



DETERMINATION D'UN GROUPE ADAPTE A L'ETUDE DES CHIRPS

S.PUECHMOREL et B.LACAZE

ENSEEIH-T-GAPSE 2, Rue Camichel 31071 TOULOUSE CEDEX

RÉSUMÉ

Dans de nombreux domaines du traitement du signal se pose le problème de la détermination de la loi de modulation en fréquence d'un signal. Un cas particulier d'une grande importance pratique est celui des signaux présentant une phase polynomiale d'un degré maximal connu; les paramètres à déterminer sont alors les coefficients des termes du polynôme représentant la phase. Pour arriver à ce résultat, un cadre théorique permettant d'introduire une nouvelle méthode linéaire est mis en place dans cet article.

ABSTRACT

The determination of the frequency modulation law of a given signal is a classical problem in signal processing. The special case of polynomial phase signals is of great practical interest. In that case, the relevant parameters are the coefficients of the polynom representing the phase. In order to find those parameters, a new linear transform is introduced

1. INTRODUCTION

La détermination des paramètres $\alpha_0 \dots \alpha_n$ des signaux de la forme $x(t) = A e^{i \sum_{l=0}^n \alpha_l t^l}$ est un problème important en traitement du signal, et plus particulièrement dans le domaine du radar ou du traitement des données en provenance des sondes spatiales lointaines (dans ce dernier cas on admet généralement que les signaux reçus s'apparentent à des 'chirps' linéaires -c'est à dire s'écrivant $A e^{i(a_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)}$).

Pour la résolution de ce problème, de nombreuses méthodes ont été développées, qui peuvent être regroupées en deux grandes classes : les transformations linéaires et les transformations non-linéaires. Dans cette dernière catégorie se trouvent des outils très performants comme la transformée polynomiale [1], mais qui deviennent rapidement inutilisables dès que le signal sur lequel ils sont appliqués comporte plus d'une composante. Les méthodes linéaires, en revanche, ne sont pas sensibles à ce phénomène, mais sont souvent moins efficaces.

Nous allons, dans la suite de cet article, montrer comment il est possible de construire une méthode linéaire qui

présente un niveau de performances équivalent à celui des méthodes non-linéaires. Une structure algébrique adaptée sera définie dans une première partie, puis la transformation proprement dite sera introduite dans une seconde partie. Enfin, des résultats issus de simulation seront présentés.

2. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Dans la suite, les notations employées feront toujours référence aux suivantes :

- Le corps des complexes sera noté C . Il est à noter que seule sa structure algébrique sera considérée, les opérations différentielles étant considérées comme faites sur R^2 .

- Une classe d'équivalence d'élément représentatif x sera notée $\overset{\circ}{x}$. De même, la notation $\overset{\circ}{E}$ désignera une partie d'un ensemble quotient.

- d sera la distance euclidienne dans C

Ces points de notation étant précisés, passons maintenant aux définitions de base de notre étude. Nous supposerons dans toute la suite, pour simplifier les écritures, que le signal auquel nous nous intéressons est un chirp linéaire,



soit $x(t) = Ae^{i(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)}$. Nous montrerons en fin d'article comment les résultats obtenus peuvent facilement être étendus au cas des signaux à phase polynomiale de degré quelconque connu.

Considérons tout d'abord la relation d'équivalence \mathcal{R} définie sur C par : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Soit maintenant \underline{C} l'espace quotient C/\mathcal{R} . Les éléments de \underline{C} sont des doublets $\{-z; +z\}$.

\underline{C} peut être muni d'une loi de composition additive notée \oplus telle que :

$$\overset{\circ}{x} \oplus \overset{\circ}{y} = \sqrt{\overset{\circ}{x^2 + y^2}}$$

Cette loi est associative, commutative, admet la classe d'équivalence de 0 comme élément neutre. De plus, tout élément est inversible et l'inverse de $\overset{\circ}{x}$ est (ix) . Muni de cette loi, \underline{C} est donc un groupe commutatif.

