



DETECTION D'HELICOPTERES PAR LE BRUIT DE LEUR ROTOR PRINCIPAL

G. VEZZOSI*, F. EHRMANN*, M. PECOT**

* Laboratoire de traitement du signal et de l'image, Campus de Beaulieu,
Université de Rennes 1, 35042 Rennes Cédex

** Thomson-CSF/LER, Avenue de Belle Fontaine, 35510 Cesson Sévigné

RÉSUMÉ

Résumé. A grande distance, le signal sonore produit par le rotor principal d'un hélicoptère est assez bien décrit par le modèle d'une source ponctuelle tournante munie d'une loi d'excitation périodique. Les harmoniques du modèle peuvent être calculés analytiquement, ce qui permet de définir un détecteur utilisant à la fois le module et la phase des harmoniques mesurés. Moyennant certaines approximations, le détecteur devient une variante du filtre adapté.

ABSTRACT

Abstract. The far-field acoustic signal produced by the main rotor of an helicopter is fairly well described by the model of a point-like turning source with a periodic excitation. The model harmonics can be computed analytically, which allows to define a receiver using both the modulus and the phase of the measured harmonics. Under some approximations, the receiver becomes a variant of the matched filter.

1. INTRODUCTION

Plusieurs raisons conduisent à privilégier le signal produit par le rotor principal dans la détection des hélicoptères par des moyens acoustiques : en raison de l'effet Doppler produit par la rotation, le signal est impulsif ; il est approximativement périodique ; la bande [10-300 Hz] qu'il occupe est peu affaiblie par la propagation. L'amélioration de la détection passe naturellement par une meilleure connaissance du signal à détecter, de façon à être en mesure d'exploiter sur le signal autre chose que sa seule périodicité. Cependant, la forme du signal varie beaucoup suivant les conditions de vol, et les prévisions théoriques les plus récentes obtenues en intégrant les équations de l'acoustique le long de la pale sont trop complexes pour permettre de spécifier un détecteur. Elles servent essentiellement à calculer les profils de pale qui réduisent le bruit rayonné. Le but de cette étude est de montrer que l'ancien modèle de Gutin [1, 1936] fournit déjà, malgré sa simplicité, des performances en détection honorables, tout en permettant une ébauche de classification. Après avoir rappelé le calcul qui conduit aux expressions analytiques des harmoniques du signal sonore dans le modèle de Gutin (§ 2), nous définissons le récepteur correspondant (§ 3), que nous comparons au récepteur incohérent fondé sur le calcul d'un harmogramme (§ 4).

2. LE MODELE DE GUTIN

Dans le modèle de Gutin, chaque pale est assimilée à une source ponctuelle tournante placée à son extrémité. Si l'hélicoptère est immobile, le signal de pression acoustique $p(\vec{r}, t)$ produit par une pale est la solution de l'équation

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ Q(\Omega t) \delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) \right\} + \text{div} \left\{ \vec{F}(\Omega t) \delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) \right\}, \quad (1)$$

où c est la célérité du son dans l'air, $\vec{\xi}(t) = (R \cos \Omega t, R \sin \Omega t, 0)$ est la trajectoire de l'extrémité de la pale supposée de rayon R , et $Q(x)$ et $\vec{F}(x)$ sont des fonctions de période 2π . Le nombre $M = R\Omega/c$ est appelé le nombre de Mach de la pale. Pour un hélicoptère immobile, M est proche de 0,6. Au second membre de (1), la dérivée temporelle représente le terme monopolaire, ou bruit d'épaisseur de la pale ; la divergence représente le terme dipolaire, ou bruit de charge. Il existe

également un terme quadripolaire, qui met en jeu des dérivées spatiales secondes de la forme

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{i,j}(\Omega t) \delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t)),$$

où $T_{i,j}$ est le tenseur de Lighthill [2-5]. Nous négligeons ce terme dans la suite, car il n'est significatif qu'aux nombres de Mach très proches de un.

