



ARPRO, UN NOUVEAU MODELE DE SIGNAL

Corinne MAILHES

GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Dans cet article, nous présentons un nouveau modèle de signal appelé ARPRO. Ce modèle est à mi-chemin entre la modélisation AutoRégressive et la modélisation de Prony. De la modélisation AR, il a le faible coût calculatoire et l'estimation spectrale tandis que, comme un modèle de Prony, il permet une reconstruction temporelle du signal. Il peut s'appliquer sur tous les signaux proches de la classe de Prony. Nous étudions sa distance au modèle de Prony et son comportement en présence de bruit.

In this communication, a new model, called ARPRO, is presented. This model is midway between AR modeling and Prony modeling. It has the AR modeling low computational cost and spectral estimation and, like a Prony model, it leads to a signal temporal reconstruction. It can be applied successfully on signals near to the Prony class. Its distance to Prony model and its behavior in the presence of noise are studied.

1- INTRODUCTION

La modélisation de Prony est souvent utilisée dans l'analyse des signaux pour sa finesse d'analyse spectrale ainsi que pour son aspect modélisation temporelle que ne possède pas la modélisation AutoRégressive (AR).

Dans un article précédent [1], nous avons donné une autre représentation du modèle de Prony ; il peut être vu comme une récurrence AR initialisée par p conditions initiales calculées au sens des moindres carrés.

Nous présentons ici un nouveau modèle, basé sur le fait que les conditions initiales au sens des moindres carrés sont bien approximées par les premiers points du signal. Nous étudions la distance de ce modèle au modèle de Prony.

2- UNE AUTRE REPRESENTATION DU MODELE DE PRONY

La modélisation de Prony [2] consiste à représenter un signal par une combinaison linéaire d'exponentielles complexes. Soit $\{x(n)\}_{n=0, N-1}$ le signal original. Son modèle de Prony, $\{\hat{x}_{Pr}(n)\}_{n=0, N-1}$, s'écrit :

$$\hat{x}_{Pr}(n) = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad (1)$$

p étant l'ordre du modèle, $\{b_m\}$ et $\{z_m\}$ étant les paramètres complexes correspondant respectivement aux amplitudes complexes et aux pôles du modèle.

Nous avons montré qu'un modèle de Prony d'ordre p est strictement équivalent à une récurrence AR du même ordre initialisée par p conditions initiales calculées au sens des moindres carrés et formant un vecteur noté \underline{I}_{MC} [1].

D'autre part, la récurrence AR peut être exprimée directement en fonction des conditions initiales :

$$\hat{\underline{X}}_{Pr} = C \underline{I}_{MC} \quad (2)$$

$\hat{\underline{X}}_{Pr}$ étant le vecteur modèle de Prony (N composantes) et

C une matrice (p colonnes, N lignes) construite à partir des paramètres AR $\{\alpha_k\}$ et des coefficients de la réponse impulsionnelle $\{h_n\}$:

$$\begin{matrix} n = 0, \dots, N-1 \\ j = 0, \dots, p-1 \end{matrix} \quad c(n, j) = \sum_{k=j}^{p-1} h_{n-k} \alpha_{k-j} \quad (3)$$

Nous avons donc une stricte équivalence entre les deux représentations, c'est-à-dire entre les deux jeux de paramètres :

$$(\underline{b}, \underline{z}) \Leftrightarrow (\underline{\alpha}, \underline{I}_{MC})$$



3- LE MODELE ARPRO

Pour les signaux proches de la classe de Prony, les conditions initiales calculées au sens des moindres carrés sont bien approximées par les premiers points du signal (voir les exemples de [1]). Cette remarque conduit à proposer un autre modèle de signal, défini comme une récurrence AR initialisée par les premiers points du signal. Ce modèle sera appelé dans la suite ARPRO car il ressemble à une modélisation AR et est très proche de la modélisation de Prony :

$$\begin{aligned} n = 0, \dots, p-1 \quad \hat{x}_{\text{ARPRO}}(n) &= x(n) \\ n \geq p \quad \hat{x}_{\text{ARPRO}}(n) &= -\sum_{k=1}^p \alpha_k \hat{x}_{\text{ARPRO}}(n-k) \end{aligned} \quad (4)$$

