



**TRANSFORMEE BILINEAIRES TEMPS -ECHELLE DES  
SIGNAUX ASYMPTOTIQUES D'ENERGIE FINIE**

**G.COURBEBASSE**

**ICPI-LTS URA 346 CNRS 25 Rue du plat 69288 LYON Cedex 02**

**RESUME**

La distribution bilinéaire temps échelle  $B_z(t, \eta)$  due à A.GROSSMANN s'inscrit dans le cadre des représentations bilinéaires affines dues à P.FLANDRIN et O.RIOUL. Les principales propriétés de  $B_z(t, \eta)$  sont ici énoncées. Cet article propose ensuite une méthode de calcul de  $B_z(t, \eta)$  pour des signaux asymptotiques d'énergie finie. Les termes d'interférence "internes" et "externes" inhérent à cette distribution temps échelle sont analysés.

**ABSTRACT**

Bilinear time scale distribution  $B_z(t, \eta)$  due to A.GROSSMANN may be closely related to the affine bilinear representation sub-class due to P.FLANDRIN and O.RIOUL. A set of properties of  $B_z(t, \eta)$  is given here. Then, this paper is devoted to a way of computation for  $B_z(t, \eta)$ , in the case of finite energy asymptotic signals. "Internal" and "external" interference terms, inherent to this time scale distribution are analysed.

**1) INTRODUCTION:**

La distribution bilinéaire temps-échelle  $B_z(t, \eta)$ , ou distribution UNTERBERGER passive [1], donne une représentation énergétique du signal analysé dans le plan  $(t, \eta)$ , soit [2] [3]:

$$B_z(t, \eta) = \eta v_M \int_{\mathbb{R}} z(\eta v) z^* \left( \eta \frac{v_M^2}{v} \right) e^{2i\pi\eta t \left( v - \frac{v_M^2}{v} \right)} \frac{dv}{v}$$

Elle peut-être rattachée à la sous-classe des représentations bilinéaires affines due à P.FLANDRIN [4] définie comme suit:

$$\Omega_z(t, \eta) = |\eta| \int_{\mathbb{R}} G(n) \chi(\eta[F(n) - \eta/2]) \chi(\eta[F(n) + \eta/2]) e^{-2i\pi\eta t n} dn$$

où  $F(n)$  et  $G(n)$  sont des fonctions arbitraires choisies en fonction des propriétés souhaitées, notamment en ce qui concerne les distributions marginales et les moments du premier ordre.

Dans notre cas, ces fonctions ont pour expression:

$$F(n) = \sqrt{v_0^2 + \frac{n^2}{4}}; G(n) = \frac{v_0}{F(n)}$$

Les principales propriétés de  $B_z$  sont les suivantes:

$$B_z = B_z^* \in \mathbb{R}, E_z = \int_{\mathbb{R}^2} B_z dt d\eta$$

- Marginale en fréquence:

$$\int_{\mathbb{R}} B_z(t, \eta) dt = |z(\eta v_M)|^2 = |z(v)|^2$$

- Retard de groupe :

$$\int_{\mathbb{R}} t B_z(t, \eta) dt = |z(\eta v_M)|^2 \tau_g(\eta v_M)$$

L'étude porte sur un algorithme de calcul adapté à des signaux physiques à bande limitée,  $v \in [v_1, v_2]$ , de durée  $T$ . Ce procédé évite le calcul direct de la quantité ci-dessus en la ramenant à une transformée de FOURIER, appliquée à un signal échantillonné en fréquence à pas non constant optimisé moyennant le changement de variable:  $v' = v - v_M^2/v$ .  $B_z(t, \eta)$  s'écrit alors de la façon suivante:

$$B_z(t, \eta) = \eta v_M \int_{v_1}^{v_2} z\left(\frac{\eta}{2}(v' + H(v))\right) z^*\left(\frac{2\eta v_M^2}{v + H(v)}\right) \frac{1}{H(v)} e^{2i\pi\eta t v'} dv$$

avec:  $H(v) = \sqrt{v'^2 + 4v_M^2}$

$v_M$  étant une fréquence de référence choisie arbitrairement.

Il nous faut maintenant donner le support du facteur d'échelle  $[\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ . Vu le caractère à bande limitée des signaux physiques, les valeurs de la variable " $\eta$ " sont confinées au support :

$$\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \leq \eta \leq \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} \quad (1)$$



en ayant fixé:  $V_M^2 = V_1 V_2$ .