2.1 Calcul du potentiel à grande distance

L'équation (1) se résout en dérivant par rapport au temps et aux variables spatiales la solution $\Phi(\vec{r}, t)$ d'une équation du type

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -q(\Omega t) \delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t)), \quad (2)$$

où la fonction q prend les valeurs Q , $-F_x$, $-F_y$ et $-F_z$, (F_x, F_y, F_z) désignant les composantes cartésiennes de la force \vec{F} . Il existe plusieurs méthodes pour résoudre cette équation [2-5]. Nous présentons ici un moyen direct qui, outre sa simplicité, a l'avantage de donner assez facilement les modifications qu'il convient d'apporter lorsque la source tournante est animée également d'un mouvement de translation.

Nous utilisons le résultat général suivant [6, p. 263] : supposons qu'au second membre de (2), on ait une excitation de la forme $-f(t) \delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t))$, où $f(t)$ est une fonction quelconque (non nécessairement périodique), et $\vec{\xi}(t)$ est une trajectoire quelconque (non nécessairement circulaire), mais **subsonique** (ie $|d\vec{\xi}/dt| < c$). Alors

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} (1 - \dot{t}) f(t - \tau), \quad (3)$$

où $\tau = \tau(t) = \bar{r}/c$ est le temps de propagation, et \bar{r} est la distance qu'a parcouru le signal émis par la source pour parvenir au point \vec{r} au temps t : $\bar{r} = \bar{r}(t)$ est l'unique solution de l'équation :

$$|\vec{r} - \vec{\xi}(t - \bar{r}/c)| = \bar{r}. \quad (4)$$

(L'unicité de la solution provient de ce que le mouvement de la source est supposé subsonique. Le résultat précédent s'étend au cas



d'un mouvement supersonique. Dans ce cas, il y a en général plusieurs positions de la source qui produisent le signal reçu au temps t , et l'équation (4) a plusieurs solutions ; au second membre de (3), il convient de faire la somme des termes correspondant à chacune de ces solutions pour obtenir le résultat).

Application. Supposons que la source décrive un cercle, et soit (r, θ, ψ) et $(R, \theta', 0)$ les coordonnées sphériques des points \vec{r} et $\vec{\xi}$.

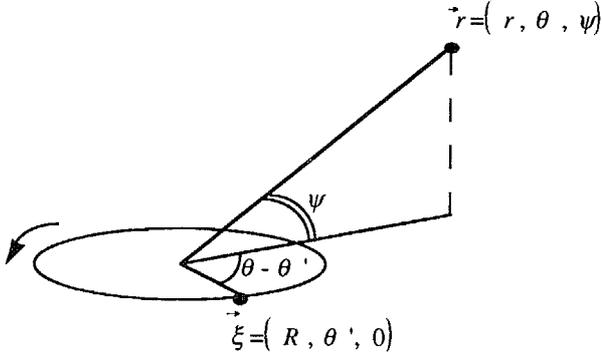


Fig. 1 : géométrie du problème.

Alors

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{\xi}|^2 &= r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi \cos(\theta - \theta') \\ &= r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi \sin\left(\theta' + \frac{\pi}{2} - \theta\right). \end{aligned}$$

A grande distance, on a $r \gg R$, donc

$$|\vec{r} - \vec{\xi}| \approx r - R \cos \psi \sin\left(\theta' + \frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

de sorte que l'équation (4) devient :

$$r - R \cos \psi \sin\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \bar{r},$$

soit encore en multipliant les deux membres par Ω/c pour faire apparaître le temps de propagation τ et en posant $M_\psi = M \cos \psi = R\Omega \cos \psi/c$:

$$\frac{r\Omega}{c} - M_\psi \sin\left(\Omega(t - \tau) + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \Omega\tau. \quad (5)$$

La solution $\tau = \tau(t)$ de cette équation a la période $T = 2\pi/\Omega$. Appliquant alors la relation (3) après y avoir remplacé l'excitation $f(t)$ par la fonction périodique $q(\Omega t)$, et notant que dans cette relation le dénominateur \bar{r} peut être approché par la distance $r = |\vec{r}|$ de l'observateur au centre de la rotation, on obtient la solution de l'équation (2) à grande distance :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1 - \dot{\tau}}{4\pi r} q(\Omega(t - \tau)). \quad (6)$$

Cette fonction admet la période T en t . Considérons son $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier

$$a_n = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\Omega t} (1 - \dot{\tau}) q(\Omega(t - \tau)) dt.$$

Le changement de variable $u = \Omega(t - \tau) + \pi/2 - \theta$ amène :

$$a_n = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\pi}^{\pi} q\left(u + \theta - \frac{\pi}{2}\right) e^{-in\left(u + \Omega\tau + \theta - \frac{\pi}{2}\right)} du,$$

soit encore d'après (5) :

$$a_n = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\pi}^{\pi} q\left(u + \theta - \frac{\pi}{2}\right) e^{-in\left(u - M_\psi \sin u + \frac{r\Omega}{c} + \theta - \frac{\pi}{2}\right)} du.$$

Ainsi

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n e^{in\Omega(t - r/c) + in(\pi/2 - \theta)}, \quad (7.a)$$

$$c_n = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\pi}^{\pi} q\left(u + \theta - \frac{\pi}{2}\right) e^{-in\left(u - M_\psi \sin u\right)} du. \quad (7.b)$$

2.2 Cas d'une source tournante en translation

L'équation de la trajectoire est alors de la forme

$$\vec{\xi}(t) = (R \cos \Omega t + v_x t, R \sin \Omega t + v_y t, v_z t).$$

Fixons un instant t_I quelconque. Le signal reçu au point \vec{r} à cet instant a été émis au temps $t_0 = t_I - r/c = t_I - \tau_I$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer $t_0 = 0$. Comme le point \vec{r} est à grande distance du centre de la rotation, les angles ψ et θ de la Fig. 1 sont des constantes dans le voisinage de t_0 . La distance r du point \vec{r} au centre de la rotation vaut au temps s :

$$r(s) = \sqrt{(x - v_x s)^2 + (y - v_y s)^2 + (z - v_z s)^2}.$$

Pour s petit, elle peut être remplacée par son développement limité autour de zéro

$$r(s) \approx r(0) - v_r s,$$

où v_r est la vitesse radiale de translation, comptée positivement dans le sens source-observateur :

$$v_r = \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{r(0)}.$$

Dans le voisinage du point t_I , l'équation (5) du temps de retard prend ainsi la forme

$$[r(0) - v_r(t - \tau_I)]\Omega/c - M_\psi \sin[\Omega(t - \tau_I) + \pi/2 - \theta] = \Omega\tau_I,$$

ce qui devient en passant le terme $v_r(t - \tau)\Omega/c$ au second membre et en divisant le tout par $(1 - v_r/c)$:

$$\begin{aligned} r(0)\Omega'/c - M'_\psi \sin[\Omega'(t - \tau_I) + \pi/2 - \theta] \\ = \Omega'[\tau_I(1 - v_r/c) + v_r t/c], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Omega' = \Omega/(1 - v_r/c), \quad M'_\psi = R\Omega' \cos \psi/c.$$

Effectuons alors le changement de variables :

$$\tau'_I = \tau_I(1 - v_r/c) + v_r t/c.$$

Comme $t - \tau_I = (t - \tau'_I)/(1 - v_r/c)$, l'équation (8) devient

$$r(0)\Omega'/c - M'_\psi \sin[\Omega'(t - \tau'_I) + \pi/2 - \theta] = \Omega'\tau'_I.$$

