



## IDENTIFICATION D'UN MODELE MA PERTURBE PAR UN BRUIT ADDITIF A SUPPORT BORNE

Jean-Yves **TOURNERET** - Bernard **LACAZE**

**GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France**

### RÉSUMÉ

L'utilisation des modèles linéaires AR, MA ou ARMA s'est avérée très intéressante pour l'analyse spectrale ou la classification. Nous nous intéressons dans cet article *aux modèles MA à entrée bornée* et nous étudions un nouvel estimateur basé sur la statistique d'ordre. L'identification de modèles MA à entrée bornée s'avère très performante en absence de bruit [1]. Par contre, les performances décroissent fortement dans le cas de modèles perturbés par un bruit additif gaussien en partie à cause du biais de cet estimateur [2]. Dans cet article, nous proposons une modélisation du bruit additif sous la forme *d'un bruit à support borné* et nous présentons alors un nouvel estimateur non biaisé, appelé *estimateur O.S. modifié*, permettant l'identification de modèles MA perturbés par ce type de bruit.

### 1- INTRODUCTION

L'identification des modèles MA à l'aide de la statistique d'ordre a montré des propriétés très intéressantes [1] [2] [3]. En l'absence de bruit et pour une certaine classe d'entrée détaillée dans cet article, la statistique d'ordre permet d'obtenir des estimateurs possédant une erreur nulle avec une forte probabilité  $P\%$ , dépendant de l'ordre du modèle  $q$  et du nombre de points  $K$  [1]. En présence d'un bruit additif gaussien ou plus généralement à support borné, les performances de l'estimateur diminuent, essentiellement à cause de son biais mais restent toutefois comparables à celles obtenues avec les estimateurs des moindres carrés [2] [3]. Le but de cet article est d'étudier les performances d'un nouvel estimateur basé sur la statistique d'ordre, appelé estimateur O.S. modifié, permettant l'identification des modèles MA perturbés par un bruit additif à support borné.

### ABSTRACT

AR, MA or ARMA processes have been successfully used in many fields such as spectral analysis or classification. Many techniques like those based on Higher Order Statistics lead to identification of these models in the case of non gaussian inputs. The aim of this paper is to study bounded input MA models and a new estimator based on Order Statistics. MA model identification using Order Statistics has shown good properties in absence of noise [1]. These performances decrease for models embedded in an additive gaussian noise mainly because of the estimator bias [2]. This paper proposes to model additive noise as a bounded one and it presents an unbiased estimator, called modified O.S. estimator in the following, for identifying MA models corrupted by this kind of noise.

### 2- ESTIMATION MA

Soit  $e(k)$  et  $x(k)$  l'entrée et la sortie d'un modèle MA d'ordre  $q$  de paramètres  $b_0, b_1, \dots, b_q$ . Si  $n(k)$  désigne le bruit additif à support borné indépendant de l'entrée  $e(k)$ , le modèle est défini par les équations suivantes :

$$k = 0, 1, \dots, K-1 \quad z(k) = n(k) + x(k) \\ = n(k) + \sum_{i=0}^q b_i e(k-i) \quad (1)$$

Nous proposons alors une méthode permettant d'estimer les paramètres  $\{b_i\}$  pour une certaine classe d'entrée :  $e(k)$  est borné par son maximum  $E = \text{Max}\{e(k)\}$  tel que  $P_{\max} = P[e(k) = E] \neq 0$  [1] [2]. Afin de construire ce nouvel estimateur désigné par estimateur O.S. modifié, on considère un ensemble de  $q+2$  modèles MA d'ordre 1 appelés filtres d'analyse que l'on cascade avec le modèle MA que l'on cherche à identifier :

