FONCTION DE CONTRASTE POUR L'IDENTIFICATION AVEUGLE D'UN MODELE LINEAIRE QUADRATIQUE

M. Krob et M. Benidir

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE
Université PARIS-Sud
Gif-sur-Yvette, FRANCE.

RÉSUMÉ

Nous nous proposons de réaliser l'identification aveugle d'un mélange linéaire quadratique de composantes statistiquement indépendantes et circulaires par l'optimisation d'un critère. Nous donnons la définition d'une classe de critères, appelés fonctions de contraste, adaptés à notre mélange non linéaire, l'expression explicite de telles fonctions et un algorithme d'identification.

ABSTRACT

In this paper, our purpose is to perfom the blind identification of a linear-quadratic mixture of statistically independent and circular random variables by maximizing a criterion. We define a class of criteria, called contrast functions which are appropriated for a non-linear mixture. We give the clear expression of such functions and an identification algorithm.

1 Introduction

L'identification aveugle d'un mélange linéaire de composantes statistiquement indépendantes à l'aide de statistiques d'ordre supérieur est un problème intéressant pour ses applications en traitement d'antenne. Ce problème a été diversement traité dans [1]-[4] et s'énonce de la manière suivante:
identifier le modèle statistique suivant

$$\mathbf{Y} = \sum_i x_i \boldsymbol{\ell}_i + \mathbf{b} \qquad (1)$$

où $\mathbf{y}$ est le vecteur d'observation, les x_i les composantes conjointement indépendantes appelées sources, $\mathbf{b}$ le vecteur bruit, et les $\boldsymbol{\ell}_i$ les vecteurs déterministes à identifier uniquement à l'aide des statistiques de $\mathbf{y}$.
L'approche développée dans [1] introduit la notion de fonction de contraste. L'optimisation de cette fonction va permettre de résoudre le problème dans le cas du modèle linéaire (1). Dans cet article, nous résolvons le problème de l'identification aveugle d'un *mélange linéaire quadratique* de sources conjointement indépendantes et circulaires [5]

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{l}_i + \sum_{1 \le i \le j \le N} x_i x_j \mathbf{q}_{i,j} + \mathbf{b} \qquad (2)$$

par l'optimisation d'un critère. Nous définissons une classe de critères, appelés *fonctions de contraste* (comme dans le cas linéaire), mais adaptés à notre *modèle non linéaire* (2) et dont l'optimisation solutionnera notre problème. Notons que cette identification ne peut pas être traitée par les méthodes classiques propres au mélange linéaire car notre modèle ne peut pas être vu comme le produit d'une matrice de mélange et d'un vecteur de composantes statistiquement indépendantes.

Une autre approche fondée sur la décomposition en valeurs singulières d'une matrice de moments d'ordre trois du vecteur d'observation a été proposée dans [6] pour l'identification aveugle du modèle (2) avec des applications au problème des couplages quadratiques de phase.

2 Position du problème

Réécrivons le modèle (2) sous la forme suivante

$$\mathbf{Y} = H\mathbf{X} \qquad (3)$$

où $\mathbf{Y}$ est le vecteur aléatoire d'observation de dimension $K = N + N(N+1)/2$, H est la matrice carrée $K \times K$ de mélange $(\boldsymbol{\ell}_1, .., \boldsymbol{\ell}_N, \mathbf{q}_{1,1}, ., \mathbf{q}_{1,N}, \mathbf{q}_{2,2}, .., \mathbf{q}_{N,N})$ dans laquelle les N vecteurs déterministes $\boldsymbol{\ell}_i \in \mathbb{C}^K$ caractérisent la partie linéaire du modèle et les $N(N+1)/2$ vecteurs déterministes $\{\mathbf{q}_{i,j}\}_{1 \le i \le j \le N} \in \mathbb{C}^K$ sa partie quadratique. Le vecteur $\mathbf{X}$ est le vecteur aléatoire de dimension K que l'on mélange. $\mathbf{X}$ est partionné suivant $(\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)^T$ avec $\mathbf{X}_1^T \triangleq (x_1, .., x_N)$, $\mathbf{X}_2^T \triangleq (x_1^2, x_1x_2, ., x_1x_N, x_2^2, .., , x_N^2)$, les x_i désignant les N sources mélangées. Nous supposerons que notre modèle n'est pas bruité (nous aurions pu rajouter un vecteur bruit, centré, Gaussien, indépendant de $\mathbf{X}$, de covariance connue). Le problème consiste à identifier H uniquement à l'aide des statistiques du vecteur $\mathbf{Y}$ sous les deux hypothèses suivantes:

- $\mathcal{H}_1$: La matrice H est inversible.
- $\mathcal{H}_2$: Les x_i sont des variables aléatoires centrées, conjointement indépendantes et circulaires, la propriété de circularité étant caractérisée par la condition:

$$E[\underbrace{x_{i_1} \cdots x_{i_r}}_{r} \underbrace{x_{j_1}^* \cdots x_{j_s}^*}_{s}] = 0 \text{ si } r \neq s.$$

3 Définition du contraste

Soit $\mathbb{E}_N$, l'ensemble des vecteurs aléatoires de dimension N dont la matrice de covariance existe et est inversible.

3.1 Contraste dans le cas d'un mélange linéaire

Définition 1 [1]: La fonction Φ, de $\mathbb{E}_N$ dans $\mathbb{R}$, est dite fonction de contraste appropriée au mélange linéaire (1) si et seulement si elle vérifie les quatres propriétés suivantes.

P1: $\Phi(\mathbf{Y})$ ne dépend que de la densité de probabilité conjointe des N composantes de $\mathbf{Y}$.

P2: Φ est invariant par changement d'échelle.

P3: Si $\mathbf{X}$ est un vecteur dont les composantes sont statistiquement indépendantes, alors pour toute matrice A inversible, on a

$$\Phi(A\mathbf{X}) \leq \Phi(\mathbf{X}).$$

P4: Si $\mathbf{X}$ est un vecteur dont les composantes sont statistiquement indépendantes, alors

$$\Phi(A\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}) \Leftrightarrow A = DP$$

où P est une matrice $N \times N$ de permutation et D une matrice $N \times N$ diagonale inversible. □

La méthode proposée dans [1] utilise les maxima de $\Psi(Q\tilde{\mathbf{Y}})$ où $\tilde{\mathbf{Y}}$ est le vecteur d'observation blanchi, sur l'ensemble des matrices Q unitaires, pour identifier le mélange linéaire à une permutation et des facteurs d'échelle près.

3.2 Contraste dans le cas d'un mélange linéaire quadratique

Le résultat principal de cet article est l'introduction d'une nouvelle fonction de contraste Ψ adaptée à l'identification aveugle du modèle (3).

Définition 2: La fonction Ψ, de $\mathbb{E}_K$ dans $\mathbb{R}$, est dite fonction de contraste appropriée au mélange linéaire quadratique (3) si et seulement si elle vérifie les quatres propriétés suivantes.

P1: $\Psi(\mathbf{Y})$ ne dépend que de la densité de probabilité conjointe des K composantes de $\mathbf{Y}$.

P2: Ψ est invariant par changement d'échelle.

P3′: Si $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)^T$ avec $\mathbf{X}_1^T = (x_1, .., x_N)$, $\mathbf{X}_2^T = (x_1^2, x_1x_2, ., x_1x_N, x_2^2, .., , x_N^2)$ où les x_i satisfont $\mathcal{H}_2$, alors pour toute matrice A inversible, on a

$$\Psi(A\mathbf{X}) \leq \Psi(\mathbf{X}).$$

P4′: Si $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)^T$, alors

$$\Psi(A\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}) \Leftrightarrow A = D \begin{pmatrix} P_\sigma & \vdots & O \\ \cdots & . & \cdots \\ O & \vdots & P'_\sigma \end{pmatrix}$$

où σ désigne une permutation quelconque de $\{1, .., N\}$, P_σ la matrice $N \times N$ de permutation transformant $\mathbf{X}_1$ en $(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(N)})^T$, P'_σ la matrice de permutation $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ transformant $\mathbf{X}_2$ en $(x_{\sigma(1)}^2, x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}, ., x_{\sigma(1)}x_{\sigma(N)}, x_{\sigma(2)}^2, .., x_{\sigma(N)}^2)^T$ et D une matrice $K \times K$ diagonale inversible. □

Les propriétés 1 et 2 sont identiques aux deux définitions, les deux dernières nécessaires à l'identification du mélange linéaire quadratique.

4 Contrastes

Dans cette partie, nous réécrivons le problème de l'identification du modèle (3) sous une forme qui conduit à un algorithme d'optimisation. Puis, nous introduisons une fonction qui est un contraste pour le mélange (3).

4.1 Reformulation du problème

Proposition 1: L'identification aveugle du modèle (3)

$$\mathbf{Y} = H\mathbf{X}$$

est équivalente à celle du modèle

$$\tilde{\mathbf{Y}} = Q_H \tilde{\mathbf{X}} \tag{4}$$

où $\tilde{\mathbf{Y}}$ et $\tilde{\mathbf{X}}$ désignent les vecteurs blanchis des vecteurs $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{X}$ et Q_H une matrice unitaire dépendant de H. □

Preuve: En effet, avec nos notations, la matrice de covariance de $\mathbf{X}$ s'écrit

$$\Gamma_{2,X} = \mathrm{diag}(\mu_1, .., \mu_N, \mu_{1,1}, ., \mu_{1,N}, \mu_{2,2}, .., \mu_{N,N}) \triangleq \Delta$$

où $\mu_i \triangleq E(x_i x_i^*)$, $\mu_{i,i} \triangleq E(x_i^2(x_i^2)^*)$ et $\mu_{i,j} \triangleq \mu_i\mu_j$ pour $i \neq j$. Or, $\Gamma_{2,Y}$, matrice de covariance de $\mathbf{Y}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme TDT^H où T est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à un, et D est une matrice diagonale dont les éléments sont positifs (factorisation de Choleski).
Donc,

$$\Gamma_{2,Y} = TDT^H = H\Gamma_{2,X}H^H.$$

D'où

$$TDT^H = H\Delta H^H.$$

Il existe donc une matrice unitaire Q_H unique telle que

$$TD^{1/2} = H\Delta^{1/2}Q_H^{-1}. \tag{5}$$

Comme $\tilde{\mathbf{X}} = \Delta^{-1/2}\mathbf{X}$, on obtient

$$\tilde{\mathbf{Y}} = (TD^{1/2})^{-1}\mathbf{Y} = (H\Delta^{1/2}Q_H^{-1})^{-1}H\mathbf{X} = Q_H\tilde{\mathbf{X}}. \quad \diamond$$

Donc, d'après la relation (5) et P4′ de la définition 2, le problème de l'identification se réécrit:

$$\hat{Q} = \arg \max_{Q \text{ unitaire}} \Psi(Q\tilde{\mathbf{Y}}), \tag{6}$$

car les maxima globaux de cette quantité sont les

$$\hat{Q} = Di \begin{pmatrix} P_\sigma & \vdots & O \\ \cdots & . & \cdots \\ O & \vdots & P'_\sigma \end{pmatrix} Q_H^{-1}$$

où Di est une matrice diagonale d'éléments de module unité (P_σ et P'_σ ayant été définies plus haut) et permettent l'identification du modèle (à des permutations et des constantes d'échelle près).

4.2 Expression d'un contraste

Proposition 2: Soit la fonction Ψ_1, de $\mathbb{E}_K$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Psi_1(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{N} | E(\tilde{Y}_i^2 \tilde{Y}_{i,i}^*) |^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} | E(\tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_{i,j}^*) |^2 \qquad (7)$$

où $\mathbf{Y} = (Y_1, ., Y_N, Y_{1,1}, ., Y_{1,N}, Y_{2,2}, .., Y_{N,N})$, $\tilde{Y}_i$ et $\tilde{Y}_{i,j}$ désignent les composantes du vecteur $R^{-1}\mathbf{Y}$ et R est le facteur de Choleski de la covariance de $\mathbf{Y}$. Alors, Ψ_1 est une fonction de contraste au sens de la définition 2. □

Preuve : Les propriétés P1 et P2 sont évidentes, nous ne démontrons que P3′ et P4′ de la définition 2.
Posons

$$Q = \begin{pmatrix} q_{i,j} & \vdots & q_{i,(m,n)} \\ \cdots & . & \cdots \\ q_{(k,l),j} & \vdots & q_{(k,l),(m,n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & . & \cdots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix}$$

avec $1 \leq i, j \leq N$, $1 \leq k \leq l \leq N$ et $1 \leq m \leq n \leq N$ et A, B, C et D se définissant directement par l'égalité ci-dessus. D'après $\mathcal{H}_2$, les termes apparaissant dans le contraste (7) sont:

$$E(\tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_{i,j}^*) = \sum_{1 \leq l < m \leq N} (q_{i,l} q_{j,m} + q_{i,m} q_{j,l}) q_{(i,j),(l,m)}^* + \sum_{l=1}^{N} \tilde{\mu}_{l,l} q_{i,l} q_{j,l} q_{(i,j),(l,l)}^* \qquad (8)$$

pour $1 \leq i \leq j \leq N$ et où $\tilde{\mu}_{i,i} \triangleq \mu_{i,i}/\mu_i^2$. Le contraste ne dépend que de la partie A et D de la matrice unitaire Q.
Preuve de P3′ : D'après la proposition 1, P3′ est équivalente à:

$$\forall\ Q \text{ unitaire}\ ,\ \Psi_1(Q\tilde{\mathbf{X}}) \leq \Psi_1(\tilde{\mathbf{X}})$$

où $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}_1^T, \tilde{\mathbf{X}}_2^T)^T$ avec $\tilde{\mathbf{X}}_1 = (\{x_i/\mu_i\}_{i=1,.,N})^T$ et $\tilde{\mathbf{X}}_2 = (\{x_i x_j/\mu_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j \leq N})^T$.
De la définition de Ψ_1, on obtient:

$$\Psi_1(\tilde{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mu}_{i,i}^2 + N(N-1) = \Psi_{max}. \qquad (9)$$

Posons $F(\tilde{\mathbf{Z}}) = \| E(\tilde{\mathbf{Z}} \otimes \tilde{\mathbf{Z}} \otimes \tilde{\mathbf{Z}}^H) \|_F^2$ où la norme considérée est celle de Frobénius.
Comme les x_i satisfont $\mathcal{H}_2$, il vient que:

$$\Psi_1(\tilde{\mathbf{X}}) = F(\tilde{\mathbf{X}}).$$

De la définition de Ψ_1, on tire que:

$$\Psi_1(\tilde{\mathbf{Y}}) = \Psi_1(Q\tilde{\mathbf{X}}) \leq F(\tilde{\mathbf{Y}})$$

car $\Psi_1(\tilde{\mathbf{Y}})$ est égale à la somme du module au carré de certains éléments de $E(\tilde{\mathbf{Y}} \otimes \tilde{\mathbf{Y}} \otimes \tilde{\mathbf{Y}}^H)$.
Or:

$$F(\tilde{\mathbf{Y}}) = \| (Q \otimes Q) E(\tilde{\mathbf{X}} \otimes \tilde{\mathbf{X}} \otimes \tilde{\mathbf{X}}^H) Q^H \|_F^2 = \Psi_1(\tilde{\mathbf{X}})$$

car Q est unitaire et la norme de Frobenius d'une matrice est invariante par transformation unitaire de cette dernière.
D'où:

$$\Psi_1(\tilde{\mathbf{Y}}) \leq \Psi_1(\tilde{\mathbf{X}}). \qquad \diamond$$

Preuve de P4′ : La démonstration de P4′ se déduit du lemme suivant dont la démonstration est donnée dans [6].
Lemme: Soit $R = (\mathbf{r}_{(1,1)}, ., \mathbf{r}_{(1,N)}, \mathbf{r}_{(2,2)}, .., \mathbf{r}_{(N,N)})$ une matrice $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ et $S = (\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_N)$ une matrice $N \times N$.

$$(A \otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}} D^H = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_j + \mathbf{s}_j \otimes \mathbf{s}_i) \mathbf{r}_{(i,j)}^H + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mu}_{i,i} (\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i) \mathbf{r}_{(i,i)}^H \qquad (10)$$

où $\Gamma_{4,\tilde{X}} = E(\tilde{\mathbf{X}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_2^H)$. □

D'après la proposition 1, P4′ est équivalente à:

$$\Psi_1(Q\tilde{\mathbf{X}}) = \Psi_1(\tilde{\mathbf{X}}) \Leftrightarrow Q = Di \begin{pmatrix} P_\sigma & \vdots & O \\ \cdots & . & \cdots \\ O & \vdots & P'_\sigma \end{pmatrix}$$

où Di est une matrice diagonale d'éléments de module unité (P_σ et P'_σ ayant été définies plus haut).
En reprenant les notations introduites au début de la section 4.2, on a

$$\tilde{\mathbf{Y}} = Q\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} A \\ .. \\ C \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_1 + \begin{pmatrix} B \\ .. \\ D \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_2.$$

Alors, puisque les sources sont indépendantes et circulaires, il en résulte que:

$$F(\tilde{\mathbf{Y}}) = \| (\begin{pmatrix} A \\ .. \\ C \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ .. \\ C \end{pmatrix}) \Gamma_{4,\tilde{X}} \begin{pmatrix} B \\ .. \\ D \end{pmatrix}^H \|_F^2$$

où $\Gamma_{4,\tilde{X}} = E(\tilde{\mathbf{X}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_2^H)$.
Or, on sait qu'il existe une matrice de permutation P telle que:

$$P(\begin{pmatrix} A \\ .. \\ C \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ .. \\ C \end{pmatrix})$$

$$= ((A \otimes A)^T \vdots (A \otimes C)^T \vdots (C \otimes A)^T \vdots (C \otimes C)^T)^T.$$

Comme la norme considérée est invariante par transformation unitaire, il vient:

$$\begin{aligned} F(\tilde{\mathbf{Y}}) &= \| (A \otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}} B^H \|_F^2 \\ &+ \| (A \otimes C)\Gamma_{4,\tilde{X}} B^H \|_F^2 + \| (C \otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}} D^H \|_F^2 \\ &+ \| (C \otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}} B^H \|_F^2 + \| (A \otimes C)\Gamma_{4,\tilde{X}} D^H \|_F^2 \\ &+ \| (C \otimes C)\Gamma_{4,\tilde{X}} B^H \|_F^2 + \| (C \otimes C)\Gamma_{4,\tilde{X}} D^H \|_F^2 \\ &+ \| (A \otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}} D^H \|_F^2 . \end{aligned} \qquad (11)$$

Posons

$$M = (A \otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}} D^H.$$

La matrice M a pour dimension $N^2 \times N(N+1)/2$. Du lemme ci-dessus, nous déduisons que le $((i-1)N+j,(p,q))^{\text{ème}}$ élément de cette matrice vaut :

$$\begin{aligned} m_{i,j,p,q} &= \sum_{1\leq l<m\leq N} (q_{i,l}q_{j,m}+q_{i,m}q_{j,l})q^*_{(p,q),(l,m)} \\ &+ \sum_{l=1}^{N} \tilde{\mu}_{l,l}q_{i,l}q_{j,l}q^*_{(p,q),(l,l)} \end{aligned} \quad (12)$$

pour $1 \leq p \leq q \leq N$ et $1 \leq i,j \leq N$. On remarque que

$$m_{i,j,i,j} = m_{j,i,i,j} = E(\tilde{Y}_i\tilde{Y}_j\tilde{Y}^*_{i,j}) \quad \forall\ 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Donc, au maximum, quand

$$\Psi_1(\tilde{\mathbf{Y}}) = F(\tilde{\mathbf{Y}})$$

il en résulte que

$$m_{i,j,p,q} = 0 \quad \forall (i,j) \neq (p,q) \neq (j,i) \quad (13)$$

et que les normes qui dépendent de B et C dans la relation (11) sont nulles, en particulier

$$\| (A\otimes A)\Gamma_{4,\tilde{X}}B^H \|_F^2 = 0. \quad (14)$$

En écrivant que la relation (13) est vrai quelque soit $\tilde{\mu}_{l,l}$, que la valeur maximale est donnée par (9) et que la relation (14) est vérifiée, on montre que A est du type ΔP_σ et D du type $\Delta' P'_\sigma$ où Δ et Δ' sont des matrices diagonales d'éléments de module unité. $\diamond$

5 Algorithme et simulations

Par la relation (6), l'identification du modèle (3) revient à trouver une matrice Q unitaire maximisant le contraste. Pour plus de simplicité, supposons que la matrice H de mélange est réelle, alors la maximisation (6) se réécrit sur l'ensemble des matrices orthogonales. Or, toute matrice orthogonale de dimension $K \times K$ peut s'écrire comme un produit de $K(K-1)/2$ rotations planes (à une matrice diagonale dont les éléments valent 1 ou -1)

$$Q = \prod_{i=1}^{K(K-1)/2} R_i(\theta_i).$$

Cette paramétrisation permet de calculer facilement les dérivées partielles du contraste $\Psi(Q\tilde{\mathbf{Y}})$ par rapport aux angles θ_i. Nous utilisons donc un algorithme du gradient pour notre maximisation.

Nous travaillons sur M échantillons du vecteur observation $\mathbf{Y}$. Tout d'abord, nous estimons la matrice de covariance de ce vecteur pour le blanchir, puis l'ensemble des moments d'ordre trois $E(\tilde{Y}_i\tilde{Y}_j\tilde{Y}^*_k)$ des composantes du vecteur blanchi. L'adaptation des paramètres dans l'algorithme du gradient s'écrit

$$\theta_i(n+1) = \theta_i(n) + \mu\,\frac{\partial\Psi(Q\tilde{\mathbf{Y}})}{\partial\theta_i(n)}$$

avec μ positif.

Dans notre simulation, nous mélangeons deux sources $x_1 = e^{j\phi_1}$ et $x_2 = e^{j\phi_2}$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées sur $[0;2\pi]$, et leurs carrés x_1^2, x_2^2 par une matrice de mélange Q_c. Notre modèle s'écrit

$$\mathbf{Y} = Q_c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Nous prenons Q_c

$$Q_c = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/6$. Nous avons réalisé 50 simulations : dans chacune de ces simulations, nous estimons les moments d'ordre 2 et 3 par les estimateurs sans biais usuels sur 2500 échantillons et nous maximisons le contraste sur 100 itérations avec μ=0.1. Nous donnons dans le tableau ci-dessous la vraie valeur de l'élément (i,j) de la matrice Q_c, sa valeur moyenne estimée et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (e.q.m) sur les 50 simulations réalisées.

ligne colonne	vraie valeur	valeur moyenne	racine carrée de l'e.q.m.
1,1	0.5	0.4998	0.0089
1,2	0.6124	0.6118	0.0067
1,3	0.5303	0.5295	0.0036
1,4	0.3062	0.3059	0.0050
2,1	-0.8660	-0.8661	0.0051
2,2	0.3536	0.3529	0.0068
2,3	0.3062	0.3062	0.0056
2,4	0.1768	0.1765	0.0064
3,1	0	-0.0007	0.0091
3,2	-0.7071	-0.7079	0.0070
3,3	0.6124	0.6125	0.0043
3,4	0.3536	0.3533	0.0057
4,1	0	0.0006	0.0099
4,2	0	0.0004	0.0115
4,3	-0.5	-0.5004	0.0055
4,4	0.8660	0.8661	0.0032

6 Références

[1] P. Comon, "Independent Component Analysis, a New Concept ?" submitted to *Signal Processing,* March 1992.

[2] J.F. Cardoso, "Blind Identification of Independent Components with higher-order statistics," *Proc. of the Workshop on Higher-Order Spectral Analysis,* Vail, June 89, pp. 157-160.

[3] M. Gaeta and J.L. Lacoume, "Maximum likelihood estimators applied to the non gaussian source separation," *Traitement du signal,* vol. 7, n. 5, pp. 419-434, 1990.

[4] C. Jutten and J. Herault,"Blind Separation of Sources, Part I : An adaptative Algorithm Based on Neuromimetic Architecture," *Signal Processing,* pp. 1-10, vol. 24, 1991.

[5] B. Picinbono, "Random signals and systems," *Prentice Hall,* 1993.

[6] M. Krob and M. Benidir, "Blind Identification of a Linear-Quadratic Mixture: Application to Quadratic Phase Coupling Estimation," *Proc. of the Workshop on Higher-Order Statistics,* South Lake Tahoe, June 7-9, 1993, pp. 351-355.