

L'ANALYSE DE PRONY MULTI-MODELE ET MULTI-DATE DE SIGNAUX TRANSITOIRES

S.YVETOT(*,**) - C.MAILHES(*) - J.C BIOTTEAU(**)

(*) GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse cedex, France

(**) Centre d'Etudes de Gramat ERI/ES 46500 Gramat, France

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous présentons une nouvelle méthode d'analyse de signaux transitoires : l'analyse de Prony multi-modèle et multi-date. L'idée est d'introduire l'instant de départ de chaque transitoire comme un paramètre supplémentaire afin d'aboutir à une somme de modèles de Prony démarrant à des instants quelconques. Le calcul des paramètres du modèle global est réalisé en deux étapes: détection des instants de départ, puis par une technique de déflation, estimation successive des paramètres de chaque modèle de Prony (Amplitudes, phases, fréquences, amortissements). Nous montrons que la modélisation de Prony est très sensible à l'erreur de détection de la date de départ, ce qui conduit à choisir pour la première étape un estimateur basé sur la transformée en ondelettes. Nous présentons enfin les résultats de cette méthode d'analyse sur les signaux EMP qui appartiennent à la classe des signaux de Prony multi-modèle et multi-date.

1- INTRODUCTION

Dans l'analyse de signaux transitoires, la modélisation paramétrique de Prony [1] est reconnue comme un outil particulièrement approprié. Toutefois, certains transitoires, en particulier tous ceux qui sont formés de multiples réflexions, se présentent comme une somme de modes oscillants démarrant à des instants différents. C'est pourquoi il est intéressant d'envisager une méthode de Prony multi-modèle et multi-date et d'introduire l'instant de départ de chaque composante oscillante comme un paramètre supplémentaire de la modélisation.

Après une description de la classe des signaux multi-transitoires à laquelle appartiennent les signaux EMP (Electro-Magnetic Pulse), nous étudions la sensibilité du modèle de Prony à l'erreur d'estimation de la date de départ. Au vu des conclusions de cette étude, nous proposons une méthode de détection de ces instants, basée sur la transformée en ondelettes. Nous présentons enfin les résultats de cette modélisation sur des signaux réels.

ABSTRACT

In this communication, a new transient analysis method is presented: the multi-date and multi-model Prony analysis. The idea is to consider each component departure like an extra parameter which allows to split up the signal into a sum of shifted Prony models. The global parameter computation is achieved in two steps. The first step deals with the detection of all departure instants. Then, in the second step, a deflation algorithm is used to fit the oscillant parameters of the successive Prony models (Magnitude, phase, frequency and damped coefficient). The high sensitivity of Prony modeling to the departure date estimation error is shown, leading to choose the wavelet transform to achieve the first part of the analysis. Results of this method are presented when applied to multi-date and multi-model Prony signals class like EMP signals.

2- CARACTERISTIQUES DES SIGNAUX ETUDIÉS

Dans cet article, nous nous intéressons à l'analyse de la classe des signaux multi-transitoires qui ont la particularité d'être composés d'une somme de signaux transitoires, chacun d'eux pouvant démarrer à des instants quelconques. Cette classe de signaux recouvre bon nombre de signaux issus de mesures physiques, dont les signaux EMP. Ceux-ci proviennent des études de compatibilité électromagnétique à l'Impulsion Electro-Magnétique d'origine Nucléaire (IEMN) des systèmes électroniques [2]. Ces études ont pour but de déterminer les points faibles du comportement électromagnétique d'un système afin de les renforcer. Ainsi, pour caractériser la réponse du système à l'IEMN, il est nécessaire de connaître les paramètres oscillants des tensions et courants induits qui pourraient détruire les différents équipements.

Pour cela, grâce à des simulateurs d'IEMN, le Centre d'Etudes de Gramat procède, sous des conditions électromagnétiques données, à l'illumination du système et mesure les différents couplages qui engendrent les tensions et courants sur les câbles de liaison. La difficulté d'analyse de ces signaux impulsionnels EMP est liée au caractère non stationnaire qu'apportent les



différents décalages temporels de chaque transitoire, du fait notamment des multiples réflexions de l'illumination incidente. Un exemple de signal EMP est donné sur la figure suivante.

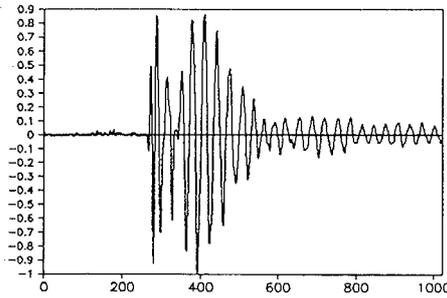


Fig.1: signal EMP.

3- METHODE PROPOSEE

Le caractère transitoire des signaux étudiés oriente l'analyse vers une modélisation paramétrique du type Prony [1]. Celle-ci consiste à modéliser le signal $\{x(n)\}_{n=0, N-1}$ par une combinaison linéaire d'exponentielles complexes telle que

$$\hat{x}_{Prony}(n) = \sum_{j=1}^P b_j \cdot z_j^n \quad (1)$$

P étant l'ordre du modèle, $\{b_j\}_{j=1, P}$ les amplitudes complexes et $\{z_j\}_{j=1, P}$ les exponentielles complexes définies par :

$$\begin{cases} b_j = A_j \cdot e^{i \cdot \Phi_j} \\ z_j = e^{-\alpha_j + 2i\pi f_j} \end{cases} \quad (2)$$

$A_j, \Phi_j, \alpha_j, f_j$ représentent respectivement l'amplitude, la phase, l'amortissement et la fréquence de la $j^{\text{ème}}$ composante du modèle ($j = 1, P$).

Toutefois, lorsqu'un signal est formé de plusieurs transitoires démarrant à des instants différents, l'analyse de Prony ne suffit plus. Le caractère non stationnaire qui en résulte suggère de prendre en compte comme paramètre supplémentaire la date de départ de chaque mode oscillant. Ainsi d'une façon plus générale, nous proposons une analyse de type multi-modèle et multi-date :

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=1}^q \sum_{j=1}^{P_m} b_{j,m} \cdot z_{j,m}^{n-n_m} \cdot u(n-n_m) \quad (3)$$

(avec $u(n) = 0$ pour $n < 0$ et $u(n) = 1$ pour $n \geq 0$).

Chacun des q modèles de Prony est caractérisé par son ordre P_m , son instant de départ n_m et ses paramètres complexes $\{b_{j,m}, z_{j,m}\}_{j=1, P_m}$ qui sont liés aux paramètres $\{A_{j,m}, \Phi_{j,m}, \alpha_{j,m}, f_{j,m}\}_{j=1, P_m}$ comme dans l'expression (2).

L'estimation des paramètres du modèle global se fait en deux étapes. Tout d'abord, nous estimons les instants de départ des différents modèles $\{n_m\}_{m=1, q}$. Ces instants étant connus, la seconde étape consiste à estimer les modèles de Prony successifs dans l'ordre de leur apparition, suivant une technique de déflation. Pour cela, les $\{n_m\}$ étant ordonnés selon une chronologie croissante, les paramètres du modèle démarrant à l'instant n_1 sont estimés sur le segment $[n_1, n_2]$. La synthèse de ce modèle est alors soustraite au signal original pour former le signal résiduel qui servira à l'estimation du

modèle démarrant à l'instant n_2 et ce, jusqu'au dernier instant n_q .

Comme nous le voyons, la deuxième étape repose sur une modélisation de Prony classique, qui elle-même est liée à la qualité de la détection préalable de l'instant de départ du modèle. L'étude de la sensibilité du modèle de Prony à la date de départ, détaillée dans le paragraphe suivant, permet de guider dans le choix d'un estimateur des instants de démarrage.

4- ETUDE DE LA SENSIBILITE DU MODELE DE PRONY A LA DATE DE DEPART

Considérons un signal $\{x(n)\}_{n=0, N-1}$ tel que:

$$x(n) = \sum_{j=1}^P b_j z_j^{n-m} u(n-m) + e(n) \quad (4)$$

où $e(n)$ est un bruit blanc centré, $\{b_j\}_{j=1, P}$ et $\{z_j\}_{j=1, P}$ sont les paramètres complexes du signal et $u(n)$ la fonction définie dans l'équation (2). Remarquons que ce signal peut être décrit par un modèle de Prony à partir de l'instant m . Pour cela, décalons l'origine des temps autour de m (en posant $l = n - m$):

$$l = 0, N-1 \quad x(l+m) = \sum_{j=1}^P b_j \cdot z_j^l + e(l+m) \quad (5)$$

L'estimation des paramètres se fait en trois étapes [1] :

- 1) estimation AR des coefficients $\{\alpha_j\}_{j=1, P}$ de prédiction linéaire,
- 2) calcul des $\{z_j\}_{j=1, P}$ en cherchant les racines du polynôme dont les coefficients sont les paramètres AR,
- 3) résolution d'un système linéaire pour obtenir le vecteur des amplitudes complexes $\underline{b}_m = [b_1 \dots b_P]^T$ (estimation des moindres carrés):

$$\hat{\underline{b}}_m = [V_N^H V_N]^{-1} V_N^H \underline{X}_m \quad (6)$$

avec V_N matrice de Van der Monde, où l'indice N correspond au nombre de lignes, le nombre de colonnes étant égal à P .

$$V_N = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_P \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_P^{N-1} \end{bmatrix}$$

(la lettre H en exposant désigne le transposé hermitien de la matrice).