3. ETUDE DE \underline{C}

Remarquons tout d'abord que \underline{C} peut être muni d'une distance induite par la distance euclidienne d de C . Considérons à cet effet l'application $\overset{\circ}{d}$ de \underline{C}^2 dans \mathbb{R}^+ définie par :

$$\overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \min(d(x, y), d(x, -y))$$

Cette application vérifie $\overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{x}\right) = 0$ et

$\overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}\right)$ de façon évidente. Il ne reste à

vérifier que l'inégalité triangulaire, soit

$$\overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{z}\right) \leq \overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) + \overset{\circ}{d}\left(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z}\right)$$

On peut supposer sans perte de généralité que

$$d(x, z) \leq d(x, -z) ; d(x, y) \leq d(x, -y) ; d(y, z) \leq d(y, -z)$$

On se ramène alors à vérifier l'inégalité triangulaire sur d . On en conclut donc que $\overset{\circ}{d}$ est bien une distance.

On peut montrer simplement que cette distance induit la topologie quotient. Comme dans cette topologie la projection canonique de C sur \underline{C} est par définition continue, la boule unité de \underline{C} est un compact comme image d'un compact (la boule unité de C) par une application continue. Ceci implique donc que \underline{C} est localement

compact. Enfin, les boules ouvertes $B\left(\overset{\circ}{0}, \frac{1}{n}\right) ; n \in \mathbb{N}$

forment un système fondamental de voisinages de l'unité, \mathcal{V} . Pour montrer cela, le seul axiome demandant vérification est

$\forall V \in \mathcal{V} ; \exists V' \in \mathcal{V}$ tel que $V'^{-1} \oplus V' \subseteq V$. Or, en remarquant que $|\sqrt{x^2 + y^2}|^2 < |x|^2 + |y|^2$, il vient

$$B\left(\overset{\circ}{0}, \frac{1}{2n}\right)^{-1} \oplus B\left(\overset{\circ}{0}, \frac{1}{2n}\right) \subseteq B\left(\overset{\circ}{0}, \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ceci a pour conséquence, entre autres, que $\overset{\circ}{x} \oplus \overset{\circ}{y}$ est une application continue du couple $\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right)$.

Remarque : les définitions et résultats précédents se généralisent sans difficultés en prenant comme relation d'équivalence $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^n = y^n$.

4. PASSAGE DES FONCTIONS SUR C AUX FONCTIONS SUR \underline{C}

On se limitera dans un premier temps aux fonctions bornées sur C , c'est à dire aux éléments de C_b^C . On notera F_n l'application de C_b^C dans \underline{C}_b^C définie par

$$F_n : f \rightarrow \overset{\circ}{f} \text{ avec } \overset{\circ}{f}\left(\overset{\circ}{z}\right) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$

On peut alors montrer que F_n est continue de C_b^C dans \underline{C}_b^C . L'opération précédente peut être assimilée à une symétrisation de la fonction f . Pour l'utilisation pratique de la méthode, il faut également pouvoir passer d'un signal physique, qui est dans la majeure partie des cas une fonction sur \mathbb{R} , à une fonction sur C .

Parmi les méthodes applicables, il faut en distinguer une que l'on peut rapprocher des transformées quadratiques : soit $f(t)$ le signal initial. Formons la fonction $f'(x, y) = f(x)^2 \overline{f(x-y)}$. Pour $f(t) = Ae^{iat^2}$, nous obtenons $f'(x, y) = A |A|^2 e^{i(a(x^2 - y^2) + 2axy)}$. Les fonctions de cette forme seront précisément celles qui permettront de définir une transformée de Fourier sur \underline{C} .

5. CALCUL INTEGRAL SUR \underline{C}

Les considérations sur la structure de \underline{C} permettent d'affirmer qu'il existe une mesure intégrale invariante par la loi de composition \oplus [2]. Avant de déterminer cette mesure, il faut tout d'abord définir les parties mesurables de \underline{C} .



