontre l'intêret des outils de grandes déviations pour comparer les comportements asymptotiques des tests décentralisés. On a pu, par cette approche, donner une justification théorique d'un résultat connu par ailleurs: aux faibles erreurs de type I, la règle du OU est meilleure que celle du ET en détection décentralisée. Outre une extension des propositions énoncées à un cadre statistique plus large, une prolongation intéréssante de ce travail serait l'étude des tests à quantifications M-aires ($M > 2$) et la comparaison de plusieurs architectures de détection (tandem, série, mixte). On pourrait également comparer les résultats donnés par une approche asymptotique au sens de la contiguité, par exemple à l'aide de l'efficacité asymptotique de Pitman.

9. REFERENCES

[BLC93] F. Baldit and J. P. Le Cadre. *Detection décentralisée.* Rapport Interne à paraître, I.R.I.S.A., Campus de Beaulieu, 35042, RENNES Cedex, FRANCE, 1993.

[Dac79a] D. Dacunha-Castelle. Formule de chernoff pour des rapports de vraisemblance. *Astérisque*, (68):25–31, 1979.

[Dac79b] D. Dacunha-Castelle. Formule de chernoff pour une suite de variables réelles. *Astérisque*, (68):19–24, 1979.

[Leh86] E. L. Lehmann. *Testing Statistical Hypotheses.* John Wiley & Sons, second edition, 1986.

[TS81] R. R. Tenney and N. R. Sandell. Detection with distributed sensors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 17(4):501–510, 1981.

[Tsi88] J. Tsitsiklis. *Decentralized Detection*, chapter to appear in Advances in Satistical Signal Processing. Volume 2: Signal detection, Greenwich, CT: Jai Press, 1988.

[WW92] P. Willett and D. Warren. The suboptimality of randomized tests in distributed and quantized detection systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.38(No.2):355–361, March 1992.