Ce qui peut s'écrire directement en fonction du vecteur des p premiers échantillons du signal \underline{X}_p :

$$\hat{\underline{X}}_{\text{ARPRO}} = C \underline{X}_p \quad (5)$$

$\hat{\underline{X}}_{\text{ARPRO}}$ étant le vecteur modèle ARPRO (N composantes)

et C la matrice précédemment définie dans l'équation (3). Nous allons maintenant étudier la distance entre le modèle de Prony et le modèle ARPRO.

4- DISTANCE PRONY-ARPRO

Supposons que l'erreur $\{\epsilon(j)\}_{j=0, p-1}$ entre les deux vecteurs de conditions initiales soit centrée, de composantes non corrélées et de variance σ_ϵ^2 . Soit $\{d(n)\}_{n=0, N-1}$ la distance entre les deux modèles :

$$d(n) = \hat{x}_{\text{Pr}}(n) - \hat{x}_{\text{ARPRO}}(n) \quad (6)$$

En utilisant l'expression des deux modèles fonction des conditions initiales (Eq (2) et (5)), la distance s'écrit :

$$d(n) = \sum_{j=0}^{p-1} c(n, j) [I_{\text{MC}}(j) - x(j)] \quad (7)$$

Ainsi la distance inter-modèle est une combinaison linéaire des erreurs entre les conditions initiales.

On en déduit aisément que cette distance $\{d(n)\}_{n=0, N-1}$ est centrée et que sa corrélation s'écrit :

$$\begin{aligned} E\{d(n)d(m)\} &= \sum_{j, k=0}^{p-1} c(n, j)c(m, k) E\{\epsilon(j)\epsilon(k)\} \\ &= \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{p-1} c(n, j)c(m, j) \end{aligned} \quad (8)$$

Ce qui produit donc des distances corrélées de variance :

$$\sigma_d^2(n) = E\{d^2(n)\} = \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{p-1} c^2(n, j) \quad (9)$$

Or, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} c(n+1, j+1) &= \sum_{k=j+1}^{p-1} h_{n+1-k} \alpha_{k-j-1} = \sum_{l=j}^{p-2} h_{n-l} \alpha_{l-j} \\ &= c(n, j) - h_{n-p+1} \alpha_{p-1-j} \end{aligned} \quad (10)$$

Ne considérant ici que des modèles stables, on a :

$$\begin{aligned} h_n^2 &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Et par suite,

$$\begin{aligned} c^2(n, 0) &= \alpha_p^2 h_{n-p}^2 \rightarrow 0 \\ n &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} c^2(n+1, j+1) &= c^2(n, j) + h_{n-p+1}^2 \alpha_{p-1-j}^2 \\ &\quad - 2\alpha_{p-1-j} h_{n-p+1} c(n, j) \end{aligned}$$

Par récurrence sur j , on peut alors montrer que :

$$\begin{aligned} \forall j \quad c^2(n, j) &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sigma_d^2(n) &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (11)$$

La variance de la distance entre les deux modèles Prony et ARPRO tend vers zéro lorsque n devient grand.

Ainsi, le modèle ARPRO, construit à partir du modèle de Prony en dégradant le jeu de paramètres des conditions initiales, reste un modèle très proche du modèle de Prony en possédant donc ses mêmes propriétés de représentation temporelle des signaux.

5 - SPECTRE ARPRO

Le modèle ne serait pas complet sans une définition de son spectre. Le modèle ARPRO qui est un modèle déterministe, peut être vu comme un filtre AR excité par une entrée $\{u(n)\}_{n=0, N-1}$. Cette entrée est telle que le filtre en sortie restitue $\{\hat{x}_{\text{ARPRO}}(n)\}$:

$$\hat{x}_{\text{ARPRO}}(n) = -\sum_{k=1}^p \alpha_k \hat{x}_{\text{ARPRO}}(n-k) + u(n) \quad (12)$$

Pour que les équations (12) et (4) décrivent le même modèle, il faut et il suffit que :

$$\underline{u} = [u(0) \dots u(p-1)]^t = A \underline{X}_p \quad (13)$$

avec $u(n) = 0$ pour $n \geq p$ et $n < 0$ et A une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-3} & \dots & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \alpha_0 = 1$$

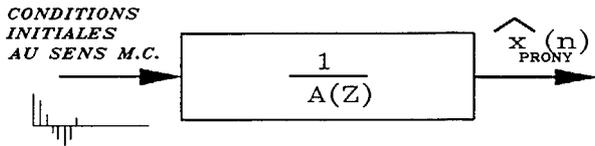
Le spectre du modèle se définit alors par :

$$|X_{\text{ARPRO}}|^2 = \frac{|\text{T.F.D.}\{\underline{u}\}|^2}{|\text{T.F.D.}\{\underline{\alpha}\}|^2} \quad (14)$$

6- AR, Prony et ARPRO

Afin de mieux illustrer les similitudes et les différences entre les divers modèles paramétriques Prony et ARPRO, nous pouvons les représenter par rapport à un modèle AR dont le schéma classique est un filtre de transmittance $1/A(z)$ excité par un bruit blanc.

Le modèle de Prony est un modèle déterministe qui peut être vu comme un filtre AR excité par une entrée particulière calculée au sens des Moindres Carrés (M.C.) [1] :



conditions initiales au sens M.C. : $\underline{u}_{MC} = A \underline{I}_{MC}$

Fig 1: Modélisation de Prony

Le modèle ARPRO est très semblable au modèle de Prony : le filtre n'est plus excité par des conditions initiales calculées au sens des Moindres Carrés. L'initialisation se fait plus simplement avec les p premiers points du signal à modéliser :

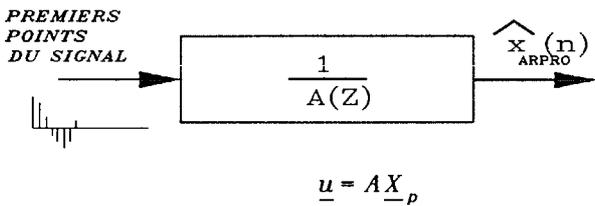


Fig 2: Modélisation ARPRO

7- EXEMPLES

Nous pouvons illustrer la comparaison faite entre ces deux modèles sur l'aspect modélisation temporelle de signaux. Un exemple d'utilisation du modèle ARPRO est donné dans le domaine biomédical. La modélisation de Prony s'appliquant bien à des signaux électromyographiques (EMG) [3], nous présentons ici les résultats de la modélisation ARPRO sur ces signaux.

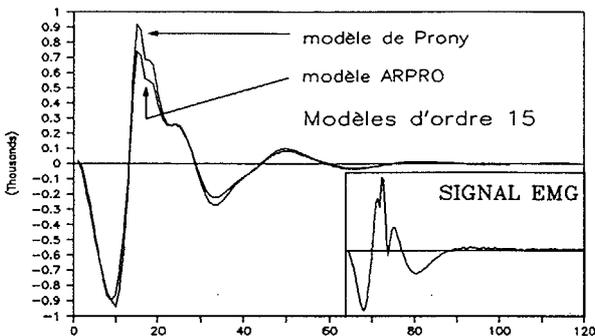


Fig 3: Modèles de Prony et ARPRO (ordre 15)

Dans cette modélisation d'ordre 15, les deux modèles sont légèrement différents mais on ne peut pas dire que l'un des deux modélise mieux le signal EMG que l'autre.

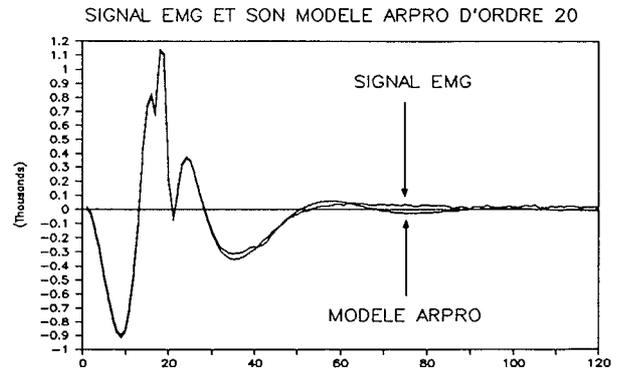


Fig 4: Modèle ARPRO à l'ordre 20

Dans la figure 4, la modélisation est effectuée à l'ordre 20 mais les deux modèles n'ont pas pu être superposés car les deux courbes auraient été indistinguables !

Ces exemples illustrent bien la similitude de comportement des deux modèles Prony et ARPRO. Lorsque le modèle de Prony modélise correctement un signal, le modèle ARPRO aussi ; lorsque le modèle de Prony n'est pas très bon, le modèle ARPRO ne l'est pas non plus.

Nous avons aussi validé les conclusions sur la variance de la distance entre les deux modèles. Pour cela, nous avons représenté d'une part, la distance entre le modèle de Prony et le modèle ARPRO aux ordres 15 (voir Figure 3) et d'autre part, l'intervalle de confiance à 90% calculé à partir de l'équation (9).

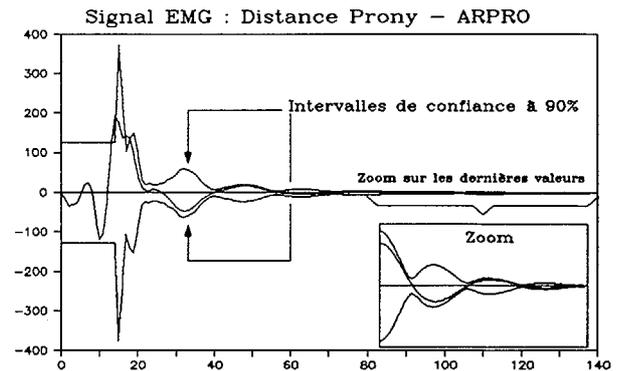


Fig 5: Distance inter-modèle et son intervalle de confiance à 90% pour les modèles d'ordre 15

Ainsi le comportement d'ARPRO dans l'optique d'une modélisation temporelle du signal est pratiquement identique à celui de Prony.



8- ROBUSTESSE EN PRESENCE DE BRUIT

Pour finir l'étude complète du modèle, il faut s'intéresser à son comportement en présence de bruit et le comparer à celui de la modélisation de Prony.

Nous avons effectué cette comparaison sur deux types de signaux : des signaux à spectre continu et des signaux dont le spectre présente des discontinuités.

Comme exemple de signaux à spectre continu, nous avons utilisé les signaux EMG précédents. Nous donnons ci-après les résultats de la puissance d'erreur de modèle en fonction du rapport signal à bruit du signal à modéliser. La puissance d'erreur de modélisation est tracée en échelle logarithmique calculée par rapport à la puissance du signal de départ (non bruité).

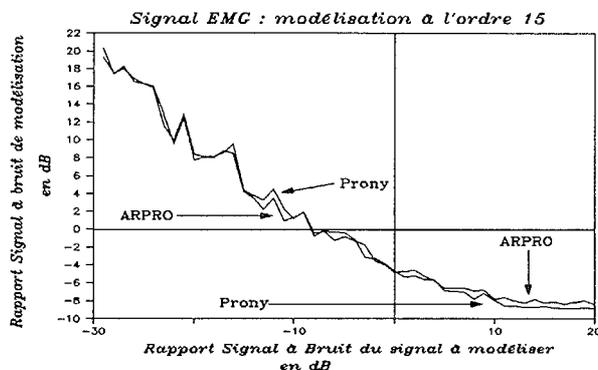


Fig 6: Puissance de l'erreur de modèle en fonction du rapport S/B du signal à modéliser
Signal EMG à spectre continu

Dans cet exemple, nous voyons que le modèle ARPRO est tantôt meilleur, tantôt moins bon que le modèle de Prony. Précisons tout de suite qu'il s'agit du modèle de Prony étendu et que la courbe que nous aurions obtenue avec la méthode de Prony-Corrélation Signal aurait été la même décalée vers la gauche de $\log N_1$, N_1 étant le nombre de points de calcul de la corrélation [4].

Cette même étude a été faite sur des signaux à spectre discontinu. Le signal à modéliser est une sinusoïde pour laquelle on fait varier le rapport signal à bruit (bruit blanc gaussien). Les deux modélisations ont été effectuées à un ordre constant égal à 10. L'évolution de l'erreur de modélisation est sensiblement la même pour les deux modélisations, comme l'illustre la figure 7. Dans cet exemple, la modélisation de Prony reste légèrement supérieure à la modélisation ARPRO. Toutefois, il faut remarquer la similitude de comportement de ces deux modélisations. Ceci confirme la conclusion apportée sur les exemples présentés ci-dessus dans les figures 3 et 4 : si un modèle est bon, l'autre aussi par contre, si l'un est mauvais, l'autre aussi.

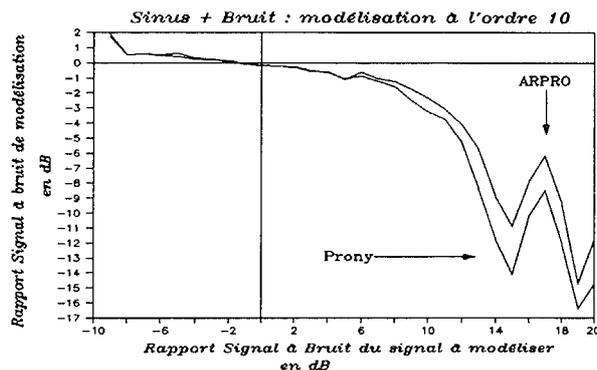


Fig 7: Puissance de l'erreur de modèle en fonction du rapport S/B du signal à modéliser
Signal sinusoidal

En fait, les comportements du modèle ARPRO et du modèle de Prony en présence de bruit additif gaussien sont identiques.

9- CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté un autre modèle paramétrique de signal. Ce modèle, appelé ARPRO, est proche de la modélisation AR par sa forme récurrente et de la modélisation de Prony par son aspect modélisation temporelle des signaux. Nous avons montré que la distance entre les modèles ARPRO et Prony reste très faible et que le comportement des deux modèles est identique. Ainsi, le modèle ARPRO est intéressant dans les cas où le modèle de Prony est approprié et où on n'a pas besoin de retrouver explicitement les paramètres du modèle. En compression de signal, par exemple, si le modèle de Prony est adapté aux signaux étudiés, il vaut mieux effectuer une modélisation ARPRO. Celle-ci est moins coûteuse en complexité calculatoire : elle nécessite une recherche de paramètres autorégressifs alors que la modélisation de Prony implique cette même recherche, une recherche de racines polynomiales et une résolution d'un système linéaire de Van der Monde (moindres carrés).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.Mailhes, F.Castanié, "An alternative Prony model representation", ICASSP 91, pp 3157-3160.
- [2] S.L.Marple, "Digital Spectral Analysis with applications", Ed. Prentice-Hall, Chapitre 11.
- [3] F.Gasmi, "La modélisation multi-impulsionnelle", Thèse de l'INP Toulouse, n° d'ordre 688, janvier 1993.
- [4] F.Castanié, F.Gasmi, "Extraction of sinusoids from noise by Prony modelling of high-order correlation functions", Int. Conf. on DSP, Florence, Italie, september 1987.