



# SINTRACK, UN ALGORITHME DE DETECTION ET D'ESTIMATION ADAPTATIVES DE SINUSOÏDES EXPONENTIELLEMENT AMORTIES ET DECALEES DANS LE TEMPS.

P. DUVAUT, F. DUBLANCHET, P. LEMOINE.

ETIS ENSEA, Les Chênes Pourpres  
95000 CERGY-PONTOISE

## RÉSUMÉ

Nous présentons dans cet article un nouvel algorithme, SINTRACK, dédié à la poursuite des paramètres de sinusoides amorties non stationnaires, bruitées, ne survenant pas nécessairement au même instant. SINTRACK est envisagé sous une problématique générale de détection et d'estimation conjointes. La procédure d'estimation fait appel à une version instantanée de la méthode Matrix Pencil et à la mise à jour d'un vecteur de prédiction rétrograde surdimensionné et de norme minimale. La procédure de détection repose sur l'observation permanente de la valeur absolue de l'erreur de prédiction rétrograde, laquelle renseigne, par son allure caractéristique, sur les éventuelles ruptures de modèle et la nature des non-stationnarités du signal.

### Introduction :

L'estimation adaptative des paramètres de sinusoides exponentiellement amorties non stationnaires constitue un problème crucial et difficile. Cette question a déjà été envisagée [1] dans le cadre restrictif de sinusoides se présentant au même instant : l'algorithme qui en résulte combine de façon récursive dans le temps les procédures de Prony : il utilise une prédiction future - sans contrainte - et par conséquent interdit un surdimensionnement du prédicteur. Nous proposons un nouvel algorithme, SINTRACK, voué à la poursuite de raies amorties ou pures, bruitées, dans un contexte étendu au cas de sinusoides ne survenant pas nécessairement au même instant, qui pallie les principales limitations de [1].

Envisagé sous une problématique plus générale, SINTRACK se présente comme un algorithme de **détection-estimation conjointes** qui élargit la classe des signaux traités dans [1]. La procédure d'estimation fait appel à une idée originellement introduite par Kumaresan et Tufts (KT) [2] : l'utilisation d'une prédiction rétrograde qui permet de surdimensionner l'ordre du prédicteur par rapport à celui du modèle ; une contrainte de norme minimale sur le vecteur de prédiction rétrograde sépare, de surcroît, les pôles utiles des pôles parasites par le cercle trigonométrique : les racines du prédicteur liées au bruit sont rejetées à l'intérieur du cercle unité et les racines signal à l'extérieur, d'où l'opportunité d'un surdimensionnement du modèle pour améliorer l'estimation. La méthode Matrix Pencil (MP) [3], plus récente, fait usage de ces propriétés dans une équation de prédiction matricielle et s'avère de fait moins sensible au bruit que l'algorithme KT. C'est pourquoi l'estimation à l'instant  $t$  des paramètres du modèle se fait par application d'une version instantanée de la méthode MP, notée  $IMP(t)$ , qui initialise un prédicteur linéaire autorégressif rétrograde à norme minimale, lequel est alors rafraîchi par un algorithme adaptatif du type LMS. Les pôles liés au signal (à l'extérieur du cercle unité) déduits du prédicteur mis à jour fournissent alors une estimation récursive des paramètres du modèle, d'où la poursuite de non-stationnarités lentes en fréquences et amortissements,

## ABSTRACT

The aim of this paper is to present a new algorithm called SINTRACK and devoted to the tracking of the parameters of noisy damped sinusoids that do not necessarily start at the same time-instant. SINTRACK is a mixed detection-estimation algorithm. The estimation procedure is based on both an instantaneous version of Matrix Pencil method and an updating of a minimum norm overdimensionned backward predictor. The detection procedure relies on the continuous observation of the backward prediction error whose characteristic shape gives information about slight changes in the signal or deep variations like a sudden change of the number of damped sinusoids.

les non-stationnarités en amplitudes étant par ailleurs traitées par introduction d'un facteur d'oubli lors de leur estimation.

La procédure de **détection** repose sur l'observation permanente de la valeur absolue de l'erreur de prédiction rétrograde, laquelle renseigne par son allure caractéristique sur les éventuelles ruptures de modèle (variation du nombre de sinusoides) et la nature des non-stationnarités. Lorsque cette erreur franchit un seuil  $\epsilon$  pendant un certain temps, une alarme est déclenchée; elle donne lieu à une nouvelle estimation par  $IMP(t)$  de l'ordre du modèle et des nouveaux paramètres du signal.

La phase adaptative d'estimation est ainsi réalisée à faible coût calculatoire et la mise à jour de l'ordre du modèle n'a lieu qu'en cas de nécessité, l'erreur de prédiction jouant le rôle d'un véritable signal de surveillance.

Trois versions de SINTRACK peuvent être distinguées selon l'application choisie : soit la poursuite des seules dérivées des paramètres de sinusoides en nombre fixe et démarrant au même instant; soit la détection des ruptures de modèle ; soit enfin conjointement la poursuite de non-stationnarités lentes et la détection des changements de modèle.

Ces trois applications possibles nous conduisent à considérer dans une première partie trois modèles de données complémentaires, le dernier se présentant comme une généralisation des deux premiers. Dans une seconde partie, nous présentons les fondements théoriques de SINTRACK à travers quatre propriétés essentielles. Enfin une dernière partie est consacrée aux trois versions de l'algorithme. Dans la suite, les symboles  $\tau$ ,  $*$ ,  $\dagger$ , et  $\#$  désignent respectivement le transposé, le conjugué, le transconjugué et la pseudo-inverse.

### 1. Modèles des données - Hypothèses.

Trois modèles de données sont envisagés : les deux premiers diffèrent par la classe des signaux à traiter ; le dernier est une combinaison des deux précédents. On suppose disponibles  $T$  échantillons du processus observé  $y[t]$ :

$$y[t] = x[t] + b[t], \quad 0 \leq t \leq T-1 \quad (1)$$



où  $b[t]$  est un bruit blanc gaussien complexe circulaire et  $x[t]$  un processus déterministe composé de  $M$  sinusoides exponentiellement amorties.

#### Modèle M1:

Dans ce premier modèle, on s'intéresse à la dérive des paramètres de  $M$  sinusoides amorties survenant toutes au même instant de sorte que:

$$x[t] = \sum_{k=1}^M \alpha_k [t] z_k [t]^t \quad (M1)$$

où les  $z_k[t] = \rho_k [t] e^{j2\pi\nu_k [t]}$ ,  $1 \leq k \leq M$  représentent les pôles de la séquence discrète  $x[t]$ . Les amplitudes complexes  $\alpha_k$ , les fréquences réduites  $\nu_k$  et les modules  $\rho_k$  dépendent explicitement du temps. Afin d'assurer la stabilité de la séquence causale  $x[t]$ , les  $M$  modules  $\rho_k$  sont des réels supposés à tout instant compris entre 0 et 1.

#### Modèle M2:

On modélise ici  $M$  sinusoides amorties apparaissant à des instants distincts  $n_k$  (éventuellement confondus); leurs paramètres respectifs demeurent constants au cours du temps et:

$$x[t] = \sum_{k=1}^M u[t-n_k] \alpha_k z_k^{t-n_k} \quad (M2)$$

où  $u[t]$  désigne l'échelon de Heavieside. Les instants d'arrivée des sinusoides sont ordonnés selon :

$$0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_M \quad (2)$$

Le comportement de  $x[t]$  pour  $n_M \leq t \leq T-1$  est identique à celui de la séquence

$$x_M[n] = x[n+n_M] u[n] = u[n] \sum_{k=1}^M \alpha_{Mk} z_k^n \quad (M'2)$$

où  $0 \leq n \leq T-n_M-1$  et

$$\alpha_{Mk} = \alpha_k \rho_k^{n_M - n_k} e^{j2\pi\nu_k(n_M - n_k)}, \quad 1 \leq k \leq M.$$

En d'autres termes, nous considérons, en posant  $T_M = T-n_M$ , que  $t = n + n_M$  pour  $0 \leq n \leq T_M-1$ .