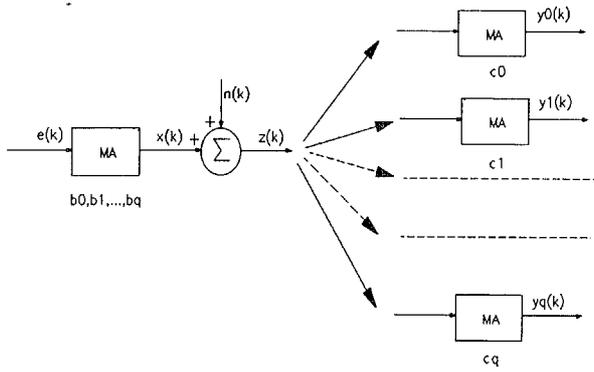


Fig 1 : modèle unidimensionnel avec filtres d'analyse

La sortie de ces filtres d'analyse notée  $y_j(k)$  vérifie l'équation suivante :

$$y_j(k) = b_0 e(k) + \sum_{i=1}^q (b_i + c_j b_{i-1}) e(k-i) + c_j b_q e(k-q-1) + n(k) + c_j n(k-1) \quad (2)$$

Dans le cas d'un bruit additif borné par son maximum  $N$ , le maximum de la sortie des filtres d'analyse est donné par :

$$\text{Max}\{y_j(k)\} = \left( |b_0| + \sum_{i=1}^q |b_i + c_j b_{i-1}| + |c_j b_q| \right) \cdot E + (1 + |c_j|)N \quad (3)$$

Désignons par  $S_j(i)$  pour  $j=0,1,\dots,q+1$ , le signe de  $(b_i + c_j b_{i-1})$  et respectivement  $S(0)$ ,  $S_j(q+1)$  les signes de  $b_0$  et de  $c_j b_q$ . L'équation (3) donne alors :

$$\frac{1}{E} \text{Max}\{y_j(k)\} = b_0 S(0) + \sum_{i=1}^q (b_i + c_j b_{i-1}) S_j(i) + (c_j b_q) S_j(q+1) + (1 + |c_j|) \frac{N}{E} \quad (4)$$

La concaténation de l'équation (4) pour  $j=0,1,\dots,q+1$  donne alors un système de  $q+2$  équations à  $q+2$  inconnues  $b_0, \dots, b_q, N$  qui peut être écrit sous la forme matricielle :

$$A \underline{b} = \underline{M} \quad (5)$$

Les éléments de la matrice  $A$  dépendent des signes  $S_j(i)$  et des paramètres des filtres d'analyse  $c_j$ . La détermination des signes  $S_j(i)$  (égaux à  $\pm 1$ ) peut se faire à l'aide d'estimations grossières des paramètres du modèle que l'on cherche à identifier, obtenues par exemple à l'aide d'un algorithme des Moindres Carrés. On suppose que ces estimations des paramètres du modèle sont suffisamment précises pour que les estimations des signes  $S_j(i)$  soient rigoureusement exactes. Il est alors possible de choisir les  $q+2$  paramètres des filtres d'analyse de façon à avoir une matrice  $A$  de rang total  $q+2$  [1]. Les maxima des sorties des filtres d'analyse sont alors estimés à partir de  $K$  échantillons  $y_j(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$  et

on notera ces estimations  $\text{Max}_k \{y_j(k)\}$  pour  $j=0,1,\dots,q+1$ .

Le système matriciel (5) devient alors :

$$A \underline{b} = \underline{\hat{M}}_k \quad (6)$$

avec

$$\underline{b} = \left[ \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q, \frac{N}{E} \right]^T$$

$$\underline{\hat{M}}_k = \frac{1}{E} [\text{Max}_k \{y_0(k)\}, \dots, \text{Max}_k \{y_{q+1}(k)\}]^T \quad (7)$$

La solution de ce système nous permet alors d'estimer les paramètres du modèle  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q$ . L'estimateur ainsi obtenu est appelé estimateur O.S. modifié. Dans un premier temps, nous montrons qu'il est possible de modéliser le bruit additif  $n(k)$  perturbant les systèmes comme un bruit à support borné puis nous étudions les performances de l'estimateur O.S. modifié pour l'identification des modèles MA perturbés par ce type de bruit.

