QUATORZIEME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS - DU 13 AU 16 SEPTEMBRE 1993

REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DE LA RÉPONSE DE SYSTÈMES LINÉAIRES À DES SIGNAUX DÉFINIS SUR DES INTERVALLES

P. Danès, L. Travé-Massuyès et J. Aguilar-Martin

Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S.
7, avenue du Colonel Roche
31 077 Toulouse Cedex

RÉSUMÉ

Nous proposons une méthode permettant de déterminer la réponse d'un système linéaire invariant continu tel que chaque composante de l'état initial est située dans un intervalle, à une entrée connue sous la forme d'une séquence d'intervalles. La propriété, souhaitable, de normalité est brièvement énoncée, ainsi que l'adjonction des hypothèses supplémentaires qu'elle requiert. Le cas des systèmes du premier et second ordre est étudié extensivement et tous les éléments nécessaires à la simulation sont fournis.

ABSTRACT

This paper proposes a method for computing the response of a linear time-invariant dynamic system, whose initial state is known in terms of intervals, to a sequence of intervals. The desirable property of normality is briefly stated, as well as the hypotheses to be added. First order and second order systems are extensively studied, and all the elements necessary to run a simulation are provided.

1. INTRODUCTION

L'analyse des systèmes linéaires est basée sur la représentation des signaux et des relations entre les entrées et les sorties. Les signaux sont traditionnellement décrits comme des fonctions continûment dérivables du temps prenant leurs valeurs sur la droite réelle ou, dans le cas multidimensionnel, dans un espace vectoriel défini sur le corps des réels.

L'introduction de techniques qualitatives dans l'étude des systèmes dynamiques [1][2][3] a entraîné une nouvelle représentation des signaux : dans ces formalismes, ils sont considérés comme des séquences de symboles correspondant à des intervalles de la droite réelle, issus d'une partition de leur domaine de définition, auxquels on peut affecter une sémantique liée au fonctionnement du système étudié. Ainsi, si on représente la température de l'eau d'usage domestique en respectant d'une part les valeurs singulières physiques, 0 et 100 degrés, et, d'autre part, des limites liées aux sensations, 18 degrés, 30 degrés, 50 degrés, son évolution au cours du temps est décrite par des intervalles de la forme $[0,18]$, $[18,30]$, $[30,50]$, etc...

Il n'existe pas de théorie globale permettant de représenter la réponse de systèmes dynamiques linéaires à des signaux d'entrée définis uniquement par leur appartenance à des segments, mais ceci est essentiel pour pouvoir faire cohabiter des modèles de représentation ou de simulation de type numérique et de type qualitatif. La nécessité de cette cohabitation est particulièrement évidente pour les tâches de supervision ou de diagnostic de systèmes dynamiques, pour lesquelles on a souvent recours à des techniques de l'Intelligence Artificielle permettant de manipuler des informations symboliques, mieux adaptées pour exprimer des connaissances globales ou imprécises [4].

Nous proposons ici une analyse complète des réponses de systèmes linéaires invariants représentables par des fonctions de transfert rationnelles, soumis à des signaux qualitatifs du type séquence de segments de $\Re$. Après avoir formalisé le problème, nous montrons sous quelles hypothèses et de quelle manière peut être déterminée la réponse d'un tel bloc numérique à ce type d'entrées. Le cas des systèmes élémentaires du premier et du second ordre est traité extensivement. Enfin, nous discutons les résultats obtenus et suggérons quelques prospectives de recherche.

2. POSITION DU PROBLÈME

Le système dynamique auquel est appliquée une entrée qualitative est, dans toute la suite, linéaire invariant mono-entrée mono-sortie, commandable et observable. Nous préférons à la fonction de transfert rationnelle

$$F(p) = \frac{c_m p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \cdots + c_1 p + c_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \tag{1}$$

la représentation d'état *canonique compagne de commande* qui lui est alors équivalente, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & CX(t) \end{array} \right. \tag{2}$$

en vue de rendre notre problème local : en effet, comme le vecteur d'état résume à tout instant le passé du système, pour connaître sa sortie à t, il faut se donner le vecteur d'état à un instant antérieur t^- ainsi que l'entrée sur l'intervalle $[t^-, t]$.

