

**INTERPRETATION PHYSIQUE DES
REPRESENTATIONS BILINEAIRES TEMPS - ECHELLE
ET DES REPRESENTATIONS FREQUENCE - ECHELLE**

**B. ESCUDIE, G. COURBEBASSE ET
A. GROSSMANN***

**ICPI-LTS URA 346 CNRS 25 Rue du plat - 69288 LYON Cedex 02
*CPT CNRS Luminy F 13288 MARSEILLE Cedex 09**

RESUME

Les distributions temps échelle, ou WIGNER VILLE affines, possèdent une transformée de FOURIER à deux dimensions fréquence échelle (ϕ, ξ) . La variable ξ s'interprète comme une date réduite. Possédant la symétrie hermitique la transformée de FOURIER est bornée à l'origine en module en étant liée à la fonction d'Ambiguïté symétrique de VILLE-SUSSMANN. Cette grandeur, modifiée par la transformation linéaire due à P. FLANDRIN, fournit par transformation de MELLIN FOURIER la classe hyperbolique des représentations (temps, fréquence). Les résultats manifestent des règles d'écriture symétrisée ou non de l'opérateur de changement d'échelle.

1) Interprétations possibles de la classe WIGNER VILLE-Affine :

Nous avons déjà présenté une représentation temps échelle $B_z(t, \eta)$ de la classe WIGNER VILLE affine [1] [2] :

$$B_z(t, \eta) = \eta v_M \int_{\mathbb{R}^2} z(\eta v) z^* \left(\eta \frac{v_M}{v} \right) e^{2i\pi \eta t \left(v - \frac{v_M^2}{v} \right)} \frac{dv}{v} \quad (1)$$

$Z \in L^2$

telle que :

$$f(n, \tau) = G(n) e^{-2i\pi \tau F(n)}$$

$$F(n) = \sqrt{v_0^2 + \frac{n^2}{4}} ; G(n) = \frac{v_0}{F(n)} \quad (2)$$

où v_M fréquence de référence est définie par :

$$v_M^2 = v_1 v_2,$$

v_1 et v_2 définissant la bande du signal Z [2] [3]. Celle-ci définit à son tour le support de la variable η : [3]

ABSTRACT

Time scale representations, or WIGNER VILLE affine ones, exhibit a two dimension FOURIER transform, the variables of which are frequency ϕ and scale factor ξ related to a relative duration. The modulus of this transform is bounded at the origin due to properties of Ambiguity function. This function may be transformed into the wide band one, or delay DOPPLER one, by the way due to P. FLANDRIN. Using MELLIN-FOURIER two dimension transform are gets the so called "hyperbolic time frequency" representations. This class of representations is deeply related to the COHEN class and the ambiguity function in connection with the various representations of the dilation operator.

$$\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \leq \eta \leq \sqrt{\frac{v_2}{v_1}}$$

L'interprétation de P. FLANDRIN considère $\eta = v/v_M$ comme une fréquence réduite, B_z réalise une analyse spectrale à surtension constante et à date "t" donnée. Un autre point de vue interprète B_z sans relier aucunement η à l'une des variables t ou v et à utiliser la transformation de MELLIN-FOURIER liée au changement d'échelle.

$$2) \mathcal{B}_z(\phi, \xi) \begin{matrix} \phi \\ \xi \end{matrix} \begin{matrix} \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} t \\ \eta \end{matrix} B_z(t, \eta) : \text{comment l'interpréter?}$$

Soit la grandeur :

$$\mathcal{B}_z(\phi, \xi) = \int_{\mathbb{R}^2} B_z(t, \eta) e^{-2i\pi(\phi t + \eta \xi)} dt d\eta \quad (3)$$

sous réserve d'existence comment peut-on l'interpréter ?

\mathcal{B}_z est une représentation fréquence (ϕ) échelle (ξ) .

ξ est une fréquence réduite inversée, ou une durée réduite si $\eta = v/v_M$:

$$\xi = v_M/v = t \cdot v_M = t / T_M, T_M = 1/v_M$$



Ce raisonnement peut être conduit pour la classe WIGNER VILLE affine définie précédemment [2].

$$w_z(\phi, \xi) \stackrel{\phi}{\xi} \Longleftrightarrow_{\eta}^t \Omega_z(t, \eta) \quad (4)$$

La transformée de FOURIER est adaptée aux translations tandis que la transformée de MELLIN convient au changement d'échelle. Le choix fait par F. HLAATCH et al. revient à poser $\eta = e^a$ et à calculer la transformée de MELLIN de "a" vers λ [4] [5]. Tenons compte d'abord du point de vue dû à P. FLANDRIN [2].

