



Construction d'estimateurs spectraux absolument continus à partir d'estimateurs ponctuels particuliers. Application aux signaux à bande limitée.

Thierry CHONAVEL,

– Franco-Polish school of New information and Communication Technologies,
Mansfelda 4, PO box 31, 60-854 Poznań 6, Poland,
tel (48)(61)48.34.06, fax (48)(61)48.25.52

Résumé : L'estimation du spectre d'un processus stationnaire discret à valeurs complexes et à un indice est souvent effectuée à partir de la donnée d'un nombre restreint de coefficients de corrélation du processus. On rappelle la construction de spectres à densité particuliers compatibles avec les contraintes imposées par la connaissance des corrélations, à partir d'estimateurs spectraux discrets. Dans certains cas, le support du spectre constitue un sous intervalle $[-\Omega, \Omega]$ de la bande totale sélectionnée par l'échantillonnage, et on montre comment on peut étendre l'approche précédente lorsqu'on introduit la contrainte de bande limitée. On verra que les résultats obtenus suggèrent une généralisation de la notion d'estimateur de Capon au cas des signaux à bande limitée, ainsi que la construction d'une classe d'estimateurs de spectres rationnel tronqués à $[-\Omega, \Omega]$.

Abstract : Estimating the spectrum of a complex one indexed discrete process is often performed from a given finite sequence of correlation coefficients of the process. We recall here a way to build density spectra that are compatible with the correlation coefficients constraints, from a family of atomic spectra. In some application cases the spectrum to be estimated is carried by a subinterval $[-\Omega, \Omega]$ of the total bandwidth selected by sampling, and we show how the preceding approach can be handled accounting for this bandwidth constraint. Also, we show that this study suggests an extension of the notion of Capon spectral estimator for bandlimited signals, and a family of truncated to $[-\Omega, \Omega]$ rational spectral estimators.

1. Introduction

La problématique originelle qui a conduit aux résultats que l'on présente ici est liée au traitement d'antennes, où le problème de l'estimation spectrale à bande limitée de signaux complexes stationnaires discrets apparaît lorsqu'on envisage le traitement de signaux stationnaires qui satisfont à l'équation des ondes.

Rappelons tout d'abord qu'un problème d'imagerie classique en traitement d'antennes consiste à estimer le spectre spatio-temporel d'un champ stationnaire échantillonné en temps et en espace au moyen d'un réseau linéaire de capteurs équidistants. Classiquement, on est conduit à effectuer une transformée de Fourier par rapport à la variable temporelle. Le problème d'estimation du spectre à deux indices est ainsi ramené à un ensemble de problèmes d'estimation spectrale à un indice consistants pour chacune des fréquences temporelles analysées à estimer le spectre spatial correspondant.

Une classe importante de signaux est constituée de ceux qui satisfont à l'équation des ondes. Pour de tels signaux, que l'on rencontre fréquemment en acoustique sous marine ou dans le domaine hertzien, on montre que le spectre spatio-temporel possède un support limité par les droites d'équation $\varphi = -2\pi f/c$

où φ , f et c désignent respectivement la pulsation spatiale, la fréquence temporelle, et la vitesse de propagation des ondes dans le milieu considéré. Pratiquement, l'espacement entre deux capteurs consécutifs est choisi de telle sorte que le spectre spatial du signal observé ne présente pas de repliement à la fréquence temporelle maximale analysée, notée f_{\max} . En normalisant à $[-\pi, \pi]$ la bande d'échantillonnage spatial à f_{\max} , il apparaît que pour une fréquence f inférieure à f_{\max} le spectre spatial du signal occupe une sous bande $[-\pi f/f_{\max}, \pi f/f_{\max}]$ de la bande totale sélectionnée par l'échantillonnage spatial. On voit donc apparaître ici le problème de l'estimation spectrale à bande limitée.

La fréquence f étant fixée, on dispose pour estimer le spectre spatial du signal des $N+1$ premiers coefficients de corrélation complexes notés $(r_k)_{k=0, N}$ du signal à cette fréquence ($N+1$ représente ici le nombre de capteurs du réseau) et de la connaissance du support du spectre noté $[-\Omega, \Omega]$ ($\Omega = \pi f/f_{\max}$). Notons qu'on n'envisagera pas ici le problème statistique de l'estimation des corrélations des signaux à bande limitée, traité dans [2] et [4], et on supposera que les coefficients $(r_k)_{k=0, N}$ représentent les valeurs exactes des corrélations du signal.

Dans ces conditions, une approche possible de l'estimation spectrale consiste à chercher un estimateur parmi



l'ensemble des spectres compatibles avec les contraintes imposées par la connaissance des corrélations $(r_k)_{k=0,N}$ et celle du support $[-\Omega, \Omega]$. Le problème important de la caractérisation de ces spectres, dont l'ensemble est noté $\mathcal{M}(\Omega)$ est présenté dans [5] (voir aussi [2] et [3]).

Ici, on envisage un mode de construction de solutions un peu différent. Pour cela, on commencera par rappeler comment dans l'ensemble \mathcal{M} des spectres dont les premiers coefficients de corrélation sont les $(r_k)_{k=0,N}$ ($\mathcal{M} \supset \mathcal{M}(\Omega)$), on peut construire des spectres à densité en effectuant des combinaisons linéaires de spectres discrets de \mathcal{M} portés par $N+1$ points. On verra ensuite que l'on peut appliquer cette approche à la construction de spectres à densité de $\mathcal{M}(\Omega)$. Malheureusement, les estimateurs ainsi obtenus ne représentent pas une classe très générale de solutions dans la mesure où ils doivent prendre des valeurs nulles sur certains sous intervalles fixés de $[-\Omega, \Omega]$. Cependant, les spectres discrets de $\mathcal{M}(\Omega)$ que l'on aura introduit pour cette étude permettent d'étendre la notion d'estimateur spectrale de Capon. De plus, à partir de l'estimateur de Capon à bande limitée, on peut construire une famille d'estimateurs à bande limitée particuliers dont on vérifie l'intérêt sur différents types de spectres, bien qu'ils n'appartiennent pas à $\mathcal{M}(\Omega)$.

2. Construction de mesures à densité de \mathcal{M} à partir d'éléments discrets.

Rappelons que les coefficients $(r_k)_{k=0,N}$ représentent les N premiers coefficients de corrélation d'un certain spectre si et seulement si (ssi) la matrice de Toeplitz $R_N = (r_{m-n})_{(m,n)=0,N}$ ($r_{-k} = \bar{r}_k$) est positive, ou de façon équivalente ssi les coefficients de réflexion $(k_n)_{n=1,N}$ définis à partir des $(r_k)_{k=0,N}$ possèdent tous un module inférieur ou égal à un. Notons que si $|k_n| = 1$ ($n \leq N$), \mathcal{M} se réduit à un unique élément de support discret porté par n points. Dans toute la suite, on supposera que l'on dispose d'une séquence $(r_n)_{n=0,N}$ telle que $|k_n| < 1$, $\forall n \leq N$. Dans ces conditions, le support de tout élément de \mathcal{M} comporte au moins $N+1$ points. C'est à l'ensemble de ces éléments de \mathcal{M} de supports minimaux, noté \mathcal{M}_c , que l'on va maintenant s'intéresser.

Pour caractériser \mathcal{M}_c , commençons par rappeler que les polynômes orthogonaux de Szegő de première espèce associés à la séquence $(r_n)_{n=0,N}$ s'écrivent à partir des récurrences de Levinson $Q_{n+1}(z) = zQ_n(z) - k_{n+1}Q_n^*(z)$ ($Q_0(z) = 1$, $Q_n^*(z) = z^n \bar{Q}_n(1/\bar{z})$). Par ailleurs, l'ensemble des coefficients complexes r_{N+1} tels que $(r_k)_{k=0,N+1}$ représente une séquence de coefficients de corrélations est le disque fermé $\bar{E} = \{r_{N+1} = e_N + \sigma_N^2 k_{N+1} / |k_{N+1}| \leq 1\}$ de rayon σ_N^2 égal à l'erreur de prédiction à l'étape N de l'algorithme de Levinson et de centre $e_N = -\sum_{k=1,N} q_{k,N} r_{N+1-k}$ ($Q_N(z) = z^N + \sum_{k=1,N} q_{k,N} z^{N-k}$).

Un élément de \mathcal{M} appartient à \mathcal{M}_c ssi il définit un coefficient de réflexion d'ordre $N+1$ de module égal à un, et il apparait qu'il existe une correspondance bijective entre la frontière $\partial \bar{E}$ de \bar{E} et \mathcal{M}_c . Désignons par μ une mesure spectrale de \mathcal{M}_c , et $k_{N+1}(\mu)$ le coefficient de réflexion correspondant. Pour un tel élément l'erreur de prédiction à l'ordre $N+1$ est $\sigma_{N+1}^2 = \sigma_N^2(1 - |k_{N+1}|^2) = 0$. Or, on a également

$$\sigma_{N+1}^2 = 1/2\pi \int_{[-\pi, \pi]} |Q_{N+1, \mu}(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta), \quad (2-1)$$

avec $Q_{N+1, \mu}(z) = zQ_N(z) - k_{N+1}(\mu)Q_N^*(z)$. Il apparait donc que les points de masse de μ sont les solutions θ de l'équation $B_N(e^{i\theta}) = k_{N+1}(\mu)$, avec $B_N(z) = zQ_N(z)/Q_N^*(z)$. On remarquera que $B_N(z)$ est la fonction de transfert d'un filtre déphaseur pur et possède donc un module égal à un en tout point du cercle unité. De plus, $B_N(z)$ s'écrit comme le produit de $N+1$ transformations conformes de la forme $(z-\alpha)/(1-\bar{\alpha}z)$, avec $|\alpha| < 1$; donc lorsque z parcourt le cercle unité dans le sens direct, $B_N(z)$ parcourt $N+1$ fois le cercle unité dans le même sens. Il en résulte immédiatement que deux éléments de \mathcal{M}_c distincts ont des supports entrelacés; c'est à dire qu'entre deux points de masse d'une mesure de \mathcal{M}_c , toute autre mesure de \mathcal{M}_c possède un et un seul point de masse, et qu'à tout point θ de $[-\pi, \pi[$ correspond une unique mesure de \mathcal{M}_c qui charge ce point et qui définit un coefficient de réflexion d'ordre $N+1$ égal à $e^{i\alpha} = B_N(e^{i\theta})$. On notera $\mu_{e^{i\alpha}}$ cette mesure.

De plus, si $\mu \in \mathcal{M}_c$ s'écrit $\sum_{k=1, N+1} \rho_k \delta_{\theta_k}(\theta)$, on montre (eg. [7]) que

$$\rho_k = \frac{1}{\sum_{n=0,N} |Q_n^*(e^{i\theta_k})|^2 / \sigma_n^2} = \frac{1}{\underline{d}(\theta_k)^* R_N^{-1} \underline{d}(\theta_k)} \quad (2-2)$$

avec $\underline{d}(\theta) = [1, e^{i\theta}, \dots, e^{iN\theta}]^T$. On voit donc que la masse en un point θ de la mesure de \mathcal{M}_c qui charge θ est en fait égale, à un coefficient multiplicatif près, à la valeur en ce point de l'estimateur spectral de Capon (eg. [6]), dont la densité est donnée par $S(\theta) = (N+1)[\underline{d}(\theta_k)^* R_N^{-1} \underline{d}(\theta_k)]^{-1}$. Notons que cet estimateur n'appartient pas à \mathcal{M}_c .

Indiquons maintenant comment on peut construire des estimateurs à densité de \mathcal{M} en considérant des combinaisons linéaires convexes d'éléments de \mathcal{M}_c . On désigne par λ^φ la mesure positive définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$\lambda^\varphi(\mathcal{B}) = \int_{[-\pi, \pi]} \varphi(e^{i\alpha}) \mu_{e^{i\alpha}}(\mathcal{B}) d\alpha \quad (2-3)$$

pour tout borélien \mathcal{B} de $[-\pi, \pi[$, où φ est une fonction positive définie sur le cercle unité dont l'intégrale sur $[-\pi, \pi[$ vaut 1. On montre alors que λ^φ est un élément de \mathcal{M} dont la densité est donnée par

$$f(\theta) = 2\pi \varphi[B_N(e^{i\theta})] \frac{\sigma_N^2}{|Q_N^*(e^{i\theta})|^2} \quad (2-4)$$

En particulier, pour $\varphi(e^{i\alpha}) = 1/2\pi \forall \alpha$, on retrouve l'estimateur AR du maximum d'entropie.

Remarquons qu'on peut généraliser cette approche: en prenant pour φ non plus des fonctions positives mais des distributions définies par des mesures positives. Cependant, il n'est pas possible d'obtenir ainsi tous les éléments de \mathcal{M} (eg. les mesures de \mathcal{M} portées par $N+2$ points).

3. Application aux signaux à bande limitée.

Rappelons tout d'abord que la séquence $(r_k)_{k=0,N}$ représente les $N+1$ premiers coefficients de corrélation d'un certain spectre porté par $[-\Omega, \Omega]$ ($0 < \Omega < \pi$) ssi les matrices de



Toeplitz $R_N=(r_{m-n})_{(m,n)=0,N}$ et $R_{N-1}=(r_{m-n})_{(m,n)=0,N-1}$, avec $r'_n=r_{n+1}+r_{n-1}-2r_n \cos \Omega$, ($n=0,N-1$) sont toutes deux positives [7], [1]. Lorsque R_N et R_{N-1} sont positives mais que l'une d'elle au moins est singulière, l'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ des spectres portés par $[-\Omega,\Omega]$ et de premières corrélations données par $(r_k)_{k=0,N}$ se réduit à un spectre de raies. on supposera dans la suite que $R_N>0$ et $R_{N-1}>0$.

3-1) extensions à un pas de la séquence $(r_k)_{k=0,N}$.

De même que dans \mathcal{M} on a défini l'ensemble \mathcal{M}_c des mesures qui définissent une matrice R_{N+1} singulière, on note $\mathcal{M}_c(\Omega)$ le sous ensemble de $\mathcal{M}(\Omega)$ dont les éléments ont leurs $N+1$ premières corrélations $(r_k)_{k=0,N+1}$ qui définissent des matrices de Toeplitz positives $R_{N+1}=(r_{m-n})_{(m,n)=0,N+1}$ et $R'_N=(r_{m-n})_{(m,n)=0,N}$ dont l'une au moins est singulière. Les coefficients de corrélation r_{N+1} correspondants sont en bijection avec $\mathcal{M}_c(\Omega)$.

Lorsque R_{N+1} est singulière, r_{N+1} appartient à la frontière $\partial \bar{E}$ du disque \bar{E} défini précédemment. Dans le cas où la matrice R'_N est singulière, le coefficient $r'_N=r_{N+1}+r_{N-1}-2r_N \cos \Omega$ appartient à la frontière du disque \bar{E}' de rayon σ_{N-1}^2 et de centre e_{N-1} , ($\sigma_{N-1}^2, e_{N-1}, Q'_n(z), \dots$ représentent l'analogie de $\sigma_N^2, e_N, Q_n(z), \dots$ mais relativement à la séquence $(r'_k)_{k=0,N-1}$). De façon équivalente, r_{N+1} appartient à la frontière $\partial \bar{F}$ du disque fermé \bar{F} de centre $f_N=e_{N-1}-r_{N-1}+2r_N \cos \Omega$, et de rayon σ_{N-1}^2 .

L'intersection des disques \bar{E} et \bar{F} représente les valeurs de r_{N+1} qui sont les $N+1$ èmes coefficients de corrélation des éléments de $\mathcal{M}(\Omega)$. On montre de plus que les cercles $\partial \bar{E}$ et $\partial \bar{F}$ se coupent aux points $e_N+\sigma_N^2 B_N(e^{-i\Omega})$ et $e_N+\sigma_N^2 B_N(e^{i\Omega})$ ($B_N(e^{-i\Omega}) \neq B_N(e^{i\Omega})$) dès lors que $R_N>0$ et $R_{N-1}>0$.

3-2) caractérisation des éléments de $\mathcal{M}_c(\Omega)$.

Lorsque R_{N+1} est singulière, r_{N+1} appartient à l'arc $\{\varepsilon_N+\sigma_N^2 k_{N+1}/k_{N+1} \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]\}$ où $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ représente l'arc du cercle unité qui joint $\varepsilon_1=B_N(e^{-i\Omega})$ à $\varepsilon_2=B_N(e^{i\Omega})$ dans le sens direct, et l'élément correspondant de $\mathcal{M}_c(\Omega)$ appartient en fait à \mathcal{M}_c , et est donc porté par $N+1$ points de $[-\Omega, \Omega]$. Notons de plus que lorsque k_{N+1} décrit $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ les points de masse θ des éléments de $\mathcal{M}_c(\Omega)$ correspondants donnés par $k_{N+1}=B_N(e^{i\theta})$ appartiennent à un sous ensemble A de $[-\Omega, \Omega]$ constitué de $N+1$ intervalles, et tel que $\{-\Omega, \Omega\} \in A$.

Lorsque R'_N est singulière et que R_{N+1} est strictement positive, $r_{N+1} \in \text{Int}(\bar{E}) \cap \partial \bar{F}$. Comme $r_{N+1}=e_N+\sigma_N^2 k_{N+1}$ et $r_{N+1}=f_{N-1}+\sigma_{N-1}^2 k'_N$, il vient que $k_{N+1}=a+b k'_N$, avec $a=(e_N-f_{N-1})/\sigma_{N-1}^2$ et $b=\sigma_N^2/\sigma_{N-1}^2$, et la condition $r_{N+1} \in \text{Int}(\bar{E}) \cap \partial \bar{F}$ se traduit par l'appartenance de k'_N à l'arc $]\varepsilon'_2, \varepsilon'_1[=](\varepsilon_2-a)/b, (\varepsilon_1-a)/b[$ du cercle unité. Pour caractériser les éléments de $\mathcal{M}_c(\Omega)$ ainsi obtenus, commençons par remarquer que si μ est un tel élément, la mesure positive μ' définie par

$$d\mu'(\theta) = 2[\cos \theta - \cos \Omega] d\mu(\theta) \quad (3-1)$$

admet les coefficients $(r'_k)_{k=0,N}$ pour $N+1$ premiers coefficients de Fourier. On peut alors de montrer que μ' est portée par les N racines de l'équation $B'_N(e^{i\theta})=k'_N$, et que μ est portée par les points de masse de μ' d'une part, et par $-\Omega$ et Ω d'autre part. Par analogie avec les résultats de la section II, il apparait que μ' est de la forme $\sum_{k=1,N} \rho'_k \delta_{\theta'_k}$. Ses points de masse θ'_k sont les

solutions de l'équation $B'_N(e^{i\theta})=k'_N$, et $\rho'_k = [d'(\theta_k)^* R_{N-1}^{-1} d'(\theta_k)]^{-1}$, avec $d'(\theta) = [1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(N-1)\theta}]^T$. Par suite,

$$\mu = \sum_{k=1,N} \frac{\rho_k}{2[\cos(\theta_k) - \cos \Omega]} \delta_{\theta'_k} + \rho_{-\Omega} \delta_{-\Omega} + \rho_{\Omega} \delta_{\Omega}, \quad (3-2)$$

et les valeurs de $\rho_{-\Omega}$ et de ρ_{Ω} s'obtiennent aisément en identifiant les $(r_k)_{k=0,N}$ aux premiers coefficients de Fourier de la mesure μ .

On montre que lorsque k'_N décrit l'arc $]\varepsilon'_2, \varepsilon'_1[$, les points de masse solutions de $k'_N=B_N(e^{i\theta})$ décrivent l'ensemble $B=[-\Omega, \Omega]-A$. Finalement, que pour tout point θ de $[-\Omega, \Omega]$, il existe une unique mesure de $\mathcal{M}_c(\Omega)$. Si $\theta \in A$, on notera cette mesure $\mu_{e^{i\alpha}}^A$, avec $e^{i\alpha}=B_N(e^{i\theta})$ et si $\theta \in B$, on la notera $\mu_{e^{i\alpha}}^B$ avec $e^{i\alpha}=B_N(e^{i\theta})$.

3-3) Spectres à densité de $\mathcal{M}(\Omega)$.

Suivant le principe développé dans la section 2, on peut chercher à construire des estimateurs à densité de $\mathcal{M}(\Omega)$ en effectuant une combinaison linéaire convexe des éléments de $\mathcal{M}_c(\Omega)$. D'après les résultats de la section 3-2), il vient que les mesures que l'on cherche sont définies par des relations de la forme

$$\lambda^{\varphi_1, \varphi_2}(\mathcal{B}) = \int_{[\phi_1, \phi_2]} \varphi_1(e^{i\alpha}) \mu_{e^{i\alpha}}^A(\mathcal{B}) d\alpha + \int_{[\phi'_2, \phi'_1]} \varphi_2(e^{i\alpha}) \mu_{e^{i\alpha}}^B(\mathcal{B}) d\alpha \quad (3-3)$$

pour tout borélien \mathcal{B} de $[-\Omega, \Omega]$, avec $\varepsilon_j = e^{i\phi_j}$, et $\varepsilon'_j = e^{i\phi'_j}$ ($j=1,2$), et où φ_1 et φ_2 sont des fonctions positives telles que

$$\int_{[\phi_1, \phi_2]} \varphi_1(e^{i\alpha}) d\alpha + \int_{[\phi'_2, \phi'_1]} \varphi_2(e^{i\alpha}) d\alpha = 1 \quad (3-4)$$

Remarquons que dès lors que φ_2 est non nulle sur un sous ensemble de mesure non nulle de $[\phi'_2, \phi'_1]$, $\lambda^{\varphi_1, \varphi_2}(\{-\Omega\}) > 0$ et $\lambda^{\varphi_1, \varphi_2}(\{\Omega\}) > 0$ car les éléments $\mu_{e^{i\alpha}}^B$ de $\mathcal{M}_c(\Omega)$ chargent tous $-\Omega$ et $+\Omega$. Par suite, $\lambda^{\varphi_1, \varphi_2}$ est absolument continue ssi $\varphi_2(e^{i\theta})$ est nulle presque partout sur $[\phi_2, \phi_1]$. On a alors

$$\lambda^{\varphi_1, \varphi_2}(\mathcal{B}) = \lambda^{\varphi_1}(\mathcal{B}) = \int_{[\phi_1, \phi_2]} \varphi_1(e^{i\theta}) \mu_{e^{i\theta}}(\mathcal{B}) d\theta \quad (3-5)$$

Malheureusement, le support de ces mesures est réduit au sous ensemble A de $[-\Omega, \Omega]$, et constitue donc une classe de mesures trop spécifiques de $\mathcal{M}(\Omega)$ pour pouvoir être utilisée dans des applications pratiques.

3-4) Estimateur de Capon à bande limitée.

De la même manière que l'on peut définir l'estimateur de Capon à partir des éléments de \mathcal{M}_c , on définit l'estimateur de Capon sur $[-\Omega, \Omega]$ comme le spectre à densité dont la valeur en tout point θ de $[-\Omega, \Omega]$ est égale à la masse en θ de l'estimateur de $\mathcal{M}_c(\Omega)$ qui charge θ . Sa densité est donc donnée par la fonction

$$S_{\Omega}(\theta) = \frac{1_A(\theta)}{d(\theta_k)^* R_N^{-1} d(\theta_k)} + \frac{1_B(\theta)}{[\cos \theta_k - \cos \Omega] (d'(\theta_k)^* R_{N-1}^{-1} d'(\theta_k))} \quad (3-6)$$

Cet estimateur du spectre, défini sur $[-\Omega, \Omega]$, est continu et sa valeur en tout point est d'un calcul aisé.



4. Construction heuristique d'un estimateur particulier.

On sait que les estimateurs spectraux de Capon et du maximum d'entropie associés à une séquence de corrélations $(r_k)_{k=0,N}$ s'écrivent respectivement

$$f_{N+1}(\theta) = (N+1) \left[\sum_{k=0,N} \frac{|Q_k^*(e^{i\theta})|^2}{\sigma_k^2} \right]^{-1} \text{ et } f_1(\theta) = \frac{\sigma_N^2}{|Q_N^*(e^{i\theta})|^2} \quad (4-1)$$

Entre ces deux situations, on peut construire un ensemble d'estimateurs intermédiaires de la forme

$$f_n(\theta) = n \left[\sum_{k=N-n+1,N} \frac{|Q_k^*(e^{i\theta})|^2}{\sigma_k^2} \right]^{-1} \quad (n=1, N-1). \quad (4-2)$$

Les estimateurs de Capon et du maximum d'entropie ont respectivement un bon comportement en termes de variance et de résolution [6], et l'intérêt des estimateurs $f_n(\theta)$ est de présenter un compromis entre ces deux qualités. Notons enfin que $1/f_n(\theta)$ est obtenu en moyennant les inverses des $N-n+1$ estimateurs AR du spectre d'ordres compris entre n et N .

A partir de cette idée de moyennage, on va présenter un estimateur spectral associé à une séquence de corrélations $(r_k)_{k=0,N}$ d'un signal de bande limitée à $[-\Omega, \Omega]$. Pour cela, commençons par remarquer que les $(r_k)_{k=0, N-1}$ sont les premiers coefficients de corrélation des mesures de densité respectives $g_1(\theta) = 2[\cos\theta - \cos\Omega] \sigma_N^2 / |Q_N^*(e^{i\theta})|^2$ et $g_2(\theta) = \sigma_{N-1}^2 / |Q_{N-1}^*(e^{i\theta})|^2$. On considère alors l'estimateur spectral associé à la séquence $(r_k)_{k=0, N-1}$ de densité $f(\theta) = 2[g_1(\theta)^{-1} + g_2(\theta)^{-1}]^{-1} 1_{[-\Omega, \Omega]}(\theta)$.

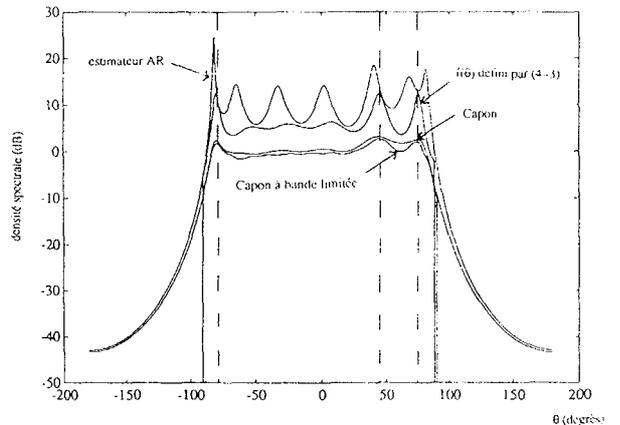
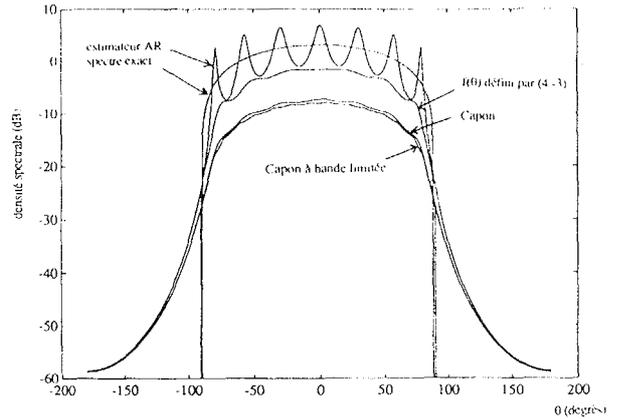
En prenant en compte la relation (3-1), On obtient alors l'estimateur de la densité $f(\theta) = f(\theta) / 2[\cos\theta - \cos\Omega]$ du spectre associé à la séquence $(r_k)_{k=0, N}$

$$f(\theta) = \frac{1_{[-\Omega, \Omega]}(\theta)}{\frac{|Q_N^*(e^{i\theta})|^2}{\sigma_N^2} + 2[\cos\theta - \cos\Omega] \frac{|Q_{N-1}^*(e^{i\theta})|^2}{\sigma_{N-1}^2}} \quad (4-3)$$

Bien que les considérations qui ont conduit à la définition de cet estimateur spectral soient très empiriques, les simulations effectuées sur différents types d'exemples conduisent à des résultats très satisfaisants.

5. Exemples

On a simulé les estimateurs étudiés sur deux types de spectres définis par $d\mu_1(\theta) = 1_{[-\Omega, \Omega]}(\theta) (\cos\theta - \cos\Omega) d\theta$, et $d\mu_2(\theta) = 1_{[-\Omega, \Omega]}(\theta) + \delta_{-80^\circ}(\theta) + \delta_{45^\circ}(\theta) + \delta_{75^\circ}(\theta)$. On se fixe $\Omega = \pi/2$ et on suppose connues les 8 premières corrélations des spectres étudiés. On a représenté les estimateurs de Capon classiques et à bande limitée $S(\theta)$ et $S_\Omega(\theta)$, l'estimateur du maximum d'entropie $f_1(\theta)$ et l'estimateur $f(\theta)$ défini par (4-3)



Références :

- [1] K.S.Arun, L.E. Potter, "existence and Uniqueness of Band Limited, Positive Semi Definite extrapolations", *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Processing*, vol.ASSP-38, n°3 pp547-549, Mars 1990.
- [2] Th. CHONAVEL, *Estimation Spectrale à Bande Limitée et Traitement d'Antenne*, document de thèse, Télécom Paris, 1993.
- [3] Th. CHONAVEL, Ph. LOUBATON, Extension à Bande Limitée d'une Suite de Corrélations Contiguës, *actes du Treizième colloque GRETSI*, pp.381-384, septembre 1991.
- [4] Th. CHONAVEL, Ph. LOUBATON, Estimation of the autocorrelation coefficients of bandlimited signals. Application to the sources localisation problem, *Actes du congrès EUSIPCO*, pp1825-1828, 1992.
- [5] Th. CHONAVEL, Ph. LOUBATON, On the Realization of Band-Limited Power Spectra, accepté pour publication à *IEEE Trans. Inf. Theory*.
- [6] S. M. KAY, *Modern Spectral Estimation, Theory and Applications*, Prentice Hall, 1988.
- [7] KREIN & NUDEL'MAN, *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, Transl. Math. Monographs 50, American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1977.