Pour cela, nous poserons qu'un ensemble de parties A_i de \underline{C} est une tribu induite si $\Pi^{-1}(A_i)$ est une tribu de C . Les tribus de parties \mathcal{R} -saturées de C induisent donc des tribus sur \underline{C} par l'application Π . On peut également remarquer qu'une mesure μ_C sur C induit une mesure $\mu_{\underline{C}}$ sur \underline{C} en posant $\mu_{\underline{C}}(A) = \mu_C(\Pi^{-1}(A))$. Ceci permet de déplacer le problème de la détermination d'une mesure invariante sur \underline{C} à celui d'une mesure invariante sur R^2 . Les calculs ne seront pas détaillés ici en raison du manque de place. Ils pourront se trouver dans [3]. La mesure obtenue est $(x^2 + y^2) dx dy$

Les espaces L^p sont, avec les remarques précédentes définis par :

$$f \in L^p \Leftrightarrow \int_{R^2} |f(x, y)|^p (x^2 + y^2) dx dy < +\infty$$

6. TRANSFORMEE DE FOURIER SUR \underline{C}

Les développements précédents permettent de construire maintenant une transformation de Fourier sur \underline{C} qui sera la transformée linéaire que nous avons évoquée. Il est nécessaire dans un premier temps de déterminer les caractères de \underline{C} , c'est à dire les solutions continues des équations suivantes [2] :

$$\chi\left(\begin{smallmatrix} \circ \\ x \oplus y \end{smallmatrix}\right) = \chi\left(\begin{smallmatrix} \circ \\ x \end{smallmatrix}\right)\chi\left(\begin{smallmatrix} \circ \\ y \end{smallmatrix}\right) ; \forall \begin{smallmatrix} \circ \\ x \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \circ \\ y \end{smallmatrix} \in \underline{C}$$

$$|\chi\left(\begin{smallmatrix} \circ \\ x \end{smallmatrix}\right)| = 1 ; \forall \begin{smallmatrix} \circ \\ x \end{smallmatrix} \in \underline{C}$$

La transformation de Fourier associée à ces caractères est alors définie par :

$$\mathcal{F}(f)(\omega_1, \omega_2) = \int_{\underline{C}} f(x, y) e^{-i(\omega_1 u + \omega_2 v)} (x^2 + y^2) dx dy$$

avec $u = x^2 - y^2$ et $v = xy$

Cette transformation présente un comportement similaire à la transformation de Fourier usuelle : elle agit sur les 'chirps' linéaires complexes (obtenus par prolongement d'un signal réel ou via la méthode de transformation non linéaire déjà évoquée) en admettant un maximum global de module pour le point (a_1, a_2) (a_1 et a_2 sont les coefficients des termes du second degré dans la phase).

La notion de filtrage peut également être redéfinie. En effet, il suffit de poser comme produit de convolution l'application bilinéaire ci-dessous :

$$f * g(z') = \int_{\underline{C}} f(z) g(z' \oplus z^{-1}) |z|^2 dx dy$$

(z est le couple (x,y))

Un filtre défini pour des signaux de \underline{C} sera caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(x,y)$. L'action d'un tel filtre sur un signal $f(x, y)$ de \underline{C} sera le produit de convolution de f par h au sens précédent.

Remarque :

Extension à des polynômes de degré supérieur.

Les définitions précédentes doivent être modifiées comme indiqué ci-dessous dans le cas d'un polynôme de degré n :

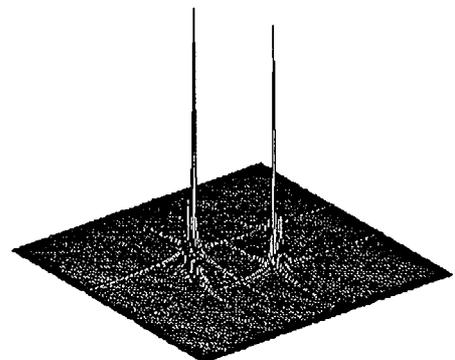
-La relation d'équivalence devient $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^n = y^n$

-La loi de composition est modifiée en

$$\begin{smallmatrix} \circ \\ x \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \circ \\ y \end{smallmatrix} = \left((x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} \right)$$

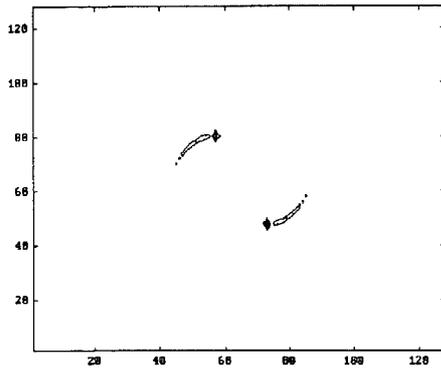
7. RESULTATS DE SIMULATIONS :

Pour les figures présentées ci-dessous, on remarquera la symétrie autour de l'origine : ceci est dû à la construction même de \underline{C} . Le signal de départ est toujours un chirp réel de coefficient de second ordre a : la méthode d'extension à \underline{C} adoptée fait que la position en x du maximum du module de la transformée est exactement a.



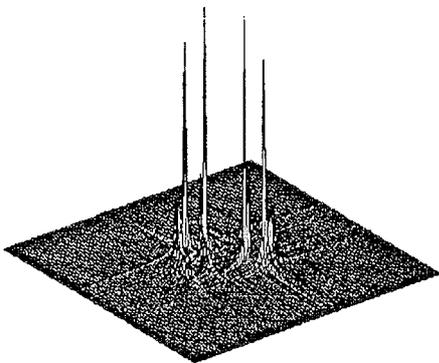
-Fig 1-

Un seul chirp linéaire sans bruit



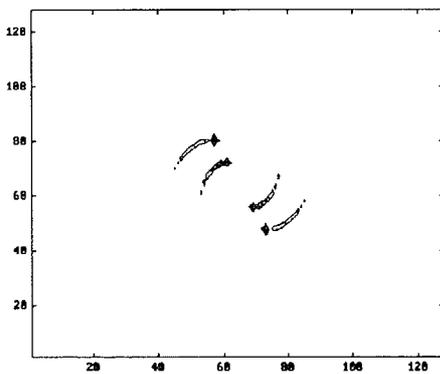
-Fig 2-

Courbes de niveau correspondant
à la situation précédente



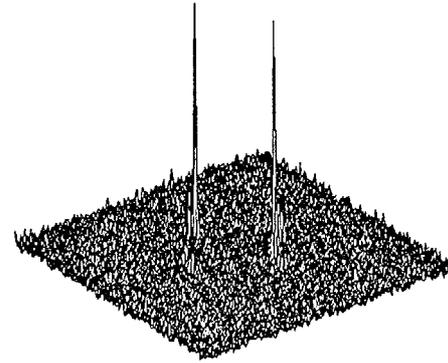
-Fig 3-

Deux composantes chirp linéaire sans bruit



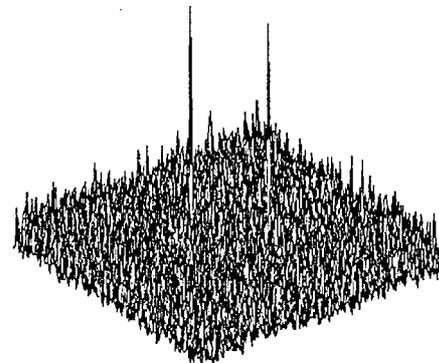
-Fig 4-

Courbes de niveau correspondant
à la figure précédente



-Fig 5-

Un seul chirp (mêmes paramètres que
pour la figure 1). Rapport signal à bruit = 0db
le bruit étant additif blanc gaussien



-Fig 6-

Même cas que pour la figure 5, mais
rapport signal à bruit = -10db

Bibliographie :

- [1] S.PELEG et B.PORAT "Estimation and classification of polynomial phase signals" IEEE Trans. Inform. Theory. Vol. 37, n° 2, Mar. 1991
- [2] M. SUGIURA "Unitary representations and harmonic analysis" North-Holland 1990
- [3] S.PUECHMOREL "Etude des transformations liées à des chemins du plan temps-fréquence" Thèse à paraître.