L'interprétation de P. FLANDRIN [4] considère  $\eta = V/V_M$  comme une fréquence réduite ou relative.  $B_Z$  réalise une analyse spectrale à surtension constante et à date "t" donnée. On assure ainsi un lien avec les représentations Temps-Fréquence [4].

## 2) TRAITEMENT DE DEUX SIGNAUX ASYMPTOTIQUES A MODULATION DE FREQUENCE

Les figures 1 et 2 représentent  $B_Z(t, \eta)$  et le retard de groupe associé, dans le cas de signaux modulés en fréquence. Les calculs ont été menés sur des signaux en représentation fréquentielle et correspondent, respectivement, à des modulations de fréquence de type linéaire, et de type hyperbolique. Les résultats révèlent une surface d'arête marquée au voisinage de la trace  $\tau_g(\eta V_M) = \tau_g(V)$  liée au retard de groupe du signal. Il apparaît que la concentration énergétique est la plus marquée dans le cas de signaux à modulation hyperbolique de fréquence possédant la propriété d'invariance par changement d'échelle. Pour des signaux s'approchant de la condition asymptotique [5] [6] la surface  $B_Z(t, \eta)$  se concentre fortement sur un pavé  $[T, \Delta\eta]$  localisé dans le plan  $(T, \Delta\eta)$ .

## 3) REPRESENTATION BILINEAIRE ET INTERFERENCES

La structure bilinéaire de  $B_Z(t, \eta)$  conduit à des termes d'interaction dans le cas de signaux multicomposantes retardés et changés d'échelle. Dans le cas de signaux retardés et  $\eta_0=1$ , on est conduit à envisager un terme oscillant dans l'expression de  $B_Z(t, \eta)$ :

$$2 \eta v_M \int_0^{\infty} z(\eta v) z^* \left( \eta \frac{v_M}{v} \right) e^{2i\pi \eta \left( t - \frac{\tau_0}{2} \right) \left( v - \frac{v_M}{v} \right)} \cos \left[ \pi \tau_g \left( v + \frac{v_M}{v} \right) \right] \frac{dv}{v}$$

localisé au point:  $t = \tau_0 / 2$  et dépendant de la fréquence  $[V + V_M^2/V]$  confiné dans le support:  $[V_M, (V_1 + V_2) / 2]$ ; Sous l'hypothèse asymptotique, par le procédé dit de la phase stationnaire [5] [6] apparaît une périodicité liée à :

$$v_s = \eta \eta_0 v_M \tau_0 \frac{1}{k}, \quad k \text{ entier}$$

Cet effet est totalement vérifié sur les signaux étudiés de la classe R.A.ALTES. Les trois figures présentées ici traitent d'un signal à deux composantes R.A.ALTES. La figure 3 donne la représentation bilinéaire 3D de deux composantes, la deuxième étant uniquement retardée de  $\tau_0$ . La figure 4 reprend les mêmes composantes, la deuxième composante étant affectée d'un effet DOPPLER de  $\eta_0=1,15$ . Enfin, la figure 5 possède une deuxième composante affectée d'un effet DOPPLER de  $\eta_0=0,85$ . Dans chaque cas, les interférences entre composantes du signal donnent le retard entre ces deux dernières. En fonction du changement d'échelle la disposition des crêtes des

termes d'interférence varie sensiblement, renseignant ainsi sur la nature de l'effet DOPPLER ou changement d'échelle.

Dans le cadre de l'approximation de la phase stationnaire pour les signaux à bande limitée,  $B_Z(t, \eta)$  se met aisément sous une forme interprétable. Elle permet d'expliquer la structure des interférences entre les composantes multiples d'un signal ou entre signaux retardés et changés d'échelle. Ces résultats font apparaître le rôle joué par le retard  $\tau_0$  d'une composante et son taux de changement d'échelle  $\eta_0$ . La périodicité du terme d'interférence est liée à la fréquence  $[V + V_M^2/V]$  terme à variation faible autour de la fréquence centrale de la bande B du signal. Ces résultats permettent des vérifications numériques par calcul direct de  $B_Z(t, \eta)$ .

