Un Algorithme Adaptatif Rapide pour Analyse Spectrale par Minimum de Variance

L. S. Resende(1,2), J. M. T. Romano(1) et M. G. Bellanger(2)

(1) Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)/DECOM/FEE; BP 6101; 13081-940, Campinas-SP - BRESIL
(2) Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM)/Electronique et Communication; 292, Rue Saint-Martin; 75141, Paris Cedex 03 - FRANCE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous proposons une méthode adaptative pour obtenir l'estimateur spectral à minimum de variance. La méthode est basée sur l'algorithme des moindres carrés pour le filtrage adaptatif avec contraintes, proposé précédemment par les auteurs. L'estimateur est obtenu de façon récursive, comme les variances des signaux à la sortie d'un banc de filtres, où chaque filtre est couplé à une fréquence donnée, en utilisant les contraintes appropriées. L'algorithme est rapide dans le sens que l'on utilise le même gain d'adaptation pour toutes les K fréquences et ce gain est obtenu par un algorithme de moindres carrés rapide. Il possède une complexité proportionnelle à NK, où N est le nombre de coefficients de chacun des K filtres. Des résultats de simulation illustrent les performances de la méthode pour les cas stationnaire et non-stationnaire.

ABSTRACT

An adaptive method for minimum-variance spectral estimation is proposed in this work. The method is based on the least-squares algorithm for constrained adaptive filtering, previously proposed by the authors. Spectral estimation is carried out by a recursive formula and it corresponds to estimate the output variances of a filter bank, where each filter is matched to a given frequency, by using the suitable constraint. The algorithm is fast since the same adaptation gain is employed for all K frequencies and this gain is obtained by means of a fast least-squares algorithm. It presents a computationnal complexity proportionnal to NK, where N is the number of coefficients of each one of the K filters. Simulation results show the performance of the method for both stationary and non-stationary cases.

I - INTRODUCTION

La méthode d'analyse spectrale par Minimum de Variance (MV) est considérée comme une des techniques importantes parmi les méthodes dites à haute résolution, dans le sens qu'elles atteignent de meilleures performances pour l'estimation d'une fréquence, ou d'un angle d'arrivée, que les techniques basées sur les méthodes classiques de Fourier [1].

Si, d'un coté, la méthode de modélisation autorégressive (AR) est basée sur le calcul d'un filtre optimal (filtre d'erreur de prédiction), la méthode MV fait intervenir des contraintes sur ce filtre [2]. L'optimisation est alors faite à l'aide des multiplieurs de Lagrange. L'introduction des contraintes permet de coupler le filtre à une fréquence considérée, en minimisant les autres composantes du signal d'entrée. Cette même approche est classiquement utilisée en traitement spatial où un ensemble de capteurs constitue un filtre multicanal, et où on veut privilégier le signal arrivant dans une direction donnée [3].

La densité spectrale du signal sous analyse peut alors être estimée en utilisant un banç de filtres, chacun avec une contrainte donnée, de façon à couvrir toute la bande analysée.

L'estimateur spectral à minimum de variance est calculé à partir le la matrice d'autocorrelation du signal, supposé stationnaire. D'autre part, il a été récemment développé par les auteurs [4] un algorithme de moindres carrés pour le filtrage adaptatif avec contraintes. Ayant en vue le même principe de base, une technique adaptative est proposée dans ce travail pour obtenir, de façon récursive, l'estimateur MV. Ainsi, l'analyse d'autocorrelation est évitée et la méthode peut aussi être appliquée au cas non-stationnaire.

L'approche a été évaluée par des simulations, considérant les cas de signaux stationnaires et non-stationnaires. Avant la présentation des résultats, nous faisons un rappel de la méthode MV pour dériver ensuite l'algorithme adaptatif proposé.

II - L'ESTIMATEUR SPECTRAL À MINIMUM DE VARIANCE

De façon à obtenir l'estimateur spectral MV, nous considérons le filtre transverse de la figure 1, qui fournit directement en sortie un signal d'erreur à minimiser. Les coefficients h_i^* du filtre sont calculés pour minimiser l'erreur quadrique moyenne en sortie, mais sont soumis à la contrainte donnée par:

$$c^H(\omega)\boldsymbol{h} = 1 \qquad (1a)$$

où

$$\boldsymbol{h} = \left[h_0\, h_1 \cdots h_{N-1}\right]^t \qquad (1b)$$

et

$$c^H(\omega) = \left[1\ e^{-j\omega} \cdots e^{-j(N-1)\omega}\right] \qquad (1c)$$

Ainsi, la réponse en fréquence du filtre sera égale à l'unité pour la fréquence ω, tandis que les autres composantes seront minimisées. La variance de l'erreur en sortie estime alors la densité spectrale $\mathscr{P}(\omega)$ et cette estimation est d'autant plus précise que le nombre de coefficients est grand.

En effectuant les calculs, à l'aide de la méthode des multiplieurs de Lagrange, nous obtenons les coefficients optimaux donnés par:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} c(\omega)}{c^H(\omega)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} c(\omega)} \tag{2}$$

où $\boldsymbol{R}_{xx}$ est la matrice d'autocorrelation du signal $x(n)$ sous analyse. En utilisant ce résultat pour calculer la puissance en sortie, on obtient l'estimateur MV:

$$\mathscr{P}(\omega) = \frac{1}{c^H(\omega)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} c(\omega)} \tag{3}$$

Cette procédure peut en fait être représentée par le schéma de la figure 2 où le signal $x(n)$ est analysé par un banc de filtres. Des contraintes similaires à celle de l'équation (1) sont imposées à chaque filtre $\boldsymbol{h}_k$ pour les fréquences ω_k uniformément distribuées. La précision de l'estimation obtenue augmente avec le nombre K de filtres et leur ordre $(N-1)$, mais au prix d'une complexité plus grande.

III - L'ALGORITHME ADAPTATIF RAPIDE

L'introduction d'une technique adaptative pour l'estimation spectrale est justifiée quand il s'agit d'une analyse en temps réel (dans ce sens, l'usage de moyennes statistiques est moins approprié). Le critère des moindres carrés est alors utilisé pour l'optimisation sous contraintes des filtres $\boldsymbol{h}_k$. En considérant n échantillons du signal d'entrée, l'estimateur en (3) devient:

$$\hat{\mathscr{P}}(\omega, n) = \frac{1}{q(n)c^H(\omega)\boldsymbol{\gamma}(\omega, n)} \tag{4}$$

où le vecteur $\boldsymbol{\gamma}(\omega, n)$ est défini par

$$\boldsymbol{\gamma}(\omega, n) = \hat{\boldsymbol{R}}_{xx}^{-1}(n)c(\omega) \tag{5}$$

avec:

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(n) = \sum_{i=1}^{n} W^{n-i}\left[x(i)x^H(i)\right] \tag{6}$$

et

$$x(i) = \left[x(i)\,x(i-1)\cdots x(i-N+1)\right]^t \tag{7}$$

Le scalaire W $(0 << W \leq 1)$ dans (6) est le facteur d'oubli qui permet à l'estimation de suivre les non-stationnarités du signal, d'où apparaît dans (4) le terme

$$q(n) = \sum_{i=1}^{n} W^{n-i} = Wq(n-1) + 1 \tag{8}$$

Il est connu que, dans la procédure récursive classique des moindres carrés, la matrice d'autocorrelation inverse peut être mise à jour par l'expression [5]

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W}\left[\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}^{-1}(n) - \boldsymbol{g}(n+1)\boldsymbol{x}^H(n+1)\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}^{-1}(n)\right] \tag{9}$$

où le vecteur $\boldsymbol{g}(n+1)$ est le gain d'adaptation défini par:

$$\boldsymbol{g}(n+1) = \hat{\boldsymbol{R}}_{xx}^{-1}(n+1)\boldsymbol{x}(n+1) \tag{10}$$

En multipliant à droite l'équation (9) par le vecteur $c(\omega)$ il vient:

$$\boldsymbol{\gamma}(\omega, n+1) = \frac{1}{W}\left[\boldsymbol{\gamma}(\omega, n) - \boldsymbol{g}(n+1)\boldsymbol{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}(\omega, n)\right] \tag{11}$$

De cette manière, on retrouve une simple récursion pour le vecteur $\boldsymbol{\gamma}(\omega, n)$ à utiliser dans (4). Il est à remarquer que le gain $\boldsymbol{g}(n+1)$ est obtenu à l'aide d'un algorithme des moindres carrés rapide [5], de façon à réduire la complexité des calculs.

La méthode proposée consiste donc à employer la récursion (11) pour toutes les valeurs de ω considérées et calculer ensuite l'estimateur dans (4), en utilisant aussi la récursion dans (8). Le gain d'adaptation calculé par l'algorithme rapide est utilisé pour toutes les fréquences ω. L'algorithme est résumé dans le Tableau I.

Tableau I: Algorithme Rapide pour Estimation Spectrale à Minimum de Variance.

- *Nouvelle entrée:* $x(n+1)$
- *Mise à jour du gain d'adaptation:* $\boldsymbol{g}(n+1)$
  (algorithme des moindres carrés rapide - MCR)
- $q(n+1) = Wq(n) + 1$

Pour toutes les fréquences $\omega = \omega_k$ *on obtient:*

- $$\boldsymbol{\gamma}(\omega, n+1) = \frac{1}{W}\left[\boldsymbol{\gamma}(\omega, n) - \boldsymbol{g}(n+1)\boldsymbol{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}(\omega, n)\right]$$
- $$\hat{\mathscr{P}}(\omega, n+1) = \frac{1}{q(n+1)c^H(\omega)\boldsymbol{\gamma}(\omega, n+1)}$$

Le calcul du gain $\boldsymbol{g}(n+1)$ demande une quantité de multiplications proportionnelle au nombre N de coefficients du filtre, grâce à l'utilisation de l'algorithme rapide. En considérant K fréquences dans l'analyse, l'algorithme possède une complexité proportionnelle à NK, pour chaque itération.

Les conditions initiales typiques des algorithmes des moindres carrés peuvent être utilisées avec toutes les variables nulles sauf l'énergie de l'erreur de prédiction, supposée égale à E_0 [5]. Cela nous amène à poser:

$$\gamma(\omega, 0) = \frac{1}{E_0} diag\left[1 \; W \cdots W^{N-1}\right] c(\omega) \qquad (12)$$

Par rapport au schéma de la figure 2, on peut conclure que le signal $x(n)$ est analysé par un banc de filtres adaptatifs avec contrainte où le même gain $g(n)$ est employé dans tous les filtres. Par contre, à chaque filtre h_k est imposé un vecteur de contrainte $c(\omega_k)$ qui définit la fréquence à laquelle il doit être couplé.

IV - SIMULATIONS

Pour illustrer les performances de l'algorithme du Tableau I, nous considérons un signal autorégressif d'ordre 4 dont les paramètres sont donnés par $a_1 = -0,43$; $a_2 = 0,296$; $a_3 = -0,2752$ et $a_4 = 0,4096$. Dans la figure 3 nous comparons la densité spectrale théorique avec celle obtenue par l'estimateur $\hat{P}(\omega, n)$ après $n=1000$ itérations. Des filtres à $N=80$ coefficients ont été considérés pour $K=40$ fréquences également espacées entre $]0, \pi]$. Le facteur d'oubli utilisé vaut $0,99$ et les conditions initiales sont établies avec $E_0 = 0,1$.

L'exemple montre que l'estimation adaptative converge vers une bonne approximation du spectre théorique, les limitations étant dues plutôt aux caractéristiques de la méthode de minimum de variance.

Le cas d'un signal non-stationnaire a été traité dans un deuxième exemple où $x(n)$ est un signal sinusoïdal dans du bruit blanc dont la fréquence est commutée entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Le rapport signal à bruit est de $10\ dB$ et l'estimation est accomplie avec $N=40$, $K=20$ (fréquences également espacées entre $]-\pi, \pi]$), $W=0,97$ et $E_0 = 0,1$.

La figure 4 montre l'estimation $\hat{P}(\omega, n)$ en fonction de ω et du nombre n d'itérations. La convergence initiale est assez rapide et la fréquence est commutée quand $n=1100$. Il peut être observé que l'algorithme suit la non-stationnarité et la nouvelle valeur de la fréquence est rapidement atteinte.

D'autres résultats de simulation obtenus confirment l'efficacité de la méthode adaptative proposée pour l'estimation spectrale, notamment quand il s'agit de la détection en temps réel d'une fréquence dans du bruit, pour le filtrage temporel, ou d'un angle d'arrivée en traitement spatial.

V - CONCLUSION

Une méthode adaptative, basée sur l'algorithme des moindres carrés rapide, a été proposée pour l'analyse spectrale à minimum de variance. Cette méthode dérive de l'algorithme déjà proposé par les auteurs pour le filtrage adaptatif avec contraintes.

L'estimation par minimum de variance peut être représentée par un schéma de banc de filtres avec contraintes. Nous obtenons la variance de l'erreur en sortie de chaque filtre en utilisant un seul gain d'adaptation, obtenu par un algorithme rapide. Une simple formule de récusion, avec une complexité réduite, est alors obtenue pour l'estimateur MV.

Les résultats de simulation montrent les performances de l'algorithme pour les cas stationnaire et non-stationnaire. Il est à souligner que la même approche peut être utilisée pour l'estimation à minimum de variance normalisée [6], qui possède une meilleure résolution spectrale, avec une complexité encore proportionnelle à NK. Les problèmes de robustesse aux erreurs de quantification en précision finie sont actuellement à l'étude.

RÉFÉRENCES

[1] **S. Haykin**; "Adaptive Filter Theory". 2nd edition; Prentice-Hall; New Jersey; 1991.

[2] **S. L. Marple Jr.**; "Digital Spectral Analysis with Applications". Prentice-Hall; New Jersey; 1988.

[3] **M. Bouvet**; "Traitements des Signaux pour les Systèmes Sonar". Masson et CNET-ENST; Paris; 1991.

[4] **L. S. Resende, J. M. T. Romano et M. G. Bellanger**; "Un Algorithme de Moindres Carrés Rapide pour Filtrage Adaptatif avec Contraintes". 13ème Colloque GRETSI; Juan les Pins; Sept. 1991; pages 537 à 540.

[5] **M. G. Bellanger**; "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis". Marcel Dekker, Inc.; New York and Basel; 1987.

[6] **M. A. Lagunas-Hernandez and A. Gazull-Llampallas**; "An Improved Maximum Likelihood Method for Power Spectral Density Estimation". IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing; vol. ASSP-32; pp. 170-173; Feb. 1984.

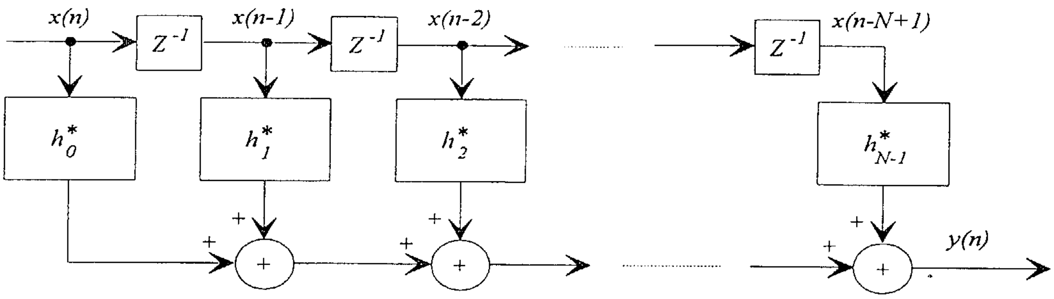

Fig. 1: Filtre transverse.

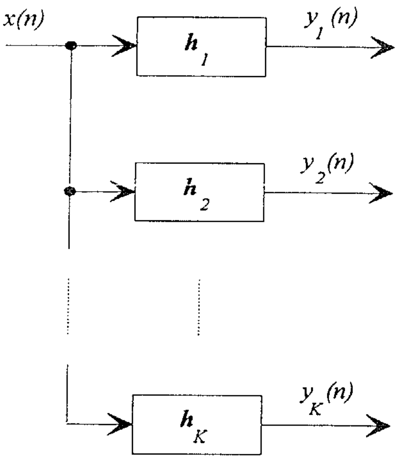

Fig. 2: Banc de filtres représentant l'analyse spectrale MV.

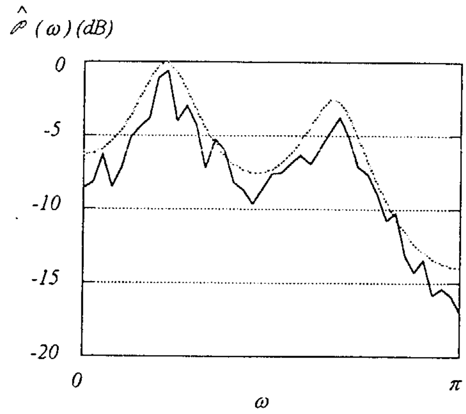

Fig. 3: Estimation du spectre: AR(4).

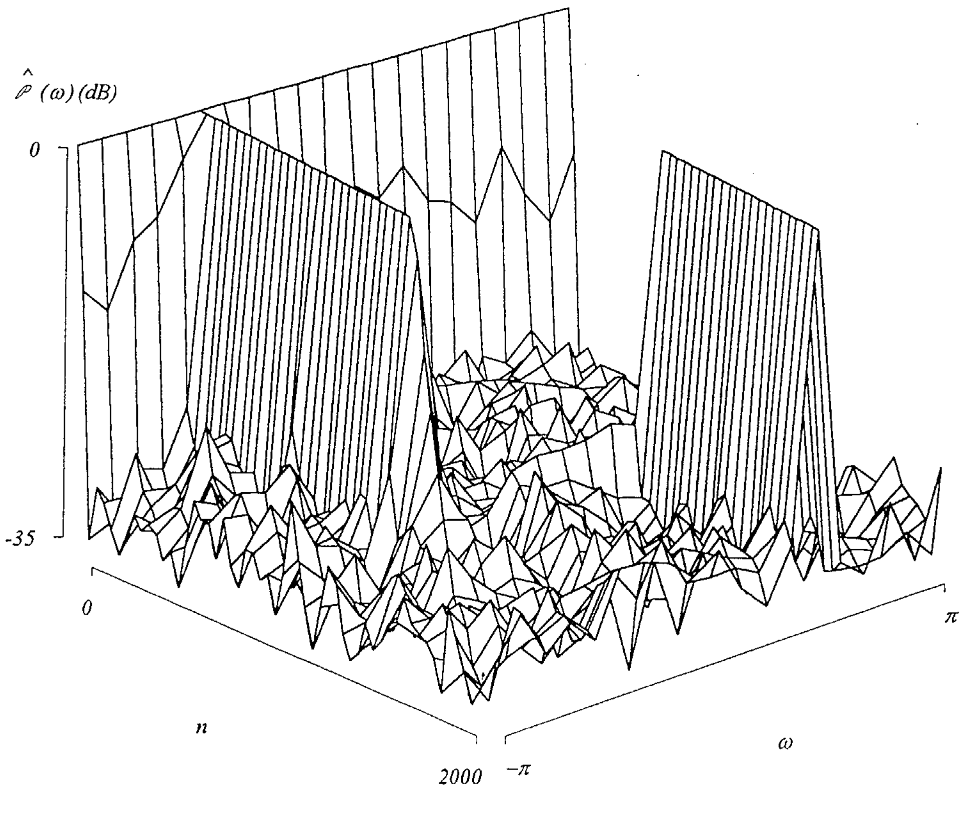

Fig. 4: Estimation du spectre: sinusoïde plus bruit.