### 3- MODELISATION DU BRUIT

Les bruits "physiques" rencontrés dans la plupart des applications sont à support borné (dynamique finie des systèmes étudiés) et donc non gaussiens. On a tendance à les modéliser par des processus gaussiens car leur densité de probabilité a la forme d'une courbe de Gauss. Nous proposons dans cette partie de modéliser le bruit additif par un bruit à support borné obtenu par transformation non linéaire d'un processus gaussien. Toute application bijective de l'ensemble des réels dans  $[-S, +S]$  permet, à partir d'échantillons gaussiens, de générer un bruit blanc à support borné. En effet, si  $g(k)$  désigne un bruit blanc gaussien, alors  $n(k) = f[g(k)]$  est un bruit blanc à support borné  $[-S, +S]$ . On montre, à l'aide d'un simple changement de variable, que la densité de probabilité de  $n(k)$  notée  $f_n(x)$ , est donnée, dans le cas d'un bruit blanc  $g(k)$  gaussien de moyenne nulle et de variance égale à  $\sigma^2$ , par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \exp\left[-\frac{[f^{-1}(x)]^2}{2\sigma^2}\right] \quad (8)$$

Une application permettant de conserver la forme des bruits "physiques" est  $f(x) = C \cdot \text{Arctg}(\alpha x)$ . Dans ce cas, l'expression analytique de la densité de probabilité du bruit  $n(k)$  est donnée par :

$$f_n(x) = \frac{1 + \text{tg}^2(x/C)}{\alpha C \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\text{tg}^2(x/C)}{2\alpha^2}\right] I_\Delta(x) \quad (9)$$

$I_\Delta(x)$  étant la fonction indicatrice sur l'intervalle  $\Delta = ]-\frac{\pi C}{2}, \frac{\pi C}{2}[$ . Cette densité de probabilité dépend de deux paramètres  $\alpha$  et  $C$ . Le premier permet de régler la forme



de la densité de probabilité  $f_n(x)$  tandis que le second permet d'ajuster le rapport signal à bruit [3]. En étudiant en détail l'expression analytique (9), on montre que lorsque  $\alpha$  se rapproche de zéro,  $f_n(x)$  s'amortit de plus en plus rapidement tandis que lorsque  $\alpha$  augmente, la densité de probabilité  $f_n(x)$  devient bimodale [3]. Le paramètre  $\alpha$  dépend bien évidemment de la nature du bruit additif considéré. Nous avons déterminé la valeur de ce paramètre dans le cas d'un bruit issu d'un brouilleur ILS [4]. La densité de probabilité du bruit a été estimée par histogramme corrigé et, bien sûr, elle est à support borné. On définit l'erreur entre deux densités  $f(k)$  et  $g(k)$ , de fonctions de répartition respectives  $F(k)$  et  $G(k)$ , avec  $k = 0, \dots, K - 1$  par :

$$\text{Sup}_{k=0, \dots, K-1} |F(k) - G(k)|$$

On peut alors déterminer le paramètre  $\alpha$  qui minimise l'erreur entre la densité expérimentale du bruit ILS et la densité théorique donnée par l'expression (9). On obtient alors  $\alpha \approx 0.27$ .

Le paramètre  $C$  permet de régler la puissance du bruit et son support qui est donné par  $[-\frac{\pi}{2}C, \frac{\pi}{2}C]$ . Dans le cas étudié ci-dessus, le support du bruit issu du brouilleur ILS a été estimé à l'aide d'un histogramme, ce qui a imposé la valeur de la constante  $C (\frac{\pi}{2}C \approx 2778.5 \Rightarrow C \approx 1768,8)$ . On obtient alors les densités de probabilité suivantes :

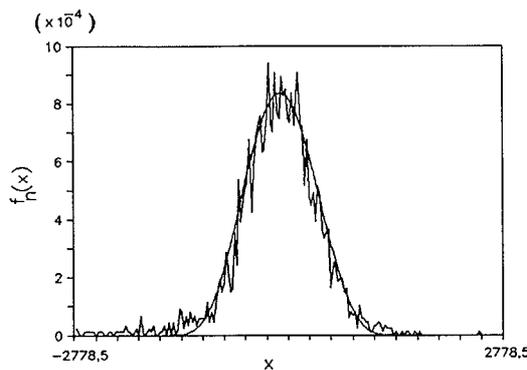


Fig 2 : Comparaison des densités de probabilité théorique et simulée pour un bruit issu d'un brouilleur ILS.

Il y a donc une bonne concordance entre ces deux densités de probabilité ce qui permet de considérer le bruit issu du brouilleur ILS comme étant la transformée par la fonction  $f(x) = C \cdot \text{Arctg}(\alpha x)$  d'un processus gaussien. On pourra trouver d'autres méthodes de génération de lois à support borné dans [5].

#### 4- EFFETS DU BRUIT

Dans cette partie, le bruit additif  $n(k)$  est à support borné indépendant de l'entrée  $e(k)$ . Afin d'étudier les performances de l'estimateur O.S. modifié, nous allons déterminer son biais et sa matrice de covariance. La statistique de la sortie des filtres d'analyse  $y_j(k)$  dépend de celle de l'entrée  $e(k)$ . On se limitera dans cette partie au cas d'une entrée binaire constituée d'échantillons indépendants prenant les valeurs  $+1$  et  $-1$  de manière équiprobable et on utilisera pour les simulations le modèle d'ordre 3 de paramètres  $b_0 = 1, b_1 = 0.2$  et  $b_2 = 0.5$ . La loi de probabilité du vecteur  $\hat{M}_K$  est difficilement calculable car ses composantes ne sont pas indépendantes. Par contre, on peut déterminer asymptotiquement celle des marginales  $\text{Max}_{x_K} \{y_i(k)\}$ . En effet, il n'existe pour le maximum d'une suite de variables aléatoires (indépendantes ou interdépendantes [6]) que trois lois asymptotiques possibles. Lorsque cette variable aléatoire est à support borné non dégénérée, son maximum possède nécessairement la troisième loi asymptotique [6] :

$$F(x) = \exp\left[-\left(\frac{\omega_K - x}{\omega_K - v_K}\right)^{k_K}\right] \text{ pour } x \leq \omega_K \quad (10)$$

avec  $v_K < \omega_K$  et  $k_K > 0$ . Il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer les paramètres  $\omega_K, v_K$  et  $k_K$  [6]. Afin de déterminer si les résultats asymptotiques peuvent s'appliquer, nous avons comparé cette densité avec celle estimée par histogramme à partir d'un signal de  $N = 10000$  points :

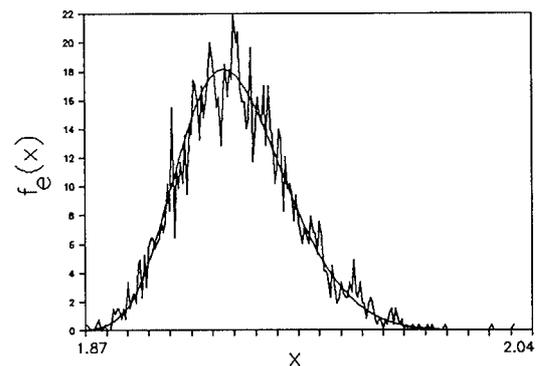


Fig 3 : comparaison des densités de probabilité simulée et théorique du maximum de la sortie d'un filtre d'analyse pour un modèle MA d'ordre 3 de paramètres  $b_0 = 1, b_1 = 0.2$  et  $b_2 = 0.5$

Les densités simulée et théorique sont très proches ce qui permet de valider l'expression (10).



### Biais de l'estimateur O.S. modifié

Pour déterminer le biais de l'estimateur O.S. modifié, il suffit alors d'utiliser la relation  $E[\underline{\hat{b}}] - \underline{b} = A^{-1}(E[\underline{\hat{M}}_K] - \underline{M})$ ,  $E[\underline{\hat{M}}_K]$  étant déterminé par intégration de l'équation (10), soit :

$$E[\underline{\hat{M}}_K] = \omega_K + (\omega_K - v_K) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k_K}\right)$$

Le paramètre  $v_K$  est le maximum caractéristique de la variable  $y_j(n)$  qui vérifie  $\lim_{K \rightarrow \infty} v_K = \text{Max}\{y_j(n)\}$ . D'autre

part, on peut vérifier que l'on a  $\lim_{K \rightarrow \infty} \omega_K = \text{Max}\{y_j(n)\}$  ce

que permet de conclure que l'estimateur O.S. modifié est asymptotiquement non biaisé.

### Matrice de Covariance de l'estimateur O.S. modifié

La détermination de la matrice de covariance de l'estimateur O.S. modifié nécessite la connaissance de celle du vecteur  $E[\underline{\hat{M}}_K]$  notée  $C_{\hat{M}}$  et de la relation :

$$E[(\underline{\hat{b}} - \underline{b})(\underline{\hat{b}} - \underline{b})^T] = A^{-1} \cdot C_{\hat{M}} \cdot (A^{-1})^T \quad (11)$$

La détermination de  $C_{\hat{M}}$  n'est pas simple car les variables  $y_j(n)$  ne sont pas indépendantes. Une approximation de cette matrice de covariance est donnée dans [2] et [3].

### Comparaison avec l'algorithme de Durbin

Dans cette dernière partie, nous comparons les performances de l'estimateur O.S. modifié à celles obtenues avec l'estimateur conventionnel de Durbin en termes de variance des estimations. Le choix du nombre de points  $K$  a été étudié en détail dans [1] et nous avons fixé  $K = 10000$  pour nos simulations. Pour un modèle MA de paramètres  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0.2$  et  $b_2 = 0.5$  on obtient :

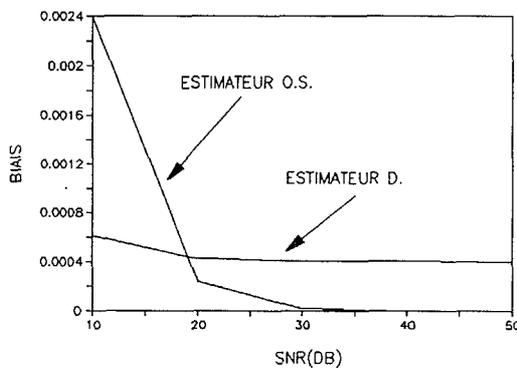


Fig 5 : variance du paramètre  $\hat{b}_1$

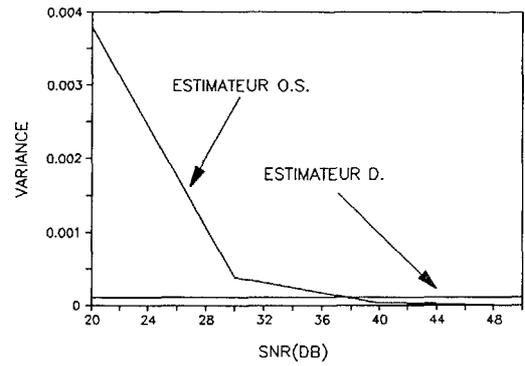


Fig 6 : variance du paramètre  $\hat{b}_2$

Fig 5 et 6 : Comparaison entre la variance de l'estimateur O.S. modifié (O.S.) et de l'estimateur de Durbin (D.)

Pour de forts rapports signal à bruit, on observe une variance plus faible pour l'estimateur O.S. modifié que pour l'estimateur de Durbin mais les résultats s'inversent pour de faibles rapports à bruit.

## 4- CONCLUSION

Nous présentons dans cet article un nouvel estimateur des paramètres de modèles paramétriques MA à entrée bornée. Après avoir proposé une modélisation des perturbations sous la forme d'un bruit additif à support borné, nous étudions les performances de l'estimateur en présence d'un tel bruit. Le comportement de l'estimateur est très satisfaisant pour de forts rapports signal à bruit mais on observe une dégradation des performances lorsque le niveau de bruit augmente.

## 5- REFERENCES

- [1] J.Y. Tourneret, and B. Lacaze, "A new estimator of Moving Average model parameters based on Order Statistics," Proc. of 26th Conf. on Info. Sciences and Systems (CISS'92), Princeton University, March 18-20, 1992.
- [2] J.Y. Tourneret, and B. Lacaze, "Study of MA Model Identification using order Statistics in the presence of noise", Proc. of 6th Conf. on Sig. Proc. (EUSIPCO'92), Brussels, August 24-27, 1992.
- [3] J.Y. Tourneret, "Contribution à l'étude de modèles ARMA non gaussiens", Thèse de docteur de l'INP de Toulouse, sept. 1992.
- [4] C. Lambert-Nebout, "Etude des moyens d'analyse du signal basse fréquence d'un récepteur d'alignement de piste", Thèse de docteur de l'INP de Toulouse, nov. 1988.
- [5] N.L. Johnson and S. Koltz, Distributions in Statistics - Continuous Univariate distributions, Vol 1, Houghton Mifflin Company, Boston, 1970.
- [6] E.J. Gumbel, Statistics of Extremes, Columbia University Press, New-York, 1958.