On reconnaît l'équation (5) où Ω est remplacé par Ω' . Il s'ensuit que si $\tau(t, \Omega)$ est solution de (5), on a $\tau'_I = \tau(t, \Omega')$, $t - \tau_I = [t - \tau(t, \Omega')]/(1 - v_r/c)$. Ce fait, joint à la relation (6), montre que la solution à grande distance de l'équation d'ondes vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r(0)} [1 - \dot{\tau}_I] q[\Omega(t - \tau_I)] \\ = \frac{1}{4\pi r(0)} \frac{1}{1 - v_r/c} [1 - \dot{\tau}(t, \Omega')] q[\Omega'(t - \tau(t, \Omega'))], \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que la relation (7) subsiste sans changement, à condition : (i) d'y remplacer partout Ω par $\Omega' = \Omega(1 - v_r/c)$, y compris dans le nombre de Mach $M_\psi = R \Omega$ par ψ/c ; (ii) de multiplier les coefficients de Fourier c_n par le facteur de convection dû à la translation $(1 - v_r/c)^{-1}$.

2.3 Signal de pression

Le signal de pression mesuré au point $\vec{r} = (x, y, z)$ est la somme des signaux d'épaisseur et de charge. Le premier s'obtient en remplaçant la fonction $q(x)$ par Q dans (7), et en dérivant la fonction Φ par rapport au temps, ce qui donne :

$$p_E(\vec{r}, t) = \sum_n c_n^{(E)} e^{in\Omega(t - r/c) + in(\pi/2 - \theta)} \quad (9)$$

$$c_n^{(E)} = \frac{in\Omega}{8\pi^2 r} \int_{-\pi}^{\pi} Q(u + \theta - \pi/2) e^{-in(u - M_\psi \sin u)} du.$$

Le second s'obtient en remplaçant dans (7) $q(x)$ par les trois composantes cartésiennes de la force $-\vec{F}$, en prenant les dérivées des trois fonctions Φ obtenues en x, y, z , et en faisant la somme des résultats. Le calcul des dérivées montre que le seul terme prépondérant à grande distance provient de la dérivée de $e^{-in\Omega r/c}$ dans (7.a). Comme le vecteur $\vec{n} = (\partial r/\partial x, \partial r/\partial y, \partial r/\partial z)$ n'est autre que le vecteur unité du point \vec{r} , le terme $F_r = \vec{F} \cdot \vec{n}$ qui apparaît après la sommation s'interprète comme la composante radiale de la force \vec{F} . Ainsi le bruit de charge ne dépend que de la composante radiale de la force, son $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier vaut :

$$c_n^{(C)} = \frac{in\Omega}{8\pi^2 r c} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(u + \theta - \pi/2) e^{-in(u - M_\psi \sin u)} du. \quad (10)$$

Les relations (9) et (10) sont analytiquement les mêmes. Les fonctions Q et F_r ont toutes les deux la période 2π . Introduisant alors la série de Fourier

$$\frac{\Omega}{4\pi r} \left[Q(x + \theta - \pi/2) + \frac{1}{c} F_r(x + \theta - \pi/2) \right] = \sum_{\lambda} A_{\lambda} e^{i\lambda x}, \quad (11)$$

$$A_{-\lambda} = \bar{A}_{\lambda},$$

puis les intégrales réelles :

$$\alpha(\lambda, n, M) = \frac{n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda x - in(x - M \sin x)} dx, \quad (12)$$

on obtient la forme suivante du $n^{\text{ième}}$ harmonique de pression produit par une pale :

$$c_n = i \sum_{\lambda} A_{\lambda} \alpha(\lambda, n, M). \quad (13)$$

Le cas d'un rotor à B pales assemblées symétriquement se ramène aussitôt au cas précédent. On est conduit à faire la somme de B signaux identiques et de période $T = 2\pi/\Omega$, décalés de T/B l'un par rapport à l'autre. Les harmoniques qui ne sont pas multiples de B s'annulent, les autres sont multipliés par B .

3. DEFINITION DU DETECTEUR

Les relations précédentes montrent que les harmoniques de pression $\{c_n\}$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des harmoniques de charge $\{A_{\lambda}\}$, les coefficients de la combinaison étant indexés par le nombre de pales et le nombre de Mach en bout de pale, corrigé éventuellement de la vitesse de translation. D'après la relation (12), on a identiquement

$$\alpha(1, n, M) + \alpha(-1, n, M) = \frac{2}{M} \alpha(0, n, M),$$

de sorte que la décomposition de la relation (13) en parties réelle et imaginaire nous donne, pour un rotor à B pales :

$$\Re \underline{c} = \sum_{\lambda \geq 1} \Im M A_{\lambda} \underline{u}_{\lambda}, \quad (14)$$

$$\Im \underline{c} = \left(A_0 + \frac{2}{M} \Re A_1 \right) \underline{v}_1 + \sum_{\lambda \geq 2} \Re A_{\lambda} \underline{v}_{\lambda},$$

où \underline{c} est le vecteur des coefficients de Fourier, et \underline{u}_{λ} et \underline{v}_{λ} sont les vecteurs :

$$\underline{u}_{\lambda} = \left[-\alpha(\lambda, nB, M_{\psi}) + \alpha(-\lambda, nB, M_{\psi}) \right], \lambda \geq 1, \quad (15)$$

$$\underline{v}_1 = \left[\alpha(0, nB, M_{\psi}) \right], \underline{v}_{\lambda} = \left[\alpha(\lambda, nB, M_{\psi}) + \alpha(-\lambda, nB, M_{\psi}) \right], \lambda \geq 2.$$

3.1 Choix du détecteur

Supposons provisoirement connus le fondamental f_0 , le nombre de pales B et le nombre de Mach M_{ψ} . Comme le signal périodique réel est décalé temporellement par rapport à son modèle, son $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier est celui du modèle multiplié par $e^{in\varphi}$. On est donc ramené à tester les hypothèses :

$$H_0 : \hat{c}_n = b_n$$

$$H_1 : \hat{c}_n = c_n e^{in\varphi} + b_n, 1 \leq n \leq N,$$

où $\{b_n\}$ est une suite de N variables aléatoires que l'on peut supposer gaussiennes, circulaires et de même variance γ_b , et c_n est la $n^{\text{ième}}$ composante du vecteur (14). Il existe plusieurs façons de résoudre le problème [7]. On peut traiter les harmoniques de charge $\{A_{\lambda}\}$ comme des variables aléatoires, en les supposant par exemple gaussiennes circulaires avec une loi de décroissance des harmoniques égale à la loi empirique suggérée par Lawson et Ollerhead [2] :

$$E|A_{\lambda}|^2 = \frac{E A_0^2}{(1 + \lambda)^{2,5}}, \lambda \geq 0.$$

Ceci nous ramène au cadre habituel de la détection d'un signal aléatoire gaussien. On peut aussi traiter les harmoniques de charge comme des constantes complexes inconnues, et utiliser une technique de maximum de vraisemblance. Les essais sur signaux réels montrent que 90 % environ de la puissance moyenne du signal périodique est produite par les deux premiers harmoniques de charge A_0 et A_1 . Ceci nous ramène à la détection d'un signal connu à un facteur et à un déphasage près. Posant

$$D(\varphi) = \text{diag} \left\{ e^{i\varphi}, \dots, e^{iN\varphi} \right\},$$

$$\hat{\underline{c}}(\varphi) = D^*(\varphi) \hat{\underline{c}}, \underline{u} = \underline{u}_1 / |\underline{u}_1|, \underline{v} = \underline{v}_1 / |\underline{v}_1|,$$

la log-vraisemblance vaut à un facteur près :

$$\begin{aligned} |\hat{\underline{c}}|^2 - |\hat{\underline{c}} - D(\varphi)[x\underline{u} + iy\underline{v}]|^2 &= |\hat{\underline{c}}|^2 - |\hat{\underline{c}}(\varphi) - [x\underline{u} + iy\underline{v}]|^2 \\ &= |\hat{\underline{c}}|^2 - |\Re \hat{\underline{c}}(\varphi) - x\underline{u}|^2 - |\Im \hat{\underline{c}}(\varphi) - y\underline{v}|^2, \end{aligned}$$

et sa maximisation par rapport à x, y et φ conduit au récepteur :

$$R_I = \sup_{\varphi} \left\{ \underline{u}^T \Re \hat{\underline{c}}(\varphi) + \underline{v}^T \Im \hat{\underline{c}}(\varphi) \right\} \frac{H_1}{H_0} \stackrel{?}{>} \text{seuil}. \quad (16)$$

La maximisation en φ se fait par un calcul de FFT. Elle doit être complétée par une maximisation en f_0, B et M_{ψ} , puisque pratiquement ces paramètres sont inconnus. Si on admet que B varie entre 2 et 5 et M_{ψ} entre 0,4 et 0,9 au pas de 0,1, on a 24 couples (B, M_{ψ}) à traiter. Cependant, certains couples (B, M_{ψ}) conduisent à des vecteurs \underline{u} et \underline{v} qui sont presque colinéaires. Une



procédure de classification [7] destinée à réduire le nombre des sous espaces permet de ramener le nombre des couples traités à 3, comme l'indique le TAB. I.

$B \backslash M_\psi$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2						
3				●		
4						
5			●			●

TAB. I - Classification des couples (B, M_ψ) ; les centres des trois classes sont marqués d'un point.

4. ESSAIS

Nous partons d'un signal réel, produit par une gazelle en translation ($f_0 = 21,28 \text{ Hz}$, $B = 3$, $M_\psi \approx 0,7$), et enregistré dans des conditions de rapport S/B assez fort pour permettre la mesure des 10 premiers harmoniques complexes du rotor principal. Le signal temporel, reconstruit à partir des harmoniques, est donné Fig. 2. Nous considérons 4,096 secondes de ce signal, échantillonné à 1 kHz, et nous lui ajoutons un bruit blanc gaussien dont la puissance moyenne est réglée pour que le rapport S/B après FFT vale 16 dB (ceci correspond à un rapport S/B temporel de -20 dB). Le récepteur à modèle de pales (16) est comparé à l'harmogramme [8], avec ou sans loi de décroissance des harmoniques :

$$\begin{cases} R_2 = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 |\hat{c}_n|^2 > \frac{H_1}{H_0} \text{ seuil}, \\ \sigma_1^2 = 1, \sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 / 2,5 \text{ (4 dB par harmonique)}, \end{cases} \quad (17)$$

$$R_3 = \sum_{n=1}^N |\hat{c}_n|^2 > \frac{H_0}{H_1} \text{ seuil}. \quad (18)$$

La loi de décroissance de 4 dB/harmonique choisie dans (17) est proche de la loi réelle. La Fig. 3 donne la courbe COR mesurée expérimentalement pour 10000 essais, quand le fondamental est recherché dans la bande [10-30 Hz]. On y voit la supériorité du récepteur à modèle de pales, qui naturellement s'accroît lorsque la loi de pondération des harmoniques s'écarte de la loi réelle. Le récepteur offre de plus une meilleure réjection des brouilleurs périodiques dont les harmoniques ne respectent pas les lois de phase d'un signal de pale.

5. CONCLUSION

La détection d'un signal périodique s'effectue souvent par le calcul d'un simple harmogramme, ce qui revient à ne retenir du signal que sa seule périodicité et à négliger tout le reste. L'étude précédente a montré le bénéfice supplémentaire que l'on peut tirer de la loi de phase des harmoniques du signal périodique, lorsqu'on dispose d'un modèle approché du signal à détecter. Le récepteur devient alors une variante du filtre adapté. Dans le cas du signal produit par le rotor principal d'un hélicoptère, le modèle peut être celui d'une source ponctuelle tournante. Le récepteur obtenu présente trois avantages : (i) il améliore la détection ; (ii) il offre une meilleure réjection des brouilleurs périodiques ; (iii) il donne des indications sur le nombre de pales et le nombre de Mach du rotor après détection.

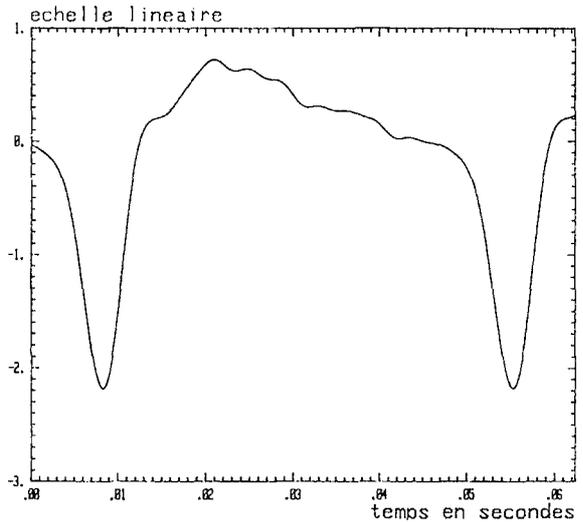


Fig. 2 : signal temporel de rotor principal d'une gazelle en translation (extrait de la campagne d'expérimentation AMI 2 de la SEFT).

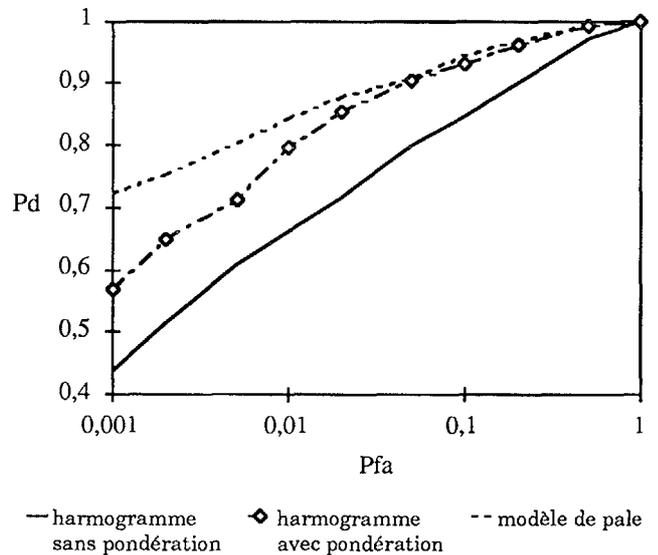


Fig. 3 : courbes COR des trois récepteurs (S/B temporel = -20 dB).

REFERENCES

- [1] L. Ya GUTIN, "On the sound field of a rotating propeller", Phys. Z. Sowjn., Band A Heft 1, 57, (1936).
- [2] M. V. LOWSON, J. B. OLLERHEAD, "A theoretical study of helicopter rotor noise", Journal of Sound and Vibration, vol. 9, 1969, pp. 197-222.
- [3] P. M. MORSE, K. U. INGARD, "Theoretical acoustics", Princeton University Press, 1968.
- [4] M. BRUNEAU, "Introduction aux théories de l'acoustique", Publications de l'Université du Maine, 1983.
- [5] D. G. CRIGHTON, A. P. DOWLING, J. E. FFOWCS WILLIAMS, M. HECKL, F. G. LEPPINGTON, "Modern methods in analytical acoustics", Lecture Notes, Springer-Verlag, 1993.
- [6] P. R. WALLACE, "Mathematical analysis of physical problems", Holt, Rinehart and Winston, 1972.
- [7] F. EHRMANN, "Contribution à la détection et à la localisation d'hélicoptères par des moyens acoustiques", thèse de l'Université de Rennes I, Sept. 1993.
- [8] M. J. HINICH, "Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown", IEEE Trans. on ASSP, vol. ASSP-30, n°5, October 1982, pp. 747-550.