

UNE NOUVELLE METHODE POUR LA DETECTION DE SINGULARITES UTILISANT LA TRANSFORMEE EN ONDELETTE

R. Alcántara † et R. Gutiérrez †

† DEPMI/UNAM, Ciudad Universitaria, México, D.F. C.P. 04510, Mexique
e-mail : rogelio@depfi1.depfi.unam.mx

RESUME

Une alternative récent à la méthode par transformée de Fourier à temps court pour la détection de singularités noyées dans de signaux bruités est la transformée en ondelette (WT). On propose dans cet article une nouvelle méthode de détection qui se fonde sur une version modifiée du critère du maximum de vraisemblance et la liaison entre le filtrage à couplage et la transformée en ondelette. A la valeur maximum de chaque échelle de résolution de la WT du signal, on applique une version modifiée du critère du maximum de vraisemblance à posteriori qui est fonction de la différence entre les coefficients de la transformée en ondelette et la valeur estimée de l'énergie du signal. L'algorithme détecte l'instant du temps et la bande de fréquences de la singularité. Les simulations faites sur de signaux synthétiques et de signaux EEG contenant de singularités ont montrées la bonne performance de la méthode.

ABSTRACT

The wavelet transform represents a new alternative to the short-time Fourier transform in order to solve the detection problem of singularities embedded in noisy signals. In this contribution we propose a new detection method based on a modified version of the maximum likelihood criterion and the relation between the matched filter and the wavelet transform. We have replaced the maximum likelihood a posteriori criterion with a function depending on the difference between each wavelet transform coefficient and the estimation of the signal energy. This modified criterion has been applied to the maximum value of each resolution scale given by the wavelet transform. Thus, the algorithm detects the time location and the frequency band of the singularity. The good performance of the algorithm using synthetic signals and real spikes embedded in EEG showed very good results.

1 INTRODUCTION

Le problème de la détection de singularités noyées dans un signal aléatoire a été largement étudié depuis longtemps. Une alternative aux méthodes classiques pour le résoudre est l'utilisation de la transformée en ondelette, WT, [MAL92], [TUT88] et [FRI91]. Lorsque nous utilisons la détection binaire, on doit décider laquelle de deux hypothèses suivantes est vraie [WHA91]: $H_0 : r(t) = n(t)$. $H_1 : r(t) = s(t) + n(t)$, où $s(t)$ est une réalisation d'un processus stochastique et $n(t)$ est un bruit. Notre approche de détection prends automatiquement une décision parmi toutes les deux hypothèses ci-dessus après avoir modifiée le critère du maximum de probabilité à posteriori (MPPC) par une version qui est fonction de la transformée en ondelette.

Dans la première partie nous rappelons comment la WT peut être interprétée comme un filtre passe bande. Dans la deuxième partie on présente le nouveaux algorithme pour la détection de signaux et finalement dans la dernière partie nous présentons les résultats et les conclusions obtenues de l'évaluation de l'algorithme avec de signaux synthétiques et de signaux EEG.

2 LA WT COMME UN FILTRE

Il est bien connu que la représentation de signaux dans de différents espaces nous donne la possibilité d'interpréter des propriétés du signal qui ne sont pas facilement à voir directement du space original. Parmi plusieurs représentations, celles obtenues avec la FT et la SFT [ALL77] sont des plus simples. Cependant, quelquefois elles ne sont pas bien adaptées pour l'étude de signaux qui ne sont pas stationnaires. Une possibilité alternative d'expansion est obtenue de la façon suivante [MAL89]:

$$f(x) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \langle \psi_s, f(x) \rangle (\psi_s) ds du \quad (1)$$

où ψ_s et donné par

$$\psi_s = s^{1/2} \psi(s(x-u)) \quad (2)$$

A l'ensemble des coefficients



$$W_f(s, u) = \langle \psi_s, f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_s dx \quad (3)$$

on l'appelle la transformée en ondelette (Wavelet Transform, WT) du signal $f(x)$ et à la fonction $\psi(x)$ l'ondelette d'analyse. Si $\Psi(w)$ est la transformée de Fourier de $\psi(x)$, alors la condition d'admissibilité se doit satisfaire [MAL89]

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{w} dw < \infty \quad (4)$$

La représentation dans l'échelle du temps précédent est bien adaptée pour la détection d'irrégularités puisque les fonctions base dans l'expansion peuvent être, due au paramètre s , interprétées comme de versions contractées et étendues de l'ondelette maître $\psi(x)$ à support compact [DAU90].