#### Modèle M3:

Enfin le dernier modèle résulte d'une combinaison des deux précédents:

$$x[t] = \sum_{k=1}^M u[t-n_k] \alpha_k [t-n_k] z_k [t-n_k]^{t-n_k} \quad (M3)$$

où  $z_k[t-n_k] = \rho_k [t-n_k] e^{j2\pi\nu_k [t-n_k]}$ ,  $1 \leq k \leq M$ . Nous introduisons également la séquence  $x_M[n]$  définie par (M'2) afin de décrire le processus  $x[t]$  pour les instants postérieurs à  $n_M$  en ajoutant la dépendance temporelle des amplitudes instantanées  $\alpha_{Mk}[n]$  et des pôles  $z_k[n]$ . Les sinusoides amorties sont donc décalées dans le temps et leurs paramètres respectifs sujets à de légères fluctuations.

## 2. Fondements théoriques:

L'algorithme SINTRACK repose essentiellement sur quatre propriétés fondamentales. Il exploite en effet les propriétés P1 et P2 relatives à une prédiction rétrograde surdimensionnée par rapport à l'ordre  $M$  du modèle et les propriétés P3 et P4, inhérentes à la version instantanée de la méthode MP. Les démonstrations peuvent être trouvées dans [4]. Bien qu'elles fassent référence à des résultats connus, les propriétés,

telles qu'elles sont formulées, sont inédites, notamment le caractère suffisant de P1 et P2 et la nature instantanée de P3 et P4.

#### Propriété P1:

Le polynôme en  $z$  caractéristique d'une prédiction linéaire rétrograde d'ordre  $L$  (avec  $M < L \ll T_M$ )

$$B_L(z) = \sum_{i=0}^L b[i] z^{-i}, \quad \text{avec } b[0] = 1 \quad (3)$$

dont les coefficients satisfont l'équation aux différences

$$\sum_{i=0}^L b[i] x_M[n+i] = 0, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq T_M-L-1 \quad (4)$$

et minimisent la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{b}' = [1 \ b[1] \ \dots \ b[L]]^T$  possède  $M$  racines égales à  $z_k^{-1}$  (à l'extérieur du cercle unité sous l'hypothèse de stabilité) et  $L-M$  à l'intérieur du cercle trigonométrique.

□

Lorsqu'elle est surdimensionnée, la prédiction linéaire rétrograde présente le double avantage d'une discrimination des pôles du signal de ceux liés au bruit et d'une meilleure estimation. Rendus à ce stade, nous introduisons un couple de vecteur et matrice instantanés relatifs à un horizon de  $N$  échantillons du processus  $x_M[n]$  où  $N$  est supposé satisfaire la condition suivante:

$$M < L < N - M \quad \text{et} \quad N \ll T_M \quad (5)$$

Une telle condition est liée aux rangs de différentes matrices de données. Considérons alors le vecteur instantané:

$$\mathbf{x}[n] = [x_M[n] \ x_M[n+1] \ \dots \ x_M[n+N-L-1]]^T \quad \text{où } 0 \leq n \leq T_M-N+L \quad (6)$$

et la matrice instantanée des observations, résultat de la concaténation:

$$\mathbf{X}[n] = [\mathbf{x}[n] \ \mathbf{x}[n+1] \ \dots \ \mathbf{x}[n+L-1]] \quad \text{pour } 0 \leq n \leq T_M-N+1 \quad (7)$$

En cohérence avec le modèle (M'2),  $\mathbf{X}[n]$  se met sous la forme d'un produit de quatre matrices:

$$\mathbf{X}[n] = \mathbf{E}_{N-L-1} \mathbf{A} \mathbf{Z}^n \mathbf{E}_{L-1}^T \quad \text{avec } 0 \leq n \leq T_M-N+1 \quad (8)$$

où  $\mathbf{A} = \text{DIAG}\{\alpha_{Mk}\}$ ,  $\mathbf{Z} = \text{DIAG}\{z_k\}$ ,  $\mathbf{E}_Q = \text{COL}\{z_k^Q\}$ , et ce pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq M$ , avec:

$$\mathbf{z}_k^Q = [1 \ z_k \ z_k^2 \ \dots \ z_k^Q]^T \quad (9)$$

Il est clair, d'après (5) et (9) que la matrice  $\mathbf{X}[n]$  est de rang  $M$  pour toute valeur de  $n$  telle que  $0 \leq n \leq T_M-N+1$ . On énonce alors:

#### Propriété P2:

Le polynôme  $B_L(z)$  de degré  $L$  (où  $M < L < N - M$ ) dont les coefficients sont les composantes du vecteur  $\mathbf{b}' = [1 \ | \ \mathbf{b}^T]^T$  tel que  $\mathbf{b}$  satisfait le système linéaire surdimensionné :

$$\mathbf{x}[n] = -\mathbf{X}[n+1] \mathbf{b} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq T_M-N, \quad (10)$$

et est calculé par SVD de la matrice  $\mathbf{X}[n+1]$ , possède  $M$  racines égales à  $z_k^{-1}$  (à l'extérieur du cercle unité sous l'hypothèse de stabilité) et  $L-M$  à l'intérieur du cercle trigonométrique.

□

Cette propriété est une conséquence de P1 : d'après (6) et (7), l'équation (10) est satisfaite si (4) l'est à tout instant ; P2 se présente donc comme une extension de P1 au cas instantané. De surcroît, la solution par SVD d'un système linéaire d'équations surdéterminé possède toujours une norme minimale [5].

#### Propriété P3:

Le système généralisé d'équations d'inconnus  $(\zeta, \mathbf{u})$  :

$$(\zeta \mathbf{X}[n+1] - \mathbf{X}[n]) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq T_M-N, \quad (11)$$



a pour solution:

$\zeta = z_k^{-1}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{s}_k$ :  $k$  ième colonne de  $\mathbf{E}_{L-1}^{T*} = \mathbf{E}_{L-1}^* [\mathbf{E}_{L-1}^T \mathbf{E}_{L-1}^*]^{-1}$  avec  $1 \leq k \leq M$

$\zeta = 0$  et  $\mathbf{u}$  appartient au noyau de  $\mathbf{E}_{L-1}^T$ .

□

Cette dernière propriété constitue une extension au cas instantané de celle originellement introduite par Hua et Sarkar dans [3]. Elle est à la base de la version instantanée de la méthode Matrix Pencil.

**Propriété P4:**

Soit la SVD de la matrice instantanée  $\mathbf{X}[n+1]$  de taille  $[N-L, L]$ :

$$\mathbf{X}[n+1] = \mathbf{U}[n+1] \mathbf{K}[n+1] \mathbf{V}[n+1]^\dagger \quad \text{pour } T_M - N \geq n \geq 0, \quad (12)$$

alors les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de taille  $[M, M]$ :

$$\mathbf{G}[n] = \mathbf{K}[n+1]^{-1} \mathbf{U}[n+1]^\dagger \mathbf{X}[n] \mathbf{V}[n+1] \quad \text{pour } T_M - N \geq n \geq 0, \quad (13)$$

sont fournis par les  $M$  couples :  $(z_k^{-1}, \mathbf{V}[n+1]^\dagger \mathbf{s}_k)$ ,  $1 \leq k \leq M$ .

□

### 3. L'algorithme SINTRACK

SINTRACK est un algorithme de détection-estimation conjointes fondé sur les propriétés évoquées dans la partie précédente. Dans le double but de décrire les procédures de détection puis d'estimation et d'exhiber plusieurs types d'applications possibles de l'algorithme, nous présentons dans le développement suivant trois versions de SINTRACK relatives aux trois modèles de données élaborés en première partie. Une formulation générale de l'algorithme est fournie dans la dernière version qui résulte d'une combinaison des deux précédentes.

Version 1:

Cette première version est consacrée à la poursuite adaptative des paramètres de  $M$  sinusoides exponentiellement amorties. Les observations  $y[t]$  données par (1) sont bruitées et en cohérence avec (6) et (7), nous définissons à l'instant courant  $t$  le vecteur de longueur  $N-L$

$$\mathbf{y}[t] = [y[t] \ y[t+1] \ \dots \ y[t+N-L-1]]^T \quad (14)$$

et la matrice instantanée de taille  $[N-L, L]$

$$\mathbf{Y}[t+1] = [y[t+1] \ y[t+2] \ \dots \ y[t+L]], \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T-N \quad (15)$$

constituée des observations sur l'horizon  $[t, t+N-1]$ .

SINTRACK requiert une période d'initialisation prise en charge dès l'instant initial par IMP(0) sur  $N$  échantillons du processus observé. Celle-ci s'effectue par les étapes suivantes:

**Etape 1:** Décomposition en valeurs singulières tronquée de  $\mathbf{Y}[1]$ :

$$\mathbf{Y}[1] = \mathbf{U}_y[1] \mathbf{K}_y[1] \mathbf{V}_y[1]^\dagger \quad (16)$$

Les  $L-M$  valeurs singulières les plus faibles qui constituent la matrice diagonale  $\mathbf{K}_y[1]$  sont forcées à zéro afin d'accroître le rapport signal à bruit des vecteurs propres à gauche et à droite de  $\mathbf{Y}[1]$  (resp. les vecteurs colonnes de  $\mathbf{U}_y[1]$  et  $\mathbf{V}_y[1]$ ).

**Etape 2:** Calcul de la pseudo-inverse tronquée de rang  $M$  de  $\mathbf{Y}[1]$ :

$$\mathbf{Y}^\# [1] = \mathbf{V}_y[1] \mathbf{K}_y[1]^{-1} \mathbf{U}_y[1]^\dagger \quad (17)$$

**Etape 3:** Les valeurs propres de la matrice de taille  $[M, M]$

$$\mathbf{G}_y[0] = \mathbf{K}_y[1]^{-1} \mathbf{U}_y[1]^\dagger \mathbf{Y}[0] \mathbf{V}_y[1] \quad (18)$$

constituent des estimés des  $z_k^{-1}$  pour  $1 \leq k \leq M$ , d'après P3 et P4.

**Etape 4:** Les amplitudes  $\alpha_k$ , composantes du vecteur  $\mathbf{d}_{N-1}$  se déduisent alors des pôles estimés comme solutions au sens des moindres carrés du système de Vandermonde

$$\mathbf{y}_{N-1} - \mathbf{E}_{N-1} \mathbf{d}_{N-1} = \mathbf{0} \quad (19)$$

où  $\mathbf{y}_{N-1} = [y[0] \ y[1] \ \dots \ y[N-1]]^T$

$$\text{soit } \hat{\mathbf{d}}_{N-1} = [\mathbf{E}_{N-1}^\dagger \mathbf{E}_{N-1}]^{-1} \mathbf{E}_{N-1}^\dagger \mathbf{y}_{N-1} \quad (20)$$

**Etape 5:** Initialisation d'un vecteur de prédiction linéaire rétrograde d'ordre  $L$  avec  $M < L < N-M$ .

$$\mathbf{b}[0] = -\mathbf{Y}^\# [1] \mathbf{y}[0] \quad (21)$$

Il est supposé que les paramètres des sinusoides demeurent constants au cours de cette période d'initialisation. La poursuite de leurs dérivées sur les  $T-N$  derniers échantillons de  $y[t]$  est réalisée par:

**Etape 6:** La mise à jour du prédicteur rétrograde par un algorithme adaptatif du type LMS à pas constant  $\mu$ , choisi pour sa faible complexité calculatoire:

$$\mathbf{b}[t] = \mathbf{b}[t-1] + \mu \begin{bmatrix} y[t] \\ y[t+1] \\ \vdots \\ y[t-1+L] \end{bmatrix} \mathbf{e}[t-1] \quad (22)$$

$$\mathbf{e}[t-1] = y[t-1] - \sum_{k=1}^L b[t-1, k] y[t-1+k] \quad (23)$$

associée à :

**Etape 7:** l'extraction adaptative des racines du polynôme caractéristique  $B_L(z)$  par l'algorithme itératif de Birge-Vieta initialisé sur les racines estimées à l'instant  $t-1$ . Cette technique évite la recherche des  $L$  zéros en se limitant aux  $M$  racines signal.

Réalisée à faible coût calculatoire, l'estimation récursive des pôles du signal à l'obtention de chaque nouvel échantillon débouche sur la poursuite de non-stationnarités lentes en fréquences (Fig.1).

**Etape 8:** L'introduction d'un facteur d'oubli  $\lambda$  dans la résolution du système de Vandermonde:

$$\hat{\mathbf{d}}_t = [\mathbf{E}_t^\dagger \mathbf{D}_t \mathbf{E}_t]^{-1} \mathbf{E}_t^\dagger \mathbf{D}_t^{1/2} \mathbf{y}_t \quad (24)$$

où  $\mathbf{D}_t = \text{DIAG}\{\lambda^{t-i}\}$ ,  $1 \leq i \leq t$  permet de poursuivre les non-stationnarités en amplitudes. Cependant, la dimension des quantités mises en jeu augmente à chaque instant et la charge calculatoire croissante qui en résulte est inacceptable. L'utilisation du lemme d'inversion matricielle résoud ce problème en propageant l'opérateur de projection selon la récurrence temporelle:

$$\mathbf{R}_t^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{R}_{t-1}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{t-1}^{-1} \mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T \mathbf{R}_{t-1}^{-1}}{\lambda + \mathbf{v}_t^T \mathbf{R}_{t-1}^{-1} \mathbf{v}_t} \right] \quad (25)$$

$$\mathbf{S}_t = \left[ \lambda^{1/2} \mathbf{S}_{t-1} \mid \mathbf{v}_t^* \right] \quad (26)$$

avec  $\mathbf{R}_t^{-1} = [\mathbf{E}_t^\dagger \mathbf{D}_t \mathbf{E}_t]^{-1}$ ;  $\mathbf{S}_t = \mathbf{E}_t^\dagger \mathbf{D}_t^{1/2}$ ;  $\mathbf{v}_t = [z_1^{t-1} \ z_2^{t-1} \ \dots \ z_M^{t-1}]^T$ .

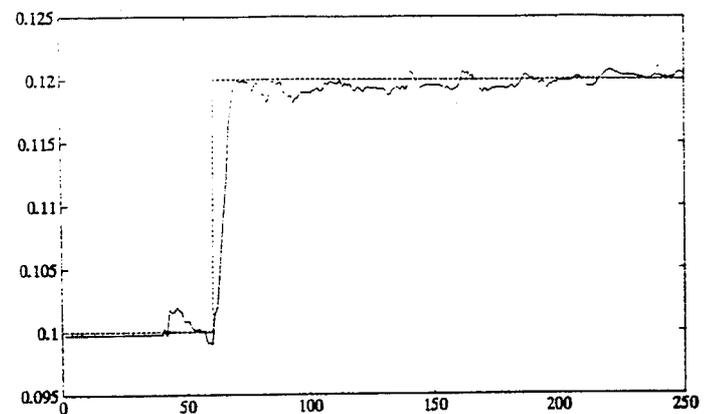


Fig. 1: poursuite d'un saut de fréquence sur une sinusoïde amortie.



### Version 2:

Cette seconde version fait référence au modèle M2 et SINTRACK est chargé d'une part, de détecter les ruptures de modèle (les brusques variations du nombre de sinusoides amorties) et d'autre part, d'estimer les nouveaux paramètres. Les exponentielles amorties surviennent à des instants distincts et pour des raisons de clarté, nous introduisons le modèle dual valable sur un horizon temporel  $\Delta_\tau$  de longueur  $N$  et défini par:

$$\Psi_\tau[t] = u[t-\tau] \sum_{k=1}^{M_\tau} \alpha_{k,\tau} z_{k,\tau}^{t-\tau}; \quad t \in \Delta_\tau = [\tau, \tau+N-1] \quad (27)$$

où :

$$\Theta_\tau = \{ M_\tau \alpha_{k,\tau}, z_{k,\tau}; 1 \leq k \leq M_\tau \}$$

constitue l'ensemble des paramètres à identifier sur l'horizon  $\Delta_\tau$ ; en tenant compte de (2), si  $n_{k_0} \leq \tau < n_{k_0+1}$ , ( $1 \leq k_0 \leq M$ ) alors :

$$M_\tau = k_0 \quad (28)$$

$$z_{k,\tau} = z_k, \quad 1 \leq k \leq k_0 \quad (29)$$

$$\alpha_{k,\tau} = \alpha_k z_k^{\tau-n_k}, \quad 1 \leq k \leq k_0 \quad (30)$$

L'estimation à l'instant  $\tau$  des éléments de  $\Theta_{n_k}$ , pour  $1 \leq k \leq M$ , est réalisée par une version instantanée de MP (propriétés P3 et P4), IMP[ $\tau$ ] ( $t \in \Delta_\tau$ ), et la détection des changements de modèle consiste en la localisation temporelle des  $M$  domaines  $\Delta_{n_k}$ ,  $1 \leq k \leq M$ . La procédure de détection repose sur l'observation permanente de l'erreur de prédiction rétrograde initialisée par IMP[ $\tau$ ] et générée par (22),(23) dans lesquelles les quantités  $\mathbf{b}[\tau+n]$ ,  $\mathbf{e}[\tau+n-1]$ ,  $\mathbf{y}[\tau+n-1+k]$  ( $0 \leq k \leq M$ ) sont respectivement substituées à  $\mathbf{b}[t]$ ,  $\mathbf{e}[t-1]$  et  $\mathbf{y}[t-1+k]$  ( $0 \leq k \leq M$ ). L'indice temporel  $n$  décrit toute la période de détection:  $1 \leq n \leq n_\tau$ . Lorsque la valeur absolue de l'erreur  $\mathbf{e}[\tau+n-1]$  franchit un seuil  $\epsilon$  sur une durée minimale de  $N$  échantillons, une alarme est déclenchée qui donne lieu à une nouvelle estimation par IMP[ $\tau$ ] de l'ordre du modèle et des nouveaux paramètres. Ces paramètres étant supposés constants (M2), les pôles du signal ne sont pas ré-évalués dans la phase de détection et la version 2 de SINTRACK se résume aux étapes 1 à 6 en remplaçant  $\mathbf{Y}[1]$ ,  $\mathbf{U}_y[1]$ ,  $\mathbf{K}_y[1]$ ,  $\mathbf{V}_y[1]$ ,  $\mathbf{G}_y[0]$ ,  $\mathbf{y}_{N-1}$ ,  $\mathbf{E}_{N-1}$ ,  $\mathbf{d}_{N-1}$  respectivement par  $\mathbf{Y}[\tau+1]$ ,  $\mathbf{U}_y[\tau+1]$ ,  $\mathbf{K}_y[\tau+1]$ ,  $\mathbf{V}_y[\tau+1]$ ,  $\mathbf{G}_y[\tau]$ ,  $\mathbf{y}_\tau$ ,  $\mathbf{E}_{N-1,\tau}$ ,  $\mathbf{d}_\tau$  (l'indice  $\tau$  signifiant que  $t \in \Delta_\tau$ ). Les  $M_\tau$  valeurs propres de  $\mathbf{G}_y[\tau]$  issus de IMP[ $\tau$ ] et les  $M_\tau$  amplitudes  $\alpha_{k,\tau}$  constituent ainsi les estimées des paramètres du modèle mis à jour.

### Version 3:

Cette dernière version de l'algorithme résulte d'une combinaison des versions 1 et 2 : en toute cohérence avec le modèle M3, les paramètres des sinusoides décalées dans le temps sont ici soumis à de légères fluctuations et doivent donc être estimés à chaque instant. Il suffit par conséquent de compléter la version 2 en insérant dans la phase de détection l'estimation adaptative des pôles du signal  $z_{k,\tau}[t]$  et des amplitudes  $\alpha_{k,\tau}[t]$  réalisée par les étapes 7 et 8 de la version 1.

Il convient cependant de noter que IMP[ $\tau$ ] nécessite un horizon de  $N$  échantillons sur lequel les éléments de  $\Theta_\tau$  sont supposés stationnaires. En conséquence si deux instants  $n_k$  et  $n_{k+1}$  d'arrivée de deux sinusoides différentes sont séparés d'une durée inférieure à  $N$  échantillons, les performances de l'algorithme seront sévèrement dégradées jusqu'à la prochaine ré-initialisation. L'acuité de l'algorithme, définie comme son aptitude à détecter les ruptures de modèles, est donc égale à  $N$  et constitue la principale limitation de SINTRACK.

Cette version 3 met en évidence la différence de comportement de l'erreur de prédiction rétrograde selon le type de non-stationnarité rencontrée (Fig.2 et 3). Son allure caractéristique permet de fixer a posteriori la valeur du seuil  $\epsilon$ .

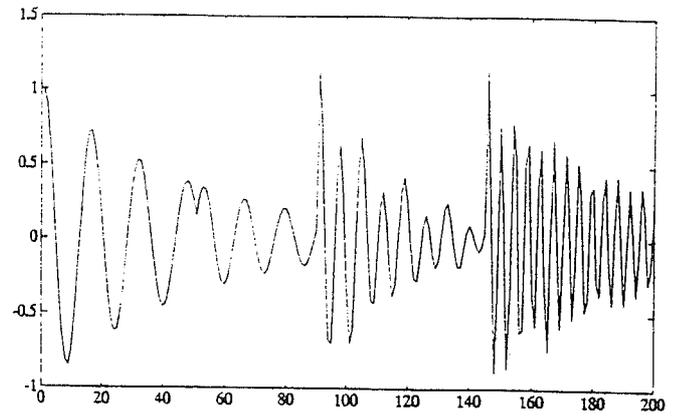


Fig.2 : allure temporelle du signal à analyser répondant au modèle M3: une seule sinusoides amortie est présente à l'instant initial et deux autres apparaissent aux instants respectifs 90 et 145. L'échantillon 50 est le siège d'un saut de fréquence.

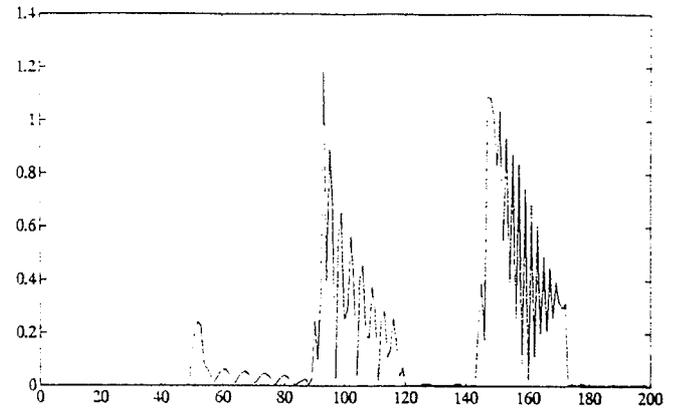


Fig.3 : valeur absolue de l'erreur de prédiction rétrograde associée à la Fig.2 : son allure permet de discriminer les non-stationnarités lentes des ruptures de modèle.

### Conclusion :

L'estimation adaptative des paramètres est réalisée à faible coût calculatoire et la mise à jour de l'ordre du modèle par IMP[ $\tau$ ] n'a lieu qu'en cas de nécessité, l'erreur de prédiction rétrograde jouant le rôle d'un véritable signal de surveillance. La poursuite des paramètres est réglée par les deux facteurs d'ajustements  $\mu$  et  $\lambda$ . L'algorithme présente le triple avantage d'un traitement en ligne des données, d'une rapidité de convergence accrue d'un facteur dix par rapport à [1] et d'un bon compromis entre robustesse, qualité de poursuite et complexité calculatoire. En outre, dans le cas particulier de sinusoides pures, l'algorithme peut utiliser conjointement prédictions future et rétrograde.

### Références:

- [1] C.Lambert-Nebout, "Etude des moyens d'analyse du signal basse fréquence d'un récepteur d'alignement de piste", Thèse, pp.76-86, Nov.1989.
- [2] R.Kumaresan and D.Tufts, "Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling.", *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, vol. ASSP-30, pp.833-840, Dec 1982.
- [3] Y.Hua and T.K.Sarkar, "Matrix Pencil method and its performance", in *Proc. ICASSP-88*, Apr. 1988.
- [4] P.Duvaut, F.Dublanchet, P.Lemoine, "SINTRACK: an algorithm for tracking exponentially damped/undamped sinusoids in noise", *Signal Processing*, à paraître.
- [5] P.Duvaut, *Traitement du Signal : Concepts & Applications*, Ch.7, HERMES, Paris, 1990.

P.Lemoine remercie EUROP-TELECOM de lui avoir permis d'assister au congrès GRETSI.