\underline{X}_m est le vecteur signal défini à partir de l'instant m (dans l'échelle des temps de l'équation (4)), comme l'illustre la figure suivante:

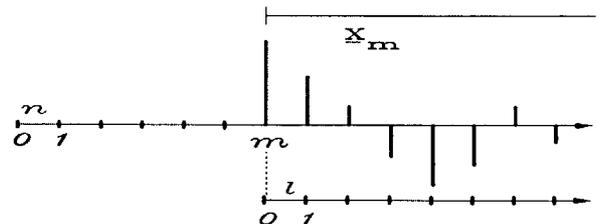


Fig. 2: Constitution du vecteur signal \underline{X}_m



C'est donc dans cette étape et dans la constitution du vecteur \underline{X}_m qu'intervient l'estimation de l'instant de départ m . Nous étudions dans ce qui suit la sensibilité du modèle de Prony à l'estimation de la date de départ:

$$\hat{m} = m \pm \Delta \quad \text{avec } \Delta \in \mathbb{N} \quad (7)$$

Cette étude est faite en supposant que dans les étapes (1) et (2) de la modélisation de Prony, les $\{\alpha_j\}_{j=1,P}$ et donc les $\{z_j\}_{j=1,P}$ sont parfaitement estimés. On distingue deux cas.

a) Cas $\hat{m} = m + \Delta$

Ce cas revient à un décalage de l'origine des temps tel que le signal considéré s'écrit (en posant $k = l - \Delta$):

$$k = 0, N-1 \quad x(k+m+\Delta) = \sum_{j=1}^P b_j z_j^{k+\Delta} + e(k+m+\Delta) \quad (8)$$

Le vecteur \underline{X}_m est constitué avec un retard par rapport à sa date de départ.

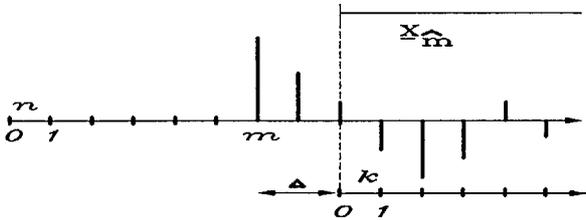


Fig. 3: Constitution du vecteur signal dans le cas $\hat{m} = m + \Delta$

L'estimation des paramètres du modèle de Prony d'ordre P sur un signal de la forme:

$$k \geq 0 \quad x(k+m+\Delta) = \sum_{j=1}^P (b_j z_j^\Delta) \cdot z_j^k + e(k+m+\Delta)$$

va conduire à une estimation des amplitudes complexes pondérées suivantes: $\{(b_j z_j^\Delta)\}_{j=1,P}$.

Ce qui donne selon une notation matricielle:

$$\hat{m} = m + \Delta, \Delta \in \mathbb{N} \quad \hat{\underline{b}}_m = D^\Delta \cdot \underline{b}_m \quad (9)$$

avec D la matrice diagonale de dimension $(P \times P)$ suivante:

$$D = \text{diag}\{z_j\} \quad (10)$$

b) Cas $\hat{m} = m - \Delta$

Dans ce cas, le vecteur \underline{X}_m est constitué avec une avance par rapport à sa date de départ:

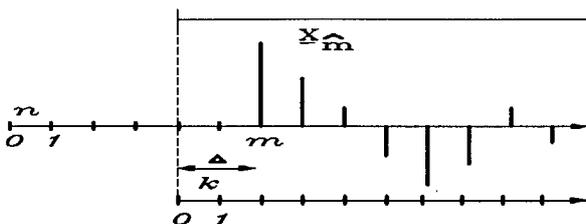


Fig. 4: Constitution du vecteur signal dans le cas $\hat{m} = m - \Delta$

Le vecteur des amplitudes complexes est alors estimé par:

$$\hat{\underline{b}}_m = [V_N^H V_N]^{-1} \cdot V_N^H \underline{X}_m \quad (11)$$

Afin de comparer les estimations données par les équations (6) et (11), nous décomposons les différents vecteurs signal considérés:

$$\begin{aligned} \underline{X}_m &= [\underline{X}_1 | \underline{X}_2]^T \\ \underline{X}_m &= [\underline{X}_0 | \underline{X}_1]^T \end{aligned}$$

où \underline{X}_1 est le vecteur de dimension $(N - \Delta)$ suivant :

$$\underline{X}_1 = [x(m) \dots x(m+N-1-\Delta)]^T$$

et \underline{X}_0 et \underline{X}_2 les vecteurs de dimension (Δ) suivants :

$$\underline{X}_0 = [x(m-\Delta) \dots x(m-1)]^T$$

$$\underline{X}_2 = [x(m+N-\Delta) \dots x(m+N-1)]^T$$

En utilisant la notation définie pour la matrice de Van der Monde (Eq.(6)) et D la matrice diagonale des pôles (Eq.(10)), on obtient:

$$V_N^H \cdot \underline{X}_m = V_\Delta^H \cdot \underline{X}_0 + (D^\Delta)^H \cdot V_{N-\Delta}^H \cdot \underline{X}_1 \quad (12)$$

$$V_N^H \cdot \underline{X}_m = V_{N-\Delta}^H \cdot \underline{X}_1 + (D^{N-\Delta})^H \cdot V_\Delta^H \cdot \underline{X}_2 \quad (13)$$

En combinant les équations (12) et (13), on a :

$$V_N^H \cdot \underline{X}_m = (D^\Delta)^H \cdot V_N^H \cdot \underline{X}_m + V_\Delta^H \cdot \underline{X}_0 - (D^N)^H \cdot V_\Delta^H \cdot \underline{X}_2 \quad (14)$$

D'où finalement,

$$\begin{aligned} \hat{\underline{b}}_m &= ([V_N^H \cdot V_N]^{-1} \cdot (D^\Delta)^H \cdot [V_N^H \cdot V_N]) \cdot \hat{\underline{b}}_m \\ &+ ([V_N^H \cdot V_N]^{-1} \cdot V_\Delta^H) \cdot \underline{X}_0 \\ &- ([V_N^H \cdot V_N]^{-1} \cdot (D^N)^H \cdot V_\Delta^H) \cdot \underline{X}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

L'erreur d'estimation de la date de départ fait apparaître dans ce cas un biais à la fois multiplicatif et additif. Il est important de noter que le biais additif fait intervenir le vecteur \underline{X}_0 , formé par les échantillons du "signal" avant l'instant m .

Si l'on se réfère à l'équation (4), ce vecteur est uniquement composé d'échantillons de bruit. On pourra comparer, sur la figure 5, la différence de comportement de l'estimation de $\hat{\underline{b}}_m$ en fonction du signe de l'erreur de date. Celle-ci illustre l'évolution, en fonction de l'erreur de date, d'un des paramètres du vecteur des amplitudes complexes estimé sur un signal répondant à l'expression (4) (ordre 12) et non bruité ($\{e(n) = 0\}_{n=0, N-1}$).

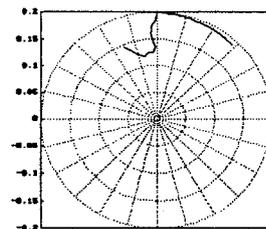


Fig. 5: $-9 \leq \Delta_m \leq 10$



Cet exemple montre bien la différence de complexité entre les relations (9) et (15). En effet, autant l'équation (9) possède un comportement simple en fonction de Δ (loi puissance sur le module et linéaire sur la phase), autant l'équation (15) révèle un trajet complexe et difficile à analyser. Ceci montre l'importance que l'on doit apporter à la détection des instants de départ, ce qui nous a conduit à choisir un estimateur basé sur la transformée en ondelettes.

5- DETECTION DES SINGULARITES

La transformée en ondelettes étant particulièrement adaptée à la détection des singularités [3], nous proposons de l'utiliser pour construire un estimateur des instants de départ de chaque transitoire. Comme le suggèrent certains auteurs [4],[5], la base d'ondelettes choisie est d'autant plus efficace que celle-ci possède des propriétés proches de l'information cherchée. Dans un objectif de détection automatique des singularités, il est clair que seuls les coefficients d'ondelettes les plus élevés seront conservés, sans se soucier de la reconstruction. Dans un premier temps, nous avons décidé d'utiliser l'ondelette de Morlet. En effet, celle-ci (porteuse modulée par une gaussienne) permet de donner des renseignements spectraux (par la fréquence de la porteuse) et de pointer directement sur les singularités (ondelette symétrique), comme le montrent les figures 6 et 7. La figure 7 représente le module de la transformée en ondelettes de Morlet (16 échantillons de support temporel à l'échelle 1 et avec un paramètre d'échelle de 0.0625) sur le signal test de la figure 6, généré selon l'équation (3) (3 transitoires respectivement situés en (100,200,300) et d'ordres (6,4,4)) avec un rapport signal à bruit de 50 dB (bruit additif blanc gaussien).

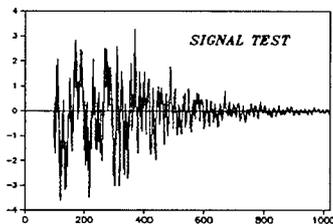


Fig. 6: signal original

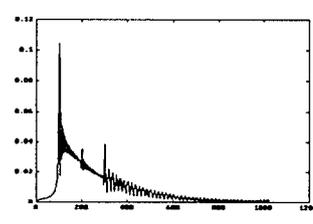


Fig.7: transformée en ondelette

6- RESULTATS EXPERIMENTAUX

La figure 8 représente l'erreur de reconstruction qui résulte de l'analyse de Prony multi-modèle et multi-date du signal test de la figure 6, ce qui aboutit à un rapport signal sur bruit de modélisation de 44,8 dB.

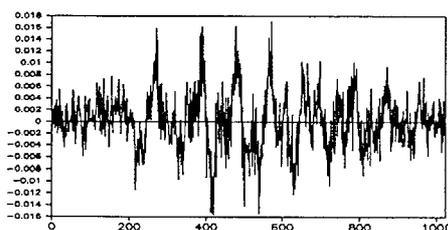


Fig. 8: erreur de modèle

Bien que les signaux de mesure réels comme celui de la figure 1 soient constitués de transitoires dont le démarrage est "progressif", nous avons détecté 6 instants de départ (figure 9)) et reconstruit le signal (figure 10)) avec un rapport signal sur bruit de modélisation de 10,1 dB.

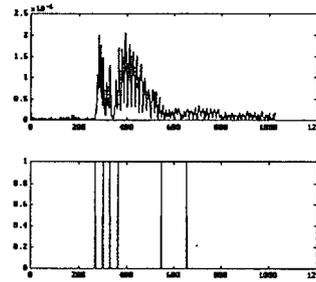


Fig. 9: détection des instants

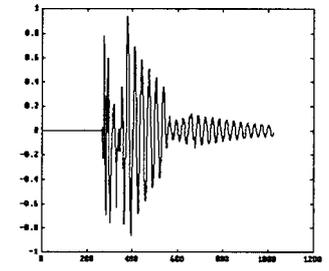


Fig. 10: reconstruction temporelle

7- CONCLUSION

Nous avons proposé dans cet article une méthode d'analyse des signaux multi-transitoires comportant des dates de départ quelconques. Le caractère non stationnaire de ces signaux nous a conduit à envisager une méthode multi-modèle de Prony et multi-date. Nous avons montré que l'utilisation de la modélisation paramétrique de Prony était fortement conditionnée à une localisation précise des différents transitoires. Ainsi la combinaison de la transformée en ondelettes et de la modélisation de Prony s'est avérée particulièrement efficace lorsque l'hypothèse selon laquelle chaque transitoire possède un démarrage abrupt est vérifiée. L'analyse des signaux réels s'avère plus difficile à réaliser car les temps de montée non nuls de chaque transitoire contredisent quelque peu cette hypothèse. Toutefois, les premiers résultats obtenus sur les signaux EMP restent encourageants et appellent des améliorations de la méthode, notamment au niveau de la détection automatique des instants de départ.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.L.Marple, "Digital spectral analysis with applications", chpt 11, Prentice-Hall, 1988, pp 303-349.
- [2] J.L.Blech, "Introduction à l'EMN (impulsion électromagnétique d'origine nucléaire)" L'onde Electrique - Janvier-Fevrier 1989 - vol. 69 - N°1.
- [3] O.Rioul et M.Vetterli, "Wavelets and signal processing", IEEE SP-MAGAZINE, octobre 1991, pp 14-38.
- [4] Athina.P.Petropulu, "Detection of transients using discrete wavelet transform", Proc. of the ICASSP-92, pp II.477-II.480
- [5] F.Castanié and A. Denjean, "Mean value jump detection using wavelet decomposition", Proc. of the IEEE-SP TIME-FREQUENCY and TIME-SCALE ANALYSIS, pp181-184, 4-6 oct.1992, Canada.