Plusieurs propriétés de la transformée en ondelette peuvent être trouvées dans la littérature, nous rappellerons ici seulement la propriété suivante. Si on écrit la transformée en ondelette comme le produit de convolution suivant:

$$W_f(s, u) = [f(x) * s^{1/2}\psi(-sx)](u) \quad (5)$$

alors la WT peut être interprété comme l'action d'un filtre passe-bande agissant sur le signal [MAL89]. La réponse impulsionnelle du filtre sera la version pondérée de l'ondelette maître suivante:

$$h(x) = s^{1/2}\psi(-sx) \quad (6)$$

Dans cet article on utilisera l'ondelette appelé dans la littérature "mexican hat", qui est définie par [ARG90]

$$\psi(x) = (1 - x^2)\exp(-x^2/2) \quad (7)$$

et la transformée de Fourier correspondant est donnée par

$$\Psi(w) = w^2 \exp(-w^2/2) \quad (8)$$

Cette ondelette a été bien étudié et elle a la propriété d'être une fonction réelle. Leurs caractéristiques du space-phase sont bien adaptées au problème que nous voulons résoudre, néanmoins il existent beaucoup d'autres ondelettes avec d'expressions non-analytiques qui peuvent être aussi utilisées. On doit remarquer que celles-là peuvent être obtenues à partir des filtres miroir en quadrature [DAU88], [RIO91].

3 NOUVELLE METHODE DE DETECTION UTILISANT LA WT

Bien que plusieurs critères pour la détection de signaux ont été développés à travers de l'histoire de la théorie du signal, le plus largement utilisé a été celui du maximum

de probabilité à posteriori. Le critère que nous proposons peut être vu comme une version modifiée du MPPC.

Si nous dénotons les fonctions de densité de probabilité conditionnelles $P(r|H_0)$ et $P(r|H_1)$ comment $P_0(r)$ et $P_1(r)$ respectivement, nous pouvons écrire le MPPC de la façon suivante [WHA91]:

$$\frac{P_0(r)}{P_1(r)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} \gamma \quad (9)$$

où γ est un seuil qui depends des probabilités à priori des hypothèses H_0 et H_1 . Si nous supposons que $n(t)$ est un bruit blanc gaussien à moyen nulle et de variance σ_n^2 , alors pour chaque cas H_0 o H_1 , il est bien connu que

$$\sigma_r^2 = E\{(r(t) - E\{r(t)\})^2\} = \sigma_n^2 \quad (10)$$

où $E\{.\}$ est l'opérateur esperance mathématique. Ainsi, les fonctions de densité prennent les formes suivantes:

$$P_1(r) = k \exp\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \int [r(t) - s(t)]^2 dt\} \quad (11)$$

et

$$P_0(r) = k \exp\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \int [r(t)]^2 dt\} \quad (12)$$

On remplace les expressions (11) et (12) dans l'équation (9) et calculant le logarithme naturel du critère de détection, on obtient

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \int r(t)s(t)dt - \frac{1}{2\sigma_n^2} \int s^2(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda \quad (13)$$

en étant λ le logarithme naturel de γ .