3) Propriétés de la transformée de FOURIER de $\Omega_z(t, \eta)$:

3a) Cas général :

A partir de la définition on déduit : [2]

$$\Omega_z(t, v; \Pi) = \int_{R^+} W_z(u, n) \Pi \left(\eta(u-t), \frac{n}{\eta} \right) du dn$$

Pour exprimer $w_z(\Phi, \xi)$, on remarque que la distribution de WIGNER VILLE se définit par :

$$w_z(t, v) \stackrel{t}{v} \Longleftrightarrow_{\theta}^{\phi} f(\theta, \phi) \chi_z(\theta, \phi) \quad (5)$$

où, χ_z est l'ambiguïté symétrique [6] [7], d'où:

$$\omega_z(\phi, \xi) = \int \int_{R^+} \chi_z^*(\theta', \phi) \pi^{\#} \left(-\frac{\phi}{\eta}, \eta\theta' \right) d\theta' d\eta \quad (6)$$

avec : $\pi(\phi = -n, \theta = \tau) = f(n, \tau)$

Une approche directe utilise l'écriture avec G et F. Le résultat donne $\Omega_z(t, \eta)$ égale à :

$$\phi \int_{R^+} \kappa(v) z \left(\eta \left[F(v) - \frac{v}{2} \right] \right) z^* \left(\eta \left[F(v) + \frac{v}{2} \right] \right) e^{2i\pi\phi \frac{\xi}{v}} dv \quad (7)$$

$$\text{avec : } \kappa(v) = \frac{G(v) \left[F(v) + \frac{v}{2} \right]}{v^2 \left[F(v) - \frac{v}{2} \right]}$$

quantité qui s'exprime en fonctions de v.p. ou p.f. des intégrales considérées. (7) ne fait pas apparaître clairement le rôle fondamentale de $\chi_z(\theta, \phi)$ comme en (6). Dans ces expressions la variable ξ est du type t/T_M reliée à une durée réduite.

3b) Le cas particulier $\mathcal{B}_z(\phi, \xi) \Longleftrightarrow \mathcal{B}_z(t, \eta)$:

En reportant l'expression (2) dans (7), on obtient l'expression de $\mathcal{B}_z(\phi, \xi)$ ((8) ci-dessous).

$$\text{On en déduit que: } \mathcal{B}_z(\phi, \xi) = \int_{R^+} \chi_z^*(\theta', \phi) \mathcal{L}(\phi, \xi, \theta') d\theta'$$

d'après (6) avec: $\mathcal{L}'(\phi, \xi, \theta') \stackrel{\phi}{\xi} \Longleftrightarrow_{\eta} f \left(-\frac{\phi}{\eta}, \eta\theta' \right)$.

Ce qui conduit à la propriété suivante:

$$\left| \mathcal{B}_z(\phi, \xi) \right| \leq \mathcal{B}_z(0, 0) = E_z$$

car on remarque que:

$$\mathcal{L}'(\phi, \xi, \theta) = \mathcal{L}'^{\#}(\phi, \xi, \theta) \text{ et } \left| \mathcal{L}'(\phi, \xi, \theta) \right| \leq \mathcal{L}'(0, 0, 0)$$

$$\text{d'où : } |\mathcal{B}_z|^2 \leq \int_{R^+} \left| \chi_z(\theta', \phi) \right|^2 d\theta' \int_{R^+} \left| \mathcal{L}'(\phi, \xi, \theta') \right|^2 d\theta'$$

en notant que: $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ et que:

$$\left| \mathcal{L}' \right| \leq 2 v_M \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\phi^2 + 4\eta^2 v_M^2}}, \text{ avec : } \mathcal{L}'(\theta', 0, 0) = \Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$$

On démontre alors que :

$$\left| \mathcal{B}_z(\phi, \xi) \right| \leq \mathcal{B}_z(0, 0) \quad (9).$$

Avec la relation ;

$$\int_{R^+} t \mathcal{B}_z(t, \eta) dt = \frac{i}{2\pi} \int_{R^+} \left[\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \phi} \right]_{\phi=0} e^{2i\pi\xi\eta} d\xi$$

et la remarque:

$$\left| z(\eta v_M^2) \right|^2 \Longleftrightarrow T_M \Gamma_z(T_M \xi) = \mathcal{B}_z(0, \xi)$$

on lie les moments de $\mathcal{B}_z(t, \eta)$ avec les propriétés de \mathcal{B}_z sur la section $\phi = 0$.