Soit $\Xi(t)$ l'ensemble des vecteurs $X(t)$ vérifiant (2). Nous supposons que le vecteur d'état à l'instant initial t_0 est déterminé qualitativement, c'est à dire que $\Xi(t_0)$ est un hyperparallélépipède rectangle[1] de la forme

$$\Xi(t_0)=\left\{\begin{pmatrix} x_1(t_0)\\ \vdots \\ x_n(t_0)\end{pmatrix}\in\Re^n : \forall i\in[1,n]_{\mathcal{N}}, x_i^-(t_0)\le x_i(t_0)\le x_i^+(t_0)\right\}. \quad (3)$$

Notre problème consiste à obtenir une représentation qualitative des composantes du vecteur d'état et de la sortie atteignables à un instant ultérieur t_1, pour une commande $u(t)$ donnée à certains instants de $[t_0, t_1]$ en termes d'intervalles. Nous rajoutons toutefois l'hypothèse, que nous discuterons ultérieurement, selon laquelle à tout instant t, $u(t)$ est comprise entre une enveloppe inférieure $u^-(t)$ et une enveloppe supérieure $u^+(t)$ continues par morceaux.

Dans un premier temps, nous ne recherchons que les valeurs extremales de la $j^{\text{ème}}$ composante de $X(t_1)$, notées $x_j^-(t_1)$ et $x_j^+(t_1)$, la méthode conduisant aux extrema de la sortie $y^-(t_1)$ et $y^+(t_1)$ étant semblable en tous points.

3. SYSTÈME D'ORDRE n

A. Rappels

En posant $\delta_j^T = (\, 0 \;\ldots\; \overset{j}{\overset{\downarrow}{1}} \;\ldots\; 0\,)$, la $j^{\text{ème}}$ composante de $X(t_1)$ s'écrit comme la somme du régime libre $x_j^l(t_1)$, qui traduit le contribution de l'état initial, et du régime forcé $x_j^f(t_1)$, qui ne dépend que de l'entrée entre les instants t_0 et t_1, avec $x_j^l(t_1) = \delta_j^T e^{A(t_1-t_0)}X_0$ et $x_j^f(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \delta_j^T e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$. Ces deux parties étant indépendantes, le maximum et le minimum de leur somme sont égaux à, respectivement, la somme de leur maxima et minima.

Pour le calcul de ces grandeurs, nous ferons implicitement référence aux deux propriétés triviales suivantes de la fonction max :

Propriété 1: Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux intervalles quelconques de $\Re$, et $\mathcal{E}+\mathcal{F}$ l'ensemble défini par $\mathcal{E}+\mathcal{F} = \{x\in\Re : \exists(y_1,y_2)\in\mathcal{E}\times\mathcal{F},\ x=y_1+y_2\}$; on peut écrire

$$\max\{\mathcal{E}+\mathcal{F}\} = \max\{\mathcal{E}\} + \max\{\mathcal{F}\} \qquad (4)$$

Propriété 2: Soit $\mathcal{E}$ un intervalle quelconque de $\Re$, λ un réel, et $\lambda.\mathcal{E}$ l'ensemble défini par $\lambda.\mathcal{E} = \{x\in\Re : \exists y\in\mathcal{E},\ x=\lambda.y\}$; $\max\{\lambda.\mathcal{E}\}$ s'écrit de deux manières différentes, selon le signe de λ :

$$\max\{\lambda.\mathcal{E}\} \;=\; \begin{matrix} \lambda.\max\{\mathcal{E}\} & si\lambda\ge 0\\ \lambda.\min\{\mathcal{E}\} & si\lambda\le 0\end{matrix} \qquad (5)$$

et au lemme ci-dessous :

Lemme 3: Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de la droite réelle, f et g deux fonctions de $\mathcal{I}$ à valeurs dans $\Re$ telles que

- f et g sont intégrables sur $\mathcal{I}$,
- Il existe deux fonctions continues par morceaux g^- et g^+ vérifiant l'inégalité $\forall\, t\in\mathcal{I},\ g^-(t)\le g(t)\le g^+(t)$;

si $\mathcal{I}^-$ et $\mathcal{I}^+$ désignent les sous-ensembles[2] de $\mathcal{I}$ pour lesquels $f(t)$ est négative ou positive, respectivement, i.e. si

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}^- &=& \{t\in\mathcal{I} : f(t)\le 0\}\\ \mathcal{I}^+ &=& \{t\in\mathcal{I} : f(t)\ge 0\}\end{array}$$

alors les inégalités

$$\begin{array}{c} \int_{\mathcal{I}^-} f(t)\,g^+(t)\,dt + \int_{\mathcal{I}^+} f(t)\,g^-(t)\,dt \le \int_{\mathcal{I}} f(t)\,g(t)\,dt\\ \text{et}\\ \int_{\mathcal{I}} f(t)\,g(t)\,dt \le \int_{\mathcal{I}^-} f(t)\,g^-(t)\,dt + \int_{\mathcal{I}^+} f(t)\,g^+(t)\,dt \end{array} \qquad (6)$$

sont satisfaites.

Preuve :
Pour démontrer la seconde inégalité $\int_{\mathcal{I}} fg \le \int_{\mathcal{I}^+} fg^+ + \int_{\mathcal{I}^-} fg^-$, il suffit de remarquer que

$$\forall t\in\mathcal{I},$$
$$\forall g : g^-(t)\le g(t)\le g^+(t),$$

$$\begin{array}{lclcl} f(t)g(t)\le f(t)g^+(t) & \Leftrightarrow & f(t)\ge 0 & \Leftrightarrow & f(t)\in\mathcal{I}^+\\ f(t)g(t)\le f(t)g^-(t) & \Leftrightarrow & f(t)\le 0 & \Leftrightarrow & f(t)\in\mathcal{I}^- \end{array}$$

et comme les fonctions fg et $fg^\pm$ sont intégrables sur $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}^\pm$, il vient

$$\int_{\mathcal{I}^\pm} f(t)g(t)\,dt \le \int_{\mathcal{I}^\pm} f(t)\,g^\pm(t)\,dt$$

d'où le résultat, en rajoutant les expressions obtenues séparément sur $\mathcal{I}^-$ et $\mathcal{I}^+$.

En refaisant le même raisonnement sur l'autre inégalité, on retrouve le résultat demandé. ∎

B. Résultats

Avant d'énoncer le théorème permettant de calculer $x_j^-(t_1)$ et $x_j^+(t_1)$, nous posons les deux définitions suivantes :

Définition 1: On appelle ***j*ème fonction de commutation** la fonction définie pour tout $t\in[t_0,t_1]$ par

$$\sigma_j(t) = \delta_j^T\, e^{A(t_1-t)}\,B \qquad (7)$$

Définition 2: Un système linéaire invariant est dit **normal** sur $[t_0,t_1]$ s'il n'existe aucun sous-intervalle de $[t_0,t_1]$ sur lequel au moins une des fonctions de commutation est identiquement nulle.

Soient $\mathcal{I}_{\sigma_j}^-$ et $\mathcal{I}_{\sigma_j}^+$ les ensembles des valeurs de t dans l'intervalle $[t_0,t_1]$ pour lesquelles $\sigma_j(t)$ est soit strictement négative, soit positive, respectivement. Pour un système linéaire invariant mono-entrée mono-sortie normal, $x_j^{f\,-}(t_1)$, [resp. $x_j^{f\,+}(t_1)$], contribution forcée minimale [maximale] de la $j^{\text{ème}}$ composante de $X(t_1)$, est obtenue en appliquant au système initialement au repos l'entrée $u_j^{*\,-}(t)$ [resp. $u_j^{*\,+}(t)$] égale à $u^+(t)$ [resp. $u^-(t)$] sur $\mathcal{I}_{\sigma_j}^-$ et $u^-(t)$ [resp. $u^+(t)$] sur $\mathcal{I}_{\sigma_j}^+$; $u_j^{*\,-}$ et $u_j^{*\,+}$ sont effectivement intégrables puisque ce sont des commandes bang-bang sur un domaine fermé dont les frontières sont continues par morceaux. Leurs valeurs aux instants de commutation, i.e. aux frontières de $\mathcal{I}_{\sigma_j}^-$ et $\mathcal{I}_{\sigma_j}^+$, peuvent être quelconques, dans la mesure où ces instants sont isolés. Si le système n'est pas normal sur le segment $\mathcal{I}_0$ de $[t_0,t_1]$, les commandes $u_j^{*\,-}(t)$ et $u_j^{*\,+}(t)$ peuvent être quelconques sur cet intervalle et néanmoins conduire aux extrema de $x_j^f(t_1)$).

[1] ou bien "pavé"

[2] Ces ensembles sont obtenus en faisant la réunion d'un nombre fini d'intervalles si f change de signe un nombre fini de fois.

1. Détermination de $x_j^-(t_1)$

Il suffit d'appliquer au système initialement en $X_j^{*-}(t_0) = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{l} x_1^-(t_0) \ si\ \Phi_{j1}(t_1-t_0)>0 \\ x_1^+(t_0) \ si\ \Phi_{j1}(t_1-t_0)<0 \end{array}\right. \\ \vdots \\ \left| \begin{array}{l} x_n^-(t_0) \ si\ \Phi_{jn}(t_1-t_0)>0 \\ x_n^+(t_0) \ si\ \Phi_{jn}(t_1-t_0)<0 \end{array}\right. \end{pmatrix}$ *l'entrée* $u_j^{*-}(t)$ *égale à*

- *Si* $\sigma(t_1^-)<0$, $\left(i.e.\ \mathcal{I}_{\sigma_j}^- = \bigcup_p (r_{2p}, r_{2p+1})\right)$

– $u^-(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^+$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M}{2}-1\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p+1} \leq t_1 - t \\ t_1 - t \leq r_{j,2p+2} \end{cases}$

– $u^+(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^-$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M-1}{2}\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p} < t_1 - t \\ t_1 - t < r_{j,2p+1} \end{cases}$

- *Si* $\sigma(t_1^-)>0$, $\left(i.e.\ \mathcal{I}_{\sigma_j}^- = \bigcup_p (r_{2p+1}, r_{2p+2})\right)$

– $u^-(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^+$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M-1}{2}\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p} \leq t_1 - t \\ t_1 - t \leq r_{j,2p+1} \end{cases}$

– $u^+(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^-$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M}{2}-1\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p+1} < t_1 - t \\ t_1 - t < r_{j,2p+2} \end{cases}$

2. Détermination de $x_j^+(t_1)$

Il suffit d'appliquer au système initialement en $X_j^{*+}(t_0) = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{l} x_1^-(t_0) \ si\ \Phi_{j1}(t_1-t_0)<0 \\ x_1^+(t_0) \ si\ \Phi_{j1}(t_1-t_0)>0 \end{array}\right. \\ \vdots \\ \left| \begin{array}{l} x_n^-(t_0) \ si\ \Phi_{jn}(t_1-t_0)<0 \\ x_n^+(t_0) \ si\ \Phi_{jn}(t_1-t_0)>0 \end{array}\right. \end{pmatrix}$ *l'entrée* $u_j^{*+}(t)$ *égale à*

- *Si* $\sigma(t_1^-)<0$, $\left(i.e.\ \mathcal{I}_{\sigma_j}^- = \bigcup_p (r_{2p}, r_{2p+1})\right)$

– $u^-(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^-$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M-1}{2}\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p} < t_1 - t \\ t_1 - t < r_{j,2p+1} \end{cases}$

– $u^+(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^+$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M}{2}-1\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p+1} \leq t_1 - t \\ t_1 - t \leq r_{j,2p+2} \end{cases}$

- *Si* $\sigma(t_1^-)>0$, $\left(i.e.\ \mathcal{I}_{\sigma_j}^- = \bigcup_p (r_{2p+1}, r_{2p+2})\right)$

– $u^-(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^-$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M}{2}-1\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p+1} < t_1 - t \\ t_1 - t < r_{j,2p+2} \end{cases}$

– $u^+(t)$ *si et seulement si* $t \in \mathcal{I}_{\sigma_j}^+$, *ce qui s'écrit* $\exists\, p \in [0, E\left(\frac{M-1}{2}\right)]$:
$\begin{cases} r_{j,2p} \leq t_1 - t \\ t_1 - t \leq r_{j,2p+1} \end{cases}$

Tout système mono-entrée mono-sortie commandable peut s'écrire sous sa forme canonique compagne de commande. On démontre alors que les fonctions de commutation, qui s'obtiennent à partir des réponses impulsionnelles par un changement de variable, s'expriment sous forme de combinaisons linéaires de termes de la forme $(t_1-t)^{n_k}.e^{p_k(t_1-t)}$. Commes elles ne peuvent s'annuler sur un intervalle tout entier, la commandabilité est une condition suffisante de normalité.

Il vient alors le théorème suivant :

Théorème 1: Soit le système invariant mono-entrée mono-sortie commandable décrit par l'équation d'état (2), sous la forme canonique compagne de commande. Si l'état du sytème à l'instant t_0 appartient à $\Xi(t_0)=\left([x_1^-(t_0),x_1^+(t_0)],\ldots,[x_i^-(t_0),x_i^+(t_0)],\ldots,[x_n^-(t_0),x_n^+(t_0)]\right)^T$, alors l'ensemble $\Xi(t_1)$ des états atteignables à l'instant t_1 lorsque l'entrée u évolue entre u^- et u^+ est inscrit dans le pavé $\Pi(t_1)=\left([x_1^-(t_1),x_1^+(t_1)],\ldots,[x_i^-(t_1),x_i^+(t_1)],\ldots,[x_n^-(t_1),x_n^+(t_1)]\right)^T$, où les extrema $x_j^-(t_1)$ et $x_j^+(t_1)$ de la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état en t_1 sont déterminés comme indiqué dans l'encadré ci-dessus, le système étant normal, sachant que :

- $[\Phi_{ji}(t)] = \begin{pmatrix} \Phi_{j1}(t) & \ldots & \Phi_{ji}(t) & \ldots & \Phi_{jn}(t) \end{pmatrix}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ ligne de e^{At},
- M est l'entier naturel fini pour lequel il est possible de définir la suite $(r_{j,m})_{m\in[0,M]_{\mathcal{N}}}$ des réels possédant les propriétés
  - $r_{j,0} = 0$; $r_{j,M} = t_1 - t_0$,
  - $r_{j,m} \leq r_{j,m+1}$ (i.e. $(r_{j,m})$ croissante)
  - Quel que soit m dans $[1, M-1]_{\mathcal{N}}$, il existe un entier naturel p tel que pour tout q inférieur ou égal à $2p$, $\left(\frac{d^q\sigma_j(t_1-t)}{dt^q}\right)_{t=r_{j,m}} = 0$, ce qui signifie que sur l'intervalle $[0, t_1-t_0]$, la fonction $\sigma_j(t_1-t)$, qui est égale à $\Phi_{jn}(t)$, change de signe sur l'ensemble des $r_{j,m}$ autres que 0 et t_1-t_0.

Cet entier M existe car les fonctions σ_j ne peuvent être consituées d'un nombre de commutations entre les ensembles $\{\sigma_j>0\}$ et $\{\sigma_j<0\}$ qui croisse à l'infini vers un point d'accumulation. M est en outre unique.

C. Détermination des extrema de la sortie

Le problème de la détermination des extrema $y^-(t_1)$ et $y^+(t_1)$ de la sortie à l'instant t_1 pour un vecteur d'état initial X_0 donné est déjà traité dans les paragraphes précédents si le numérateur spectral est réduit à une seule puissance de p, auquel cas la sortie est égale à un état. Dans le cas général, la démarche présentée précédemment tient à condition de remplacer la matrice $[\Phi_{ji}(t)]$ définie dans le théorème 1 par $[\Psi_i(t)]$, où $\begin{pmatrix} \Psi_1(t) & \ldots & \Psi_i(t) & \ldots & \Psi_n(t) \end{pmatrix} = Ce^{At}$. On peut alors définir une fonction de commutation de la sortie par $\sigma_y(t) = \Psi_n(t_1-t) = C\,A(t_1-t)\,B$, et une condition de normalité de la sortie selon laquelle σ_y ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle.

4. SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES

A. Système du premier ordre

On ne s'intéresse qu'à l'évolution de l'état du système défini par la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{\tau}\,x(t) + u(t) \\ y(t) &= \frac{A}{\tau}\,x(t) \end{cases}, \qquad (8)$$

équivalente à l'équation différentielle $\tau\dot{y}(t) + y(t) = Au(t)$. Les fonctions $\Phi_{11}(t)$ et $\sigma_1(t)$, respectivement égales à $e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}$, étant partout strictements positives, $r_{1,0}$ et $r_{1,1}$ sont respectivement égaux à 0 et t_1-t_0, quels que soient t_0 et t_1. Alors,

- $x^-(t_1)$ est la réponse du système initialement en $x^-(t_0)$ à l'entrée $u^-(t)$.
- $x^+(t_1)$ est la réponse du système initialement en $x^+(t_0)$ à l'entrée $u^+(t)$.

B. Système du second ordre

Il y a équivalence entre l'équation différentielle $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = A\omega_n^2 u(t)$ et la représentation d'état

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} A\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} X(t) \end{array}\right. \tag{9}$$

Trois cas doivent être examinés, selon que les pôles, à partie réelle négative, sont réels distincts, doubles, ou bien complexes conjugués :

<u>Cas où les pôles sont réels ($\zeta \geq 1$)</u> En posant, pour ζ différent de 1, $T_0 = \frac{1}{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \ln\left\{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right\}$, qu'on peut aussi écrire $T_0 = \frac{1}{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \operatorname{argch}\{\zeta\}$, et dans le cas limite d'un pôle double, $T_0 = \frac{1}{\omega_n}$, le signe de chaque composante de e^{At} évolue comme suit :

t	0		T_0		∞
$\Phi_{11}(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\Phi_{12}(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\Phi_{21}(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\Phi_{22}(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Et en posant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^T$, les valeurs extrémales de chaque composante peuvent être déterminées de la manière suivante :

- Si $t_1 - t_0 < T_0$,

Composante à déterminer	Etat initial	Commande
$x_1^-(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^-(t_0) & x_2^-(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*-} = u^-(t)$
$x_1^+(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^+(t_0) & x_2^+(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*+} = u^+(t)$
$x_2^-(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^+(t_0) & x_2^-(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*-} = u^-(t)$
$x_2^+(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^-(t_0) & x_2^+(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*+} = u^+(t)$

- Si $t_1 - t_0 > T_0$,

Composante à déterminer	Etat initial	Commande
$x_1^-(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^-(t_0) & x_2^-(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*-} = u^-(t)$
$x_1^+(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^+(t_0) & x_2^+(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*+} = u^+(t)$
$x_2^-(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^+(t_0) & x_2^+(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*-} = \begin{cases} u^+(t) & \forall t \in [t_0, t_1 - T_0) \\ u^-(t) & \forall t \in (t_1 - T_0, t_1] \end{cases}$
$x_2^+(t_1)$	$\begin{pmatrix} x_1^-(t_0) & x_2^-(t_0) \end{pmatrix}^T$	$u_1^{*+} = \begin{cases} u^-(t) & \forall t \in [t_0, t_1 - T_0) \\ u^+(t) & \forall t \in (t_1 - T_0, t_1] \end{cases}$

<u>Cas où les pôles sont complexes conjugués</u> Faute de place, nous ne présentons que la variation des signes des composantes de la matrice e^{At}. Les signes des Φ_{ji} sont T-périodiques où T est la pseudo-période $\frac{2\Pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$. En posant

$a = \frac{2}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}$, et $b = \frac{2}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$,

on montre que le signe des fonctions Φ_{ji} dépend de t de la manière suivante :

t	0		a		b		$\frac{T}{2}$		$T-b$		$T-a$		T		$T+a$
$\Phi_{11}(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\Phi_{12}(t)$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\Phi_{21}(t)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\Phi_{22}(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

5. CONCLUSION

La méthode exposée ci-dessus permet d'obtenir une description qualitative de la réponse d'un système linéaire à une séquence d'intervalles. Elle montre que la normalité est une propriété souhaitable, les systèmes non-normaux n'étant pas commandables, et qu'il est alors nécessaire de rajouter une hypothèse sur l'entrée en termes d'"enveloppes" continues par morceaux.

Le fait de déterminer le pavé $\Pi(t_1)$ qui englobe au mieux l'ensemble des états atteignables $\Xi(t_1)$ correspond bien à la description qualitative désirée, chaque composante du vecteur d'état étant située dans un intervalle. Cependant, le fait que certains sommets de $\Pi(t_1)$ ne soient pas atteignables entraîne la perte de la transitivité—c'est à dire que les résultats sont en général différents si la méthode est appliquée d'une part entre deux instants t_0 et t_2, et d'autre part entre t_0 et un instant intermédiaire t_1 puis entre t_1 et t_2, ce dernier cas conduisant à des pavés le plus souvent non minimaux—ainsi que l'impossibilité de déterminer correctement $y^{\pm}(t_1)$ par une expression du type $\sum_{j=0}^{n-1} c_j . x_{j+1}^{\pm}(t_1)$, comme le suggère la seconde équation du système (2). Il peut d'ailleurs être intéressant de déterminer des équations de propagation des pavés de la forme $f(t_0, t_1, t_2, u^-, u^+, \Pi(t_1), \Pi(t_2)) = 0$.

Une méthode voisine pourrait être appliquée aux systèmes discrets pour lesquels (2) est remplacée par une équation de récurrence. Enfin, pour faire le lien continu-discret, il serait utile d'établir l'existence de conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles une séquence d'intervalles contient la même information que les deux enveloppes qui l'entourent, comme le permet le théorème de Shannon avec des signaux classiques.

REFERENCES

[1] Ouvrage de synthèse : Qualitative Reasoning : Methods, Tools and Applications. *Rapport du groupe de recherche MQ&D, Journées Nationales du GR Automatique, Strasbourg, 1990*

[2] B.J.Kuipers Qualitative Simulation. *Artificial Intelligence 29, 1986, pp 289-338*

[3] K.Bousson, L.Travé-Massuyès A Computational Causal Model for Process Supervision. *IFAC International Symposium AIRTC'92, Deft, The Nederlands*

[4] J.Aguilar-Martin Knowledge Based Real Time Supervision of Dynamical Processes. (Dynamic knowledge representation and simulation) *Rapport technique du GR AUTOMATIQUE, LAAS-CNRS, Toulouse, 1991*

[5] C.Moler, C.Van Loan Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of A Matrix. *SIAM Review, Vol 20, N° 4, Octobre 1978, pp 801-836*

[6] I.Kaufman, P.H.Roe On Systems described by the Companion Matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control, A-C 15, 1970, pp 692-693*