## 4) THEORIE DES CATASTROPHES ET LOI DE GENERATION DES INTERFERENCES

Si  $z(V)$  est un signal à deux composantes  $z_1(V)$  et  $z_2(V)$ , la distribution bilinéaire temps-échelle devient:

$$B_{z_1 z_2}(t, \eta) = B_{z_1}(t, \eta) + B_{z_2}(t, \eta) + 2 \operatorname{Re} (B_{z_1 z_2}(t, \eta))$$

Le dernier terme, de l'expression ci-dessus, va nous permettre de calculer les coordonnées des points d'interférence  $I(t_{\text{int}}, V_{\text{int}})$  à partir des coordonnées  $(t, V)$  associées aux points de chaque composante. Pour ce faire, la démarche consiste [7] [8] à utiliser un signal composé de deux signaux monochromatiques  $\delta(V - V_1')$  et  $\delta(V - V_2')$ , pour déterminer  $V_{\text{int}}$ , fréquence des interférences. On obtient:  $v_{\text{int}} = \sqrt{v_1' v_2'}$ .

D'autre part, la théorie des catastrophes [7] [8] permet de montrer que les signaux modulés en fréquence, d'expression de retard de groupe en  $k/V^2$ , sont parfaitement localisés dans le plan  $(t, \eta)$ . En effet  $B_Z(t, \eta)$ , dans le cas de signaux asymptotique, peut-être simplifiée par l'emploi de la phase stationnaire. La distribution bilinéaire est alors réduite à l'expression d'une intégrale oscillante, liée fortement à une caustique identifiable à une catastrophe élémentaire [7] [8].

Connaissant  $V_{\text{int}}$  et l'expression de retard de groupe adapté à cette distribution, l'expression de localisation en temps des interférences est déduite, soit:

$$t_{\text{int}} = \frac{t'_1 v'_1 + t'_2 v'_2}{v'_1 + v'_2}$$

On généralise alors la forme de "tint", telle que la définissent P. FLANDRIN et P. GONCALVES [8]. Elle est composée de la date des termes d'interférences rencontrés dans le cas de la distribution de WIGNER-VILLE, à laquelle on ajoute le terme spécifique à la distribution bilinéaire  $B_Z$ , soit:

$$t_{\text{int}} = \frac{t'_1 + t'_2}{2} + \frac{t'_1 - t'_2}{2} \left[ \frac{v'_1 - v'_2}{v'_1 + v'_2} \right]$$

La figure 6 donne le résultat du calcul de  $B_z$  pour un signal du à R.A.ALTES. Cette figure met en évidence les interférences internes dans la convexité de la composante principale. Ces interférences sont confirmées par la théorie des catastrophes. En dessous de la représentation on trouve le lieu des interférences par calcul de la loi de génération de ces dernières. La figure 7 reçoit les mêmes commentaires que la figure 6. Il faut ajouter que nous sommes en présence de 2 signaux dus à R.A.ALTES, formant un "V". On remarque l'apparition des termes d'interférences externes, correspondant aux interférences entre composantes. Le calcul du lieu de ces interférences correspond à celui que donne le calcul de  $B_z$ ,

5) CONCLUSION

- Les signaux étudiés, à bande limitée, donnent une représentation qui concentre l'énergie dans le support  $(T, \Delta\eta)$ , au voisinage de la trace  $\tau_g(\eta|v_M)$ , à l'image des signaux modulés hyperboliquement en fréquence.  
 - Dans le cas des signaux dus à R.A. ALTES, on obtient une représentation qui peut-être étudiée par la théorie des catastrophes, qui justifie la nature et l'emplacement des interférences dans le plan  $(t, \eta)$ [9] [10]. Le calcul de la distribution bilinéaire donne une représentation énergétique conforme à ce que laissait présager la théorie et la loi de génération des interférences.

Nota: Ces résultats entrent dans le cadre de ma thèse en traitement du signal sur la théorie et les domaines d'application des distributions temps-fréquence et temps-échelle.

**REMERCIEMENTS :** L' auteur remercie P. FLANDRIN et P. GONCALVES des échanges de point de vue fort enrichissant.

**REFERENCES:**

[1] A.UNTERBERGER - The calculus of pseudo differential operators of FUCHS type - Comm. in part. diff. eq. - Vol. 9 - 1984 - p.1179 à p.1236.  
 [2]A. GROSSMANN, B. ESCUDIE - Une représentation bilinéaire en temps et en échelle des signaux d'énergie finie - 13ème Col. National Traitement du Signal - Tome 1, GRETSI Sept 1991 - p. 33 à p.36.  
 [3] B. ESCUDIE A.GROSSMANR.KRONLAND - Bilinear Time scale representations of finite energy signals and properties related to signal processing - ISSSE 92 - PARIS - 1992 - p.485 à p.487.  
 [4]P. FLANDRIN - Sur une classe générale d'extensions affines de la distribution de WIGNER VILLE - 13ème Col. National Traitement du Signal - Tome 1, GRETSI Sept 1991 - p. 17 à p.20.  
 [5]B.ESCUDIE A.GROSSMAN R.KRONLAND MARTINET B.TORRESANI - Analyse par ondelettes des signaux asymptotiques - 12ème Coll. GRETSI sur le traitement du signal - JUAN LES PINS (F)1989 -p.1 à p.4.  
 [6] N.DELPRAT et al. - Asymptotic Wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaneous frequencies - IEEE

Trans.Inf.Theory - Special issue on wavelets transform -Vol.39 N°2 -1992-p.644 à p.663.

[7] J.PH. OVARLEZ - La transformation de MELLIN : un outil pour l'analyse des signaux à large bande - Thèse univ. - Paris VI 1992.  
 [8] P.FLANDRIN and PAULO GONCALVES - From wavelets to time-frequency energy distributions - Topics in the theory and applications of wavelets - LARRY L.SCHUMAKER and GLENN WEBB(eds) - BOSTON - Academic press (à paraître) - 1993.  
 [9] T.POSTON I.STEWART - Optics and Scattering Theory (§12) - Catastrophe Theory and its applications - LONDON - Edition PITMAN - 1978 - p.246 à p.283.  
 [10] P.FLANDRIN B.ESCUDIE - Géométrie des fonctions d'ambiguïté et des représentations conjointes de VILLE: L'approche de la théorie des catastrophes - 8ème Coll. GRETSI sur le traitement du signal -NICE (F)1981 - p.69 à p.74.

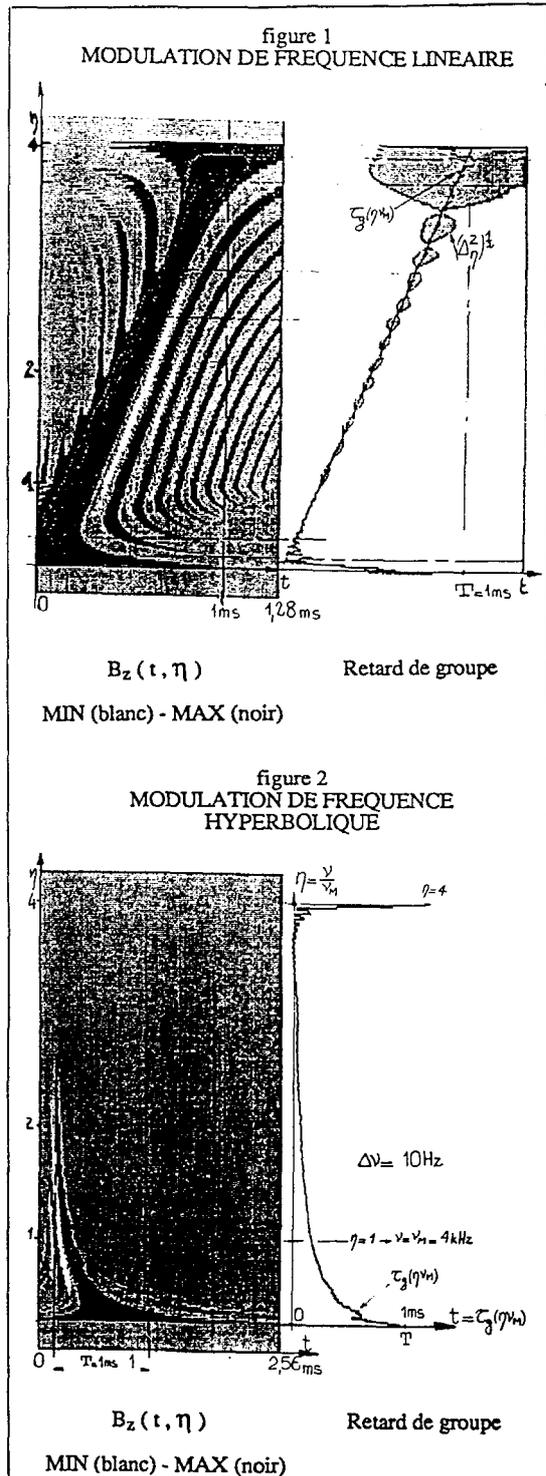




figure 3  
Représentation Bilinéaire 3D d'un signal à 2  
composantes appartenant à la classe R.A.ALTES, la  
2ième composante n'étant affectée que d'un retard

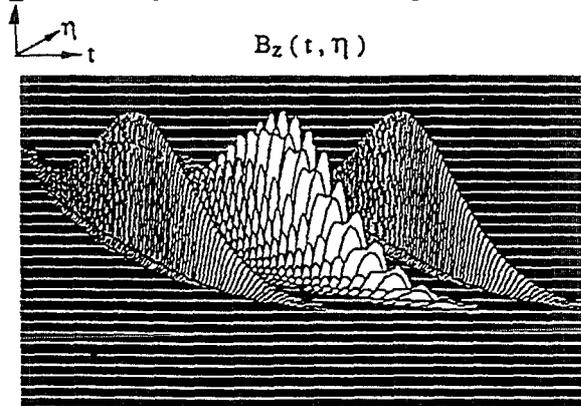


figure 4  
Représentation Bilinéaire 3D d'un signal à 2  
composantes appartenant à la classe R.A.ALTES, la  
2ième composante étant affectée d'un retard et d'un  
effet DOPPLER  $\eta_0=1,15$

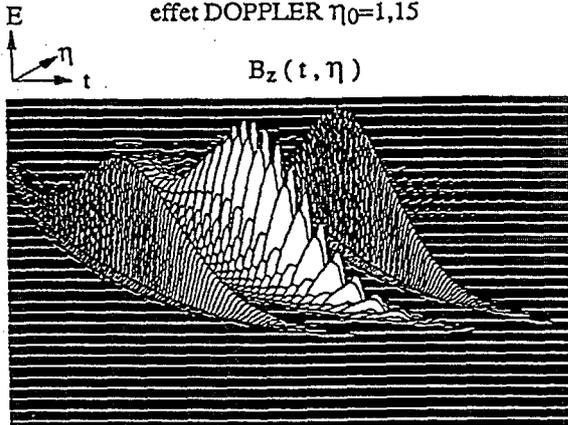


figure 5  
Représentation Bilinéaire 3D d'un signal à 2  
composantes appartenant à la classe R.A.ALTES, la  
2ième composante étant affectée d'un retard et d'un  
effet DOPPLER  $\eta_0=0,85$

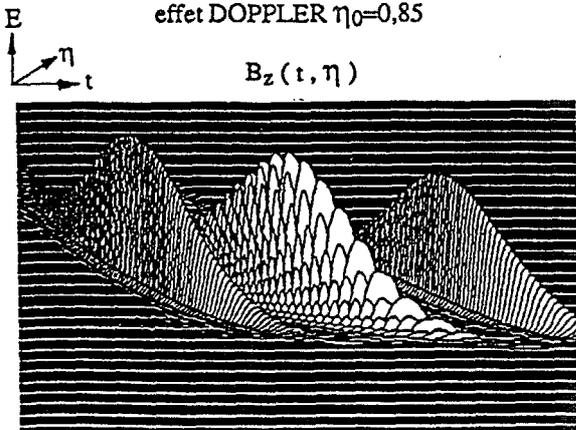


figure 6  
Représentation Bilinéaire d'un signal de la classe  
due à R.A.ALTES et de la simulation du lieu des  
interférences

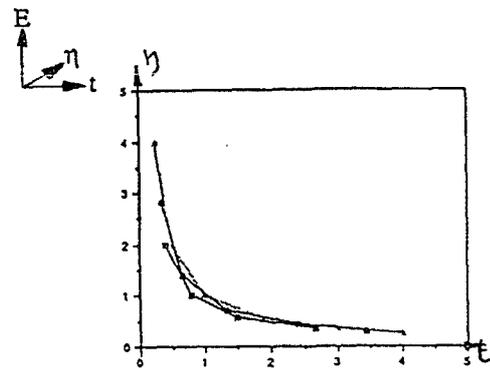
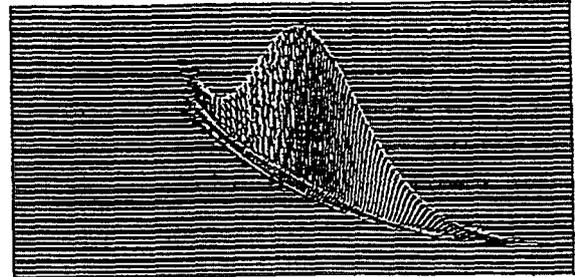


figure 7  
Représentation Bilinéaire d'un signal à deux  
composantes en regard, appartenant à la classe due à  
R.A.ALTES et de la simulation des termes  
d'interférence entre les deux composantes