3c) Etude de signaux modulés en fréquence :

Les figures 1 et 2 représentent $\mathcal{B}_z(t, \eta)$ et $\mathcal{B}_z(\phi, \xi)$ dans le cas de signaux modulés suivants :

$$z_1(v) \Longleftrightarrow Z_1(t) = \Pi_B(v - v_c) \sqrt{\frac{T}{B}} e^{-i\pi\left(\frac{T}{B}\right)(v - v_c)^2 + i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2(v) \Longleftrightarrow Z_2(t) = A(t)_T e^{i2\pi\left(\frac{v_d T}{n}\right) \left[\text{Log} \left(1 + \frac{n t}{T} \right) \right]}$$

Les coupes obtenues pour $\phi = 0, \xi = 0$, montrent la propriété : $\left| \mathcal{B}_z(\phi, \xi) \right| \leq \mathcal{B}_z(0, 0)$ et la symétrie hermitique paraît vérifiée. Une étude plus poussée permettrait de vérifier le caractère causal de $\mathcal{B}_z(t, \eta)$ à l'aide de $\text{Re}\mathcal{B}_z$ et $\text{Im}\mathcal{B}_z$.

4) Lien entre fonction d'Ambiguïté en translation et classe hyperbolique :

4a) Rappel de résultats dus à R.A. ALTES et F. HLAATCH :

Ces auteurs ont utilisé soit une transformation non linéaire des variables, soit la transformation de MELLIN-FOURIER à partir de la fonction d'Ambiguïté en compression [4][5] :

$$\chi_z(\tau, \eta) = \sqrt{\eta} \int_{R^+} Z(u) Z^*(\eta(u - \tau)) du \Rightarrow \chi_z(\tau, a), \eta = e^a$$

$$\text{et } Q_z(\phi, \lambda) = \int_{R^+} \chi_z(\tau, \alpha) e^{-2i\pi(\phi\tau + \lambda\alpha)} d\tau d\alpha$$

Q_z peut être reliée à $W_{\tilde{z}}$ où \tilde{z} est le signal transformé par $v = v_0 e^{v/v_0}$ [4]. Une démarche analogue est due à R.G. SHENOY et T.W. PARKS

[8]. Ces représentations peuvent appartenir à la classe "hyperbolique" due à F. HLAWASTSCH et F. BOUDREAUX-BARTELS [5].

4b) Lien entre fonction d'Ambiguïté et une représentation hyperbolique :

Utilisant la relation intégrale due à P. FLANDRIN, χ_Z^F (F : au sens de P.FLANDRIN) liant ambiguïté en translation et celle en compression [9][10],

$$\chi_Z^F(\tau, k) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Z^* \left(2 \left(\frac{k-1}{k+1} \right) t + \tau, \phi \right) e^{-2i\pi\phi t} dt d\phi \quad (11)$$

en posant $a = \text{Log}(k)$ on déduit, vu le caractère affine de la transformation:

$$X_Z^F(\phi, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \chi_Z^F(\tau, a) e^{-2i\pi(\phi\tau + a\lambda)} d\tau da$$

$$X_Z^F(\phi, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} z \left(\frac{2\phi}{1+e^{-a}} \right) z \left(\frac{2\phi e^{-a}}{1+e^{-a}} \right) e^{-2i\pi\lambda a} da \quad (12)$$

λ est un facteur d'échelle, qui peut s'écrire "t ϕ ". On obtient alors :

$$X_Z^F(\phi, t) = \int_{\mathbb{R}} z \left(\frac{2\phi}{1+e^{-a}} \right) z \left(\frac{2\phi e^{-a}}{1+e^{-a}} \right) e^{-2i\pi t a} da \quad (13)$$

En posant: $X_Z'^F(t, \phi) = \phi X_Z^F(t, \phi)$ la représentation appartient à classe hyperbolique des représentations en temps et fréquence [5].

χ_Z^F ne possède pas l'invariance par décalage temporel mais vérifie toutes les autres propriétