

**IDENTIFICATION DE MODELES AR, MA ET ARMA A L'AIDE DE STATISTIQUES D'ORDRE SUPERIEUR: COMPARAISON DE METHODES ET ANALYSE DE PERFORMANCE**

**G.Favier, D.Dembélé, J.L.Peyre**  
**Laboratoire I3S - CNRS / UNSA**  
 Bât SPI n°4 - 250, rue. A. Einstein - 06560 Valbonne  
 Email: favier@mimosa.unice.fr

**RESUME** Différentes méthodes basées sur les Statistiques d'Ordre Supérieur (SOS) ont été proposées récemment pour l'identification de modèles AR, MA et ARMA. Cet article a pour objet de présenter de manière unifiée les principales méthodes, à l'aide de tableaux indiquant les relations de base sur lesquelles s'appuient ces méthodes, l'information SOS utilisée, les paramètres estimés ainsi que la dimension du système d'équations résolu par chacune de ces méthodes. Une analyse des performances des différents algorithmes considérés a été réalisée à partir d'exemples simulés.

**1. INTRODUCTION**

Au cours des cinq dernières années, les statistiques d'ordre supérieur (SOS) à deux, appelées cumulants dans le domaine temporel et polyspectre dans le domaine fréquentiel, ont joué un rôle croissant dans les applications de Traitement du Signal, et plus particulièrement pour l'identification de systèmes non linéaires et de systèmes linéaires à déphasage non minimal [7]-[9], [13], [17], [21]-[23] et/ou non causaux [10]-[11], le traitement d'images (classification de textures, reconstruction et restauration d'images), la mesure de retards, la séparation de sources, le traitement de signaux radar et sonar, ...

Contrairement aux statistiques d'ordre deux (fonctions de corrélation) qui ne fournissent une description statistique complète que pour des processus linéaires Gaussiens, les SOS permettent d'analyser tout aussi bien des processus linéaires non Gaussiens que des processus non linéaires Gaussiens. Dans le cadre de l'identification de modèles paramétriques, les cumulants d'ordre supérieur présentent les avantages suivants:

- Ils sont insensibles à un bruit de mesure additif Gaussien.
- Ils renferment une information relative à la phase, du fait qu'ils ne sont pas complètement symétriques, contrairement à la fonction d'autocorrélation.

Le présent article est consacré au problème de l'estimation des paramètres de modèles AR, MA et ARMA, dont l'entrée est supposée être non mesurable. De nombreuses méthodes d'estimation basées sur l'utilisation de cumulants d'ordre trois ou quatre ont été proposées dans la littérature pour ce type de modèle. Elles se différencient essentiellement par le type d'équations algébriques (linéaires ou non linéaires) à résoudre d'une part, et l'information statistique (tranches à une ou plusieurs dimensions des cumulants d'ordre trois ou quatre) utilisée d'autre part. Dans le cas des méthodes linéaires, du fait de la non unicité de la solution, un choix judicieux des SOS doit être effectué pour assurer l'identifiabilité du système.

Le plan de l'article est le suivant. Après avoir rappelé brièvement les équations et les hypothèses relatives aux modèles considérés (§2), nous indiquons les relations fondamentales sur lesquelles reposent les méthodes d'estimation linéaires, basées sur l'utilisation de cumulants d'ordre trois ou quatre (§3). Puis, ces méthodes sont présentées de manière unifiée, à l'aide de tableaux renfermant les relations de base et l'information statistique utilisées, les paramètres effectivement calculés et la dimension du système d'équations à résoudre (§4). Les méthodes d'estimation non linéaires sont ensuite brièvement passées en revue (§5).

**ABSTRACT** During recent years, various high-order statistics (HOS) based methods have been proposed for the identification of AR, MA and ARMA models. In this paper, we give an unified presentation of the main methods, by means of tables that indicate the basic relations on which the algorithms are based, the used HOS information, the effective estimated parameters and the dimension of the linear equations set solved by each method. A performance analysis of various algorithms is performed on simulated examples.

**2. MODELES ET HYPOTHESES**

On considère le processus représenté à l'aide de la figure 1:

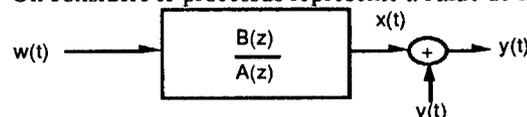


Fig.1: Processus AR, MA et ARMA

L'entrée  $w(t)$  est une séquence indépendante identiquement distribuée (i.i.d), stationnaire, centrée, de distribution non Gaussienne inconnue, et supposée non mesurable. La sortie  $x(t)$  est perturbée par un bruit additif  $v(t)$ , blanc ou coloré, de distribution Gaussienne et de fonction d'auto-corrélation inconnue, indépendant de la séquence d'entrée. Le problème consiste à estimer les paramètres  $a(i)$  et  $b(i)$  du modèle ARMA(p,q), à partir de la seule mesure de sortie  $y(t)$ , les ordres  $p$  et  $q$  étant supposés connus:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^p a(i)x(t-i) = \sum_{i=0}^q b(i)w(t-i) & a(0) = b(0) = 1 \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases} \quad (1)$$

Les modèles AR(p) et MA(q) sont obtenus en faisant respectivement:  $b(i) = 0, i \in [1, q]$ , et  $a(j) = 0, j \in [1, p]$ .

**3. RELATIONS FONDAMENTALES**

Nous décrivons ci-après les relations fondamentales sur lesquelles reposent les algorithmes d'identification AR, MA et ARMA qui sont présentés de manière unifiée dans les tableaux I et II. Une présentation plus détaillée de ces relations peut être trouvée dans [4].

Brillinger et Rosenblatt [2] ont montré que le cumulants d'ordre  $m$  du signal de sortie pouvait s'exprimer en fonction des coefficients de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système:

$$C_{mx}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}) = \gamma_{mw} \sum_{k=s_1}^{\infty} h(k)h(k+\tau_1) \dots h(k+\tau_{m-1}) \quad (2)$$

où:  $\gamma_{mw} = C_{mx}(0, \dots, 0)$  et  $s_1 = \max(0, -\tau_1, \dots, -\tau_{m-1})$ .

Dans le domaine fréquentiel, cette relation devient:

$$S_{mx}(w_1, \dots, w_{m-1}) = \gamma_{mw} H(w_1) \dots H(w_{m-1}) H\left(-\sum_{i=1}^{m-1} w_i\right) \quad (3)$$

En utilisant cette relation pour les cumulants d'ordres 2 et 3, nous déduisons:



$$\frac{S_{3x}(w_1, w_2)}{S_{2x}(w_1 + w_2)} = \frac{\gamma_{3w} H(w_1)H(w_2)}{\gamma_{2w} H(w_1 + w_2)} \quad (4)$$

et en appliquant la Transformée de Fourier inverse, nous obtenons:

$$\sum_{i=0}^{\infty} h(i)C_{3y}(\tau_1 - i, \tau_2 - i) = \varepsilon \sum_{i=s_2}^{\infty} h(i)h(\tau_2 - \tau_1 + i)[C_{2y}(\tau_1 - i) - \gamma_{2v}\delta(\tau_1 - i)] \quad (5)$$

où:  $s_2 = \max(0, \tau_1 - \tau_2)$  et  $\varepsilon = \gamma_{3w}/\gamma_{2w}$ . La relation (5) est utilisée par Alshebeili & Venetsanopoulos [1] pour estimer les coefficients  $b(i)$  d'un modèle MA(q). Les méthodes de Giannakis, Mendel [7], [9], [13], et Tugnait [22], [23] sont des cas particuliers de [1], comme on peut le vérifier à l'aide du tableau II. Par un raisonnement identique, on peut obtenir une relation semblable à (5) qui lie les cumulants d'ordres 4 et 2 ou d'ordres 4 et 3:

$$\sum_{i=0}^{\infty} h(i)C_{4y}(\tau_1 - i, \tau_2 - i, \tau_3) = \eta \sum_{i=s_2}^{\infty} h(i)h(\tau_2 - \tau_1 + i)[C_{3y}(\tau_1 - i, \tau_3)] \quad (6)$$

où:  $\eta = \gamma_{4w}/\gamma_{3w}$ . Il est intéressant de noter que l'absence d'un terme dépendant des statistiques du bruit de mesure dans (6), permet d'utiliser toute l'information contenue dans le cumulants d'ordre 4, contrairement à la relation (5) pour laquelle seules certaines tranches du cumulants d'ordre 3 peuvent être utilisées.

Dans le cas d'un modèle ARMA(p,q), les coefficients de la réponse impulsionnelle sont liés aux paramètres  $a(i)$  et  $b(i)$  par l'équation:

$$h(t) = - \sum_{i=1}^p a(i)h(t-i) + b(t) \quad (7)$$

En reportant (7) dans (2), nous obtenons une deuxième relation fondamentale [17]:

$$\sum_{j=0}^p a(j)C_{mx}(\tau_1 - j, \tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \tau_{m-1}) = \gamma_{mw} \sum_{i=s_3}^q b(i)h(i - \tau_1)h(i - \tau_2) \dots h(i - \tau_{m-1}) \quad (8)$$

où:  $s_3 = \max(0, \tau_1, \dots, \tau_{m-1})$ .

## 4. METHODES D'IDENTIFICATION LINEAIRES

### 4.1 Estimation des coefficients $a(i)$ d'un modèle AR(p) ou ARMA(p,q)

Si nous choisissons  $\tau_1 > q$ , la relation (8) conduit alors aux équations de Yule-Walker dites aux ordres supérieurs (YWOS) [8], [13], [14], [17]:

$$\sum_{j=0}^p a(j)C_{mx}(\tau_1 - j, \tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \tau_{m-1}) = 0 \quad (9)$$

Les quatre méthodes du tableau I résultent de l'utilisation des équations YWOS écrites pour  $m=3$ , en définissant  $\tau = \tau_1 - \tau_2$ . Nous remarquons que, dans le cas particulier d'un modèle AR d'ordre 5, l'information statistique utilisée par chaque méthode est différente. Un contre-exemple est montré dans [18], pour lequel la méthode de base ( $m=3, \tau_2=0$ ) ne permet pas d'estimer les paramètres AR d'un modèle ARMA (2,2). Une solution consiste à utiliser (p+1) tranches 1-D du cumulants d'ordre 3 [8],

[17], [18], [21].

### 4.2 Identification d'un modèle MA(q)

En choisissant  $\tau_1 = \tau_2$  dans la relation (5), on obtient l'algorithme présenté dans [9], qui nécessite de résoudre un système de (2q-2) équations à (2q-2) inconnues. Ce choix ne permet pas d'obtenir une solution unique pour certaines configurations de système. Une solution proposée par Tugnait [22] consiste à surdimensionner le système d'équations à résoudre par l'ajout d'un autre système d'équations (soit au total 4q équations à (2q+2) inconnues), assurant ainsi la consistance de l'estimateur basé sur l'utilisation de statistiques d'ordre 3 ou 4. Une autre solution est proposée dans [22], nécessitant une redondance plus faible au niveau du vecteur de paramètres estimés (2q équations à (q+1) inconnues), mais moins performante du fait qu'elle utilise un plus petit nombre de cumulants. Les deux solutions contenues dans [23] sont de légères variantes des méthodes proposées dans [9] et [22], ayant un meilleur comportement numérique de par les modifications apportées aux systèmes d'équations à résoudre.

Nous devons noter que les méthodes présentées dans ce § reposent toutes sur la relation (5), avec pour la plupart d'entre elles un surdimensionnement important du système d'équations à résoudre; ce surdimensionnement résulte soit du choix des indices  $\tau_1$  et  $\tau_2$  intervenant dans (5), soit de la prise en compte d'un deuxième système d'équations. Une autre méthode consiste à déterminer les paramètres MA à partir d'une combinaison linéaire de cumulants [5].

### 4.3 Identification d'un modèle ARMA(p,q)

Dans ce paragraphe, nous décrivons trois approches pour l'identification d'un modèle ARMA. La première est constituée des trois étapes suivantes: 1) estimation des paramètres  $a(i)$  à l'aide de l'une des méthodes décrites au §4.1; 2) filtrage du signal de sortie à l'aide de la partie AR estimée, afin de générer le signal résiduel MA; 3) estimation des paramètres  $b(i)$  à l'aide de l'une des méthodes décrites au §4.2. Cette approche, dite du signal résiduel, a tout d'abord été développée dans le cas des méthodes au second ordre [3], puis étendue au cas des méthodes aux ordres supérieurs [6], [9], [13], [14]. Une deuxième approche consiste à transformer le problème de l'identification d'un modèle ARMA en celui de l'identification de deux modèles MA. A partir de la relation (3) écrite à l'ordre trois, on peut démontrer les équations suivantes [10]:

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p a_3(i,j)C_{3x}(\tau_1 - i, \tau_2 - j) = 0 \quad \text{si } (\tau_1, \tau_2) \notin S(q) \quad (10)$$

$$= \gamma_{3w}b_3(\tau_1, \tau_2) \text{ si } (\tau_1, \tau_2) \in S(q) \quad (11)$$

$$\text{où: } a_3(i,j) = \sum_{k=0}^p a(k)a(k+i)a(k+j) \quad (12)$$

$$b_3(i,j) = \sum_{k=0}^q b(k)b(k+i)b(k+j) \quad (13)$$

$b_3(i,j) = 0$  si  $(i,j) \notin S(q)$  et  $a_3(i,j) = 0$  si  $(i,j) \notin S(p)$

où  $S(q)$  désigne la région du plan  $(\tau_1, \tau_2)$  où les cumulants d'ordre trois sont non nuls pour un processus MA(q). (voir fig.1).

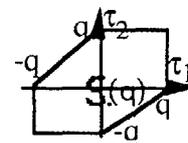


Figure 1: Région de cumulants d'ordre trois non nuls pour un processus MA(q)

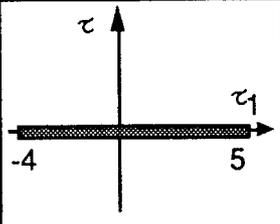
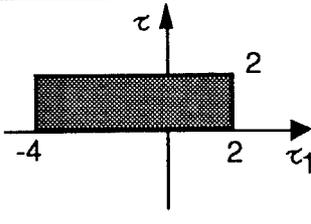
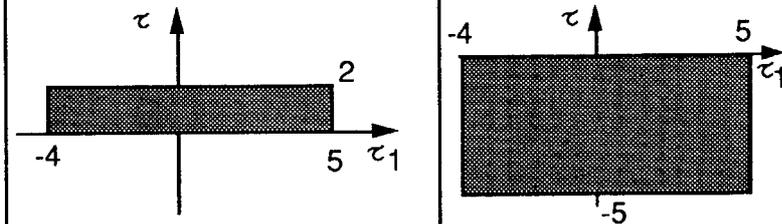
| Algorithme de base   | Nikias&Raghuveer (1986)   | Tugnait (1989)   | Swami & Mendel (1990)<br>Giannakis (1990)  |
|--|---|--|--|
| $\sum_{i=0}^p a(i)C_{3y}(\tau_1-i, \tau) = 0 \text{ où } \tau = \tau_1 - \tau_2$ <p>avec <math>\tau_1 &gt; 0</math> cas AR(p) et <math>\tau_1 &gt; q</math> cas ARMA(p,q) } <math>\Rightarrow A\theta = b</math> où: <math>\theta = [a(1)...a(p)]^T</math></p> |   |  |  |
| AR   | $\begin{cases} \tau_1 = 1, 2, \dots, L_1 \\ \tau = \begin{cases} 0, \dots, \tau_1 & \text{si } \tau_1 < L_1 \\ L_2 - L_1, \dots, L_1 & \text{si } \tau_1 = L_1 \end{cases} \end{cases}$                 | $\begin{cases} \tau_1 = 1, 2, \dots, p \\ \tau = 0, 1, \dots, \bar{p} \end{cases} \quad \bar{p} = \begin{cases} p/2 & \text{si } p \text{ pair} \\ (p-1)/2 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$  | $\begin{cases} \tau_1 = 1, 2, \dots, p+M \\ \tau = -p, -p+1, \dots, 0 \\ M \geq 0 \end{cases}$         |
| ARMA   | $\begin{cases} \tau_1 = q+1, q+2, \dots, q+L_1 \\ \tau = \begin{cases} q, \dots, \tau_1 & \text{si } \tau_1 < q+L_1 \\ \tau_1 - L_2, \dots, \tau_1 & \text{si } \tau_1 = q+L_1 \end{cases} \end{cases}$ | $\begin{cases} \tau_1 = q+1, q+2, \dots, q+p \\ \tau = 0, 1, \dots, \bar{q} \quad \bar{q} = \max(q, \bar{p}) \\ \text{où } \bar{p} = \begin{cases} p/2 & \text{si } p \text{ pair} \\ (p-1)/2 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$ | $\begin{cases} \tau_1 = q+1, q+2, \dots, q+p+M \\ \tau = q-p, q-p+1, \dots, q \\ M \geq 0 \end{cases}$ |
| A  | A = matrice carrée.   | A = matrice carrée.  | A = matrice rectangulaire.   |
| AR   |   |   |                      |

Tableau I: Méthodes d'identification des paramètres a(i) d'un modèle AR(p) ou ARMA(p,q)

Les coefficients a(i) et b(i) sont déterminés en résolvant respectivement les équations (10) et (12) d'une part, et (11) et (13) d'autre part, à l'aide de l'une des méthodes d'estimation MA du §4.2. Une troisième approche consiste à estimer simultanément les coefficients a(i) et les coefficients de la réponse impulsionnelle, puis les paramètres b(i). Il s'agit de l'algorithme q-slices [10]. L'avantage des méthodes linéaires que nous venons de présenter réside dans leur simplicité de mise en œuvre. Une autre approche que nous allons développer dans le paragraphe suivant, consiste à estimer simultanément les paramètres a(i) et b(i) en utilisant une technique d'optimisation non linéaire.

### 5. METHODES D'IDENTIFICATION NON LINEAIRES

Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories:

- i) Méthodes de recherche exhaustive: Dans un premier temps, on détermine une fonction de transfert équivalente à déphasage minimal, en faisant appel à une méthode classique du second ordre. Puis, on lève l'indétermination au niveau du choix des zéros de la fonction de transfert en choisissant ceux qui ajustent au mieux certaines SOS. Ainsi, Lii&Rosenblatt [12] ont appliqué cette méthode pour l'identification d'un modèle MA, avec un critère d'ajustement portant sur les statistiques d'ordre trois; ce type de méthode est aussi utilisé par Tugnait [19], pour l'identification de modèles AR non causaux et de modèles ARMA, avec ajustement des statistiques d'ordres 2 et 4.
- ii) Méthodes basées sur la minimisation analytique d'un critère d'ajustement de cumulants, s'exprimant sous la forme suivante:

$$J(\theta) = [s(\theta) - \hat{s}]^T \Lambda^{-1}(\theta) [s(\theta) - \hat{s}] \quad (14)$$

où s(θ) est le vecteur des statistiques que l'on cherche à ajuster,  $\hat{s}$  correspond à une valeur estimée de s(θ) à partir des données mesurées, et  $\Lambda(\theta)$  est la matrice de covariance du vecteur des statistiques considérées. La principale difficulté de cette approche réside dans l'estimation de cette matrice de covariance. Les principaux critères proposés sont les suivants:

- Lii & Rosenblatt [12]:  $\Lambda(\theta)$  = matrice identité, avec:

$$J(\theta) = 1/2 \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^m [C_{3x}(m,n) - \hat{C}_{3x}(m,n)]^2 \quad (15)$$

dans le cas d'un modèle MA(q).

- Tugnait [20]:  $\Lambda(\theta)$  = matrice identité, avec:

$$J(\zeta) = J_1(\theta) + \alpha J_2(\zeta) \quad (16)$$

où la quantité  $\alpha$  est un scalaire positif permettant de pondérer la contribution de l'information statistique d'ordre 4 vis à vis de celle d'ordre 2, et:

$$J_1(\theta) = 1/2 \sum_{m=-L_1}^0 [C_{2x}(m;\theta) - \hat{C}_{2x}(m)]^2$$

$$J_2(\zeta) = 1/2 \sum_{m=-L_2}^0 \sum_{n=-m}^0 \sum_{r=-n}^0 [C_{4x}(m,n,r;\zeta) - \hat{C}_{4x}(m,n,r)]^2$$

$\theta = [a(1)...a(p)b(1)...b(q)\gamma_{2w}\gamma_{2v}]^T$  et  $\zeta = [\theta^T \gamma_{4w}]^T$   $L_1 \geq 2p, L_2 \geq 2p$

- Friedlander&Porat [6]:  $\Lambda(\theta)$  est estimé, et  $s(\theta) = [C_{2x}(0) \dots C_{2x}(q) C_{3x}(0,0) \dots C_{3x}(q,q)]^T$ , dans le cas d'un modèle ARMA. Cet algorithme présente l'avantage d'être asymptotiquement à variance d'erreur minimale.

D'autres approches peuvent être trouvées dans [4].

### 6 CONCLUSION

L'utilisation des SOS permet de résoudre le problème de l'indétermination de la phase d'un système, problème non résolu avec les méthodes du second ordre. De nombreuses variantes existent pour les méthodes d'identification AR, MA et ARMA basées sur les SOS. Certaines de ces méthodes ont été présentées de façon unifiée à l'aide des tableaux I et II, facilitant la comparaison de leur performance en terme de complexité de mise en œuvre (volume de calcul et place mémoire). Une question qui est encore largement ouverte est celle du choix du meilleur algorithme d'identification pour un type de processus particulier. Une réponse à cette question peut-être apportée à travers une analyse de performance tant théorique qu'expérimentale [4] et [15].

La liste des références sera fournie sur demande.



| Références   | Giannakis 87 [C(q,k)]                     | Alshebeili & Venet.91 [Alsh91]   | Giannakis & Mendel 89  | Tugnait 90 GM89 modifié.  | Tugnait91 [T91]   | Tugnait90 [T90]  |
|--|---|--|--|---|-------------------|--|
| Equation fondamentale:   |   | $\sum_{i=0}^q b(i)C_{3y}(\tau_1-i, \tau_2-i) = \sum_{i=-\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon b(i)b(\tau_2-\tau_1+i)C_{2y}(\tau_1-i) \rightarrow \varepsilon = \gamma_3 w / \gamma_2 w$<br>$\begin{cases} \tau_1 = \max(0, \tau_1-\tau_2) \\ \tau_2 = \min(q, q+\tau_1-\tau_2) \end{cases}$ |  |   |                   |  |
| Augmentation du système d'équation   | $C_{3y}(q,k)$<br>$b(k) = C_{3y}(q,0)$     |  | $\sum_{i=0}^q b^2(i)C_{2y}(\tau-i) = \varepsilon' \sum_{i=0}^q b(i)C_{3y}(\tau-i, \tau-i)$<br>$\sum_{i=0}^q b^2(i)C_{3y}(i-\tau, q) = b(q)C_{3y}(-\tau, 0)$                                | Cumulants 2-D $\rightarrow \rightarrow$ Cumulants 1-D $\tau_2 = \tau_1 + n$ & $\tau_1 = \tau$<br>$\sum_{i=-\tau_1}^{\tau_2} b(i)b(i+n)C_{2y}(\tau-i) = \varepsilon' \sum_{i=0}^q b(i)C_{3y}(\tau-i, \tau-i+n)$<br>$n=0$   $n=q$ |                   | $\varepsilon'' = \varepsilon b(q)$   |
| Variation des indices: $\tau_1$ & $\tau_2$ :<br>i) dans la relation fondamentale<br>ii) dans la seconde équation | $\tau_1 = q$<br>$\tau_2 = 0, 1, \dots, q$ | Utilisation de toute l'information disponible  | $\tau_1 = \tau_2 = \tau$<br>$\tau = -q, \dots, -1$<br>$\tau = q+1, \dots, 2q$<br>$\tau_1 = \tau$ & $\tau_2 = q$<br>$\tau = -q, \dots, -1$<br>$\tau = 1, \dots, q$                          | $\tau_1 = \tau_2 = \tau$<br>$\tau = -q, \dots, -1$<br>$\tau = q+1, \dots, 2q$<br>$\tau_1 = \tau$ & $\tau_2 = q$<br>$\tau = -q, \dots, -1$<br>$\tau = 1, \dots, q$   |                   | $\tau_1 = \tau$ & $\tau_2 = q$<br>$\tau = -q, \dots, -1$<br>$\tau = 1, \dots, q$ |
| Vecteur des paramètres:  | $\Theta = [b(1), \dots, b(q)]^T$          |  | $\Theta = [\varepsilon', \varepsilon' b(1), \dots, \varepsilon' b(q)]$<br>$\Theta = [\varepsilon', \varepsilon' b(1), \dots, \varepsilon' b(q), \varepsilon'']$<br>$b^2(1), \dots, b^2(q)$ | $\Theta = [\varepsilon', \varepsilon' b(1), \dots, \varepsilon' b(q), \varepsilon'']$<br>$b^2(1), \dots, b^2(q)$  |                   | $\Theta = [\varepsilon'', b(1), \dots, b(q)]^T$                                  |
| Dimension:   | $= q$                                     | $= q(q+5)/2 + 1$   | $= 2q + 1$   | $= 2q + 2$  | $= 2q + 2$        | $= q + 1$  |
| Dimension du système à inverser  | Relations explicites                      | $[2q(q+1), q(q+5)/2+1]$  | $[2q-2, 2q-2]$   | $[4q, 2q+2]$  | $[4q, 2q+2]$      | $[2q, q+1]$  |
| Information utilisée dans le cas bruité: [relative aux cumulants d'ordre trois: $C_{3y}(\tau_1, \tau_2)$ ]       |   |  |  |   |                   |  |
| Nb de Cumulants: $C_{3y}(\tau_1, \tau_2)$  | $q+1$                                     | $q(q+1)^2$   | $q(q+1)$   | $q(q+1) + q(q+3)$   | $q(q+1) + q(q+1)$ | $q(q+1)$   |
| Nb de $C_{2y}(\tau_1)$   | 0   | $\sum_{i=0}^{q-1} (q-i)(q+1-i)$  | $q(q+1)$   | $q(q+1) + 0$  | $q(q+1) + 2q$     | 2q   |

Tableau II: Méthodes d'identification des paramètres b(i) d'un modèle MA(q)