Soit la expression suivante

$$P = \int s^2(t)dt. \quad (14)$$

l'énergie du signal qu'on veut détecter. La première integral dans l'équation (13) peut être interprétée comme l'action d'un filtre agissant sur le signal reçu $r(t)$ dont la reponse impulsionnelle est donnée par $h(t) = s(T - t)$, autrement dit,

$$I = \int r(t)s(t)dt = h(t) * r(t) \quad (15)$$

Cette expression est bien connue dans la littérature par le nom du filtre de North o filtre à couplage et maximise le rapport signal à bruit de la sortie [PAP85], [PRO89]. En remplaçant les équations (14) et (15) dans le critère de détection donnée par l'expression (13), nous pouvons l'écrire de la façon suivante

$$\frac{1}{\sigma_n^2} [2I - P]^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta^2 \sigma_n^2 ; \eta^2 = 4\lambda^2 \quad (16)$$



Malheureusement, ce critère n'est pas très utile puisque nous ne connaissons pas le signal $s(t)$, néanmoins, on peut se rappeler que le signal qu'on cherche est un signal transitoire et donc nous pouvons établir deux hypothèses fondamentales: 1) si H_o est vraie, alors, il existe un rapport signal à bruit relativement grand entre $s(t)$ et $n(t)$ et donc on peut supposer que l'énergie du signal $r(t)$ est principalement due à celle du signal $s(t)$; 2) la réponse impulsionnelle du filtre à couplage peut être approximée par la réponse impulsionnelle du filtre en ondelette. Ceci peut être constaté en regardant les expressions (5), (6) et (15).

Pour la première hypothèse nous allons remplacer dans l'équation (16) P par \hat{P} , c'est à dire, un estimateur de l'énergie du signal $r(t)$. De la même façon, nous remplaçons dans l'équation (10) σ_n^2 par $\hat{\sigma}_n^2$, un estimateur du signal reçu. Les estimateurs peuvent être obtenus hors ligne à travers d'une séquence preuve du signal ayant la singularité cherchée. Pour la seconde hypothèse nous allons remplacer I par $W_r(s, u)$. Avec les suppositions précédentes le critère de détection devient

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_n^2} [W_r(s, u) - \hat{P}]^2 \begin{matrix} >_{H_1} \\ <_{H_o} \end{matrix} \eta^2 \hat{\sigma}_n^2 \quad (17)$$

Dès l'équation (17) nous pouvons observer que le critère de détection est une version modifiée du filtre à couplage optimum et cette approximation sera plus proche de la valeur réelle tant l'analyse par ondelette soit plus proche du signal inconnu $s(t)$. Cependant, pour un temps fixe $u = u_o$ il existent beaucoup de versions contractées et étendues de $\psi(t)$ qui varient avec le paramètre s . Si on choisit un rang de valeurs de s suffisamment large, nous aurons beaucoup plus de possibilités de trouver une version dilatée de $\psi(t)$ qui ressemble plus précisément au signal $s(t)$, et à la fois en approximant notre filtre à celui optimal, et par conséquence, amenant à la solution du problème de détection. On doit remarquer que l'approche de détection proposée, en plus du temps d'arrivée, donne aussi la bande de fréquences où se trouve le signal détecté, ceci est vraie puisque on connaît la valeur du paramètre s pour laquelle la détection a été faite.

La méthode de détection proposée ci-dessus peut être résumé par l'algorithme décrit par les pas suivants:

- a) sélectionner une séquence du signal dans lequel il est supposé qu'il existe le signal à détecter.
- b) calculer la transformée en ondelette de la séquence pour plusieurs valeurs de s .
- c) évaluer les estimateurs de P et σ_n^2 .
- d) pour chaque échantillon du signal, choisir le maximum de $W_r(s, u_o)$ pour les différentes valeurs de s .

- e) appliquer le critère donné par l'expression (17).

4 EVALUATION DE L'ALGORITHME DE DETECTION

L'algorithme proposé a été testé avec de simulations sur ordinateur. On a programé la transformée en ondelette discrète qui s'obtient dès l'équation (3) en faisant l'échantillonnage non-uniform, afin de prendre en compte le space-phase suivant

$$s \text{ --- } > \alpha^j, u \text{ --- } > n\beta\alpha^{-j}. \quad (18)$$

Alors, la transformée en ondelette discrète (DWT) peut être calculée avec l'équation [MAL89]

$$W_d(\alpha^j, n\beta\alpha^{-j}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \alpha^{j/2} \psi(\alpha^{j/2} (x - n\beta\alpha^{-j})) dx \quad (19)$$

L'algorithme a été évalué avec deux signaux différents. La première séquence est très simple puisque consiste du signal montré sur la figure (1) noyé dans un bruit blanc gaussien. Le signal résultant est montré sur la figure (2) et simule un potentiel visuel de EEG ajouté à une activité de fond [SMI74]. Le signal a été traité avec l'algorithme proposé en utilisant, comme nous avons déjà dit, l'ondelette "mexican hat" et avec les paramètres $\alpha = \beta = 0.5$ et $j = 0, 1, 2, \text{ et } 3$. L'algorithme a trouvé la singularité à l'échantillon 122 qui est, comme on attendait, le point auquel se trouve la valeur maximum du signal donné dans la figure (1). La deuxième simulation a été un peu plus compliquée puisque nous avons utilisé de signaux réels de EEG contenant un potentiel visuel comme singularité (Evoked Potential), ce signal est montré dans la figure (4) tandis que la singularité détectée est montrée dans la figure (3). Les paramètres de l'algorithme ont été les mêmes que ceux utilisés pour les simulations avec de signaux synthétiques. Il faut remarquer que l'algorithme proposé a l'avantage de donner la bande de fréquences où se trouve la singularité à détecter. Dans ce dernier cas, l'algorithme a montré un contenu fréquentiel du signal principalement autour de la fréquence normalisée de 0.058, valeur qui est en accord avec le spectre en fréquence de la singularité.

5 CONCLUSIONS

Nous avons proposé une nouvelle méthode pour la détection de singularités noyées dans un bruit qui est basée sur l'utilisation de la transformée en ondelette et une version modifiée du critère du maximum de vraisemblance. Les simulations faites avec de signaux réelles et synthétiques ont montré une très bonne performance du



nouvel algorithme pour détecter de singularités avec exactitude. Cependant, il faudra ajouter au schéma proposé une technique pour reconstruire l'allure de la singularité trouvée et essayer de réduire la complexité des calculs pour utiliser l'algorithme dans des applications en temps réel.

References

- [ALL77] ALLEN J. B. and RABINER L. R. A unified approach to short-time fourier analysis and synthesis. *Proc. IEEE*, 65(11):1558-1564, 1977.
- [ARG90] ARGOUËL et al. Wavelet analysis of the self-similarity of diffusion-limited aggregates and electrodeposition clusters. *Physical Review A*, 41(10), 1990.
- [DAU88] DAUBECHIES I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 41, 1988.
- [DAU90] DAUBECHIES I. The wavelet transform, time frequency localization, and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5), 1990.
- [FRI91] FRISCH M. and MESSER H. Detection of a transient signal of unknown scaling and arrival time using the discrete wavelet transform. In *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, volume 2, pages 1313-1316, Toronto, Canada, May 1991.
- [MAL89] MALLAT S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674-693, July 1989.
- [MAL92] MALLAT S. and HWANG W. L. Singularity Detection and Processing with Wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):617-643, March 1992.
- [PAP85] PAPOULIS A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Singapore, 1985.
- [PRO89] PROAKIS J. G. *Digital Communications*. McGraw-Hill, U.S.A., 1989.
- [RIO91] RIOUL O. and VETTERLI M. Wavelets and signal processing. *IEEE SP Magazine*, pages 14-38, October 1991.
- [SMI74] SMITH J. R. Automatic analysis and detection of eeg spikes. *IEEE Transactions Biomedical Engineering*, 21(1), January 1974.
- [TUT88] TUTEUR F. B. Wavelet transformation in signal detection. In *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, volume 3, pages 1435-1438, New York, U.S.A., April 1988.
- [WHA91] WHALEN A.D. *Detection of Signals in Noise*. Academic Press, San Diego, Cal., 1991.

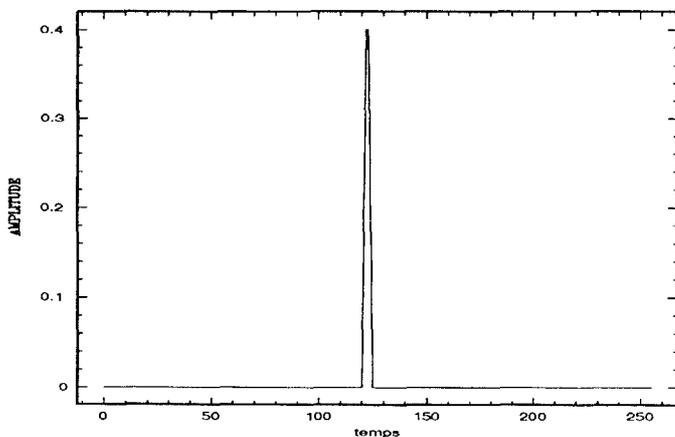


Figure 1: Singularité synthétique détectée avec la méthode.

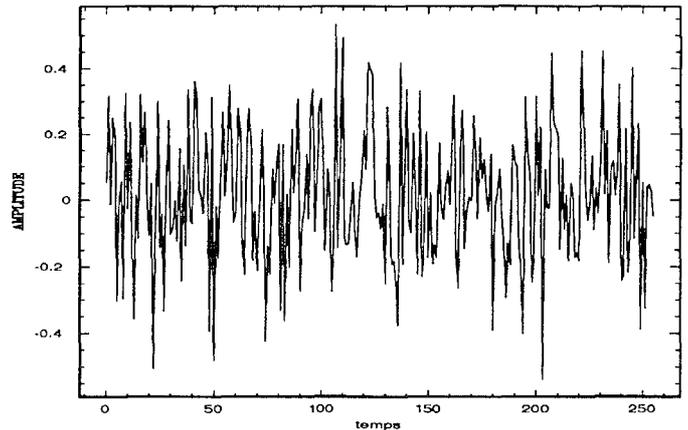


Figure 2: Signal synthétique: singularité plus du bruit.

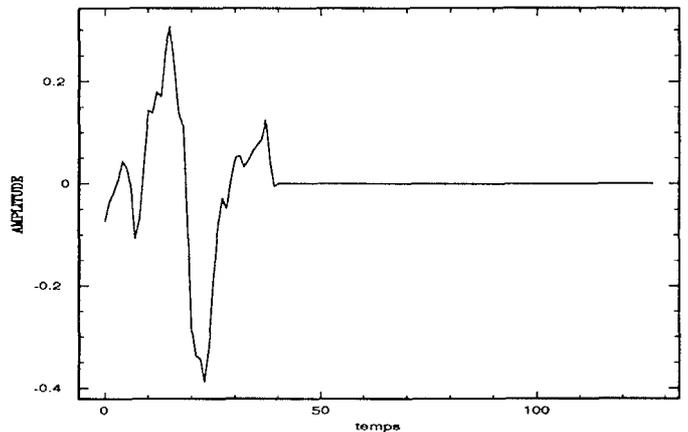


Figure 3: Singularité réelle détectée avec la méthode.

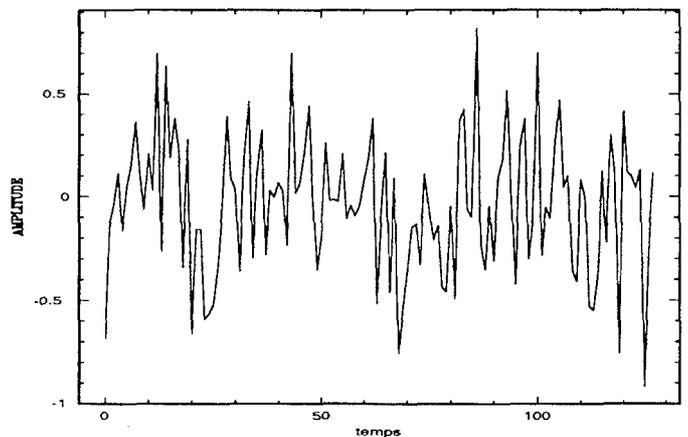


Figure 4: Signal réel: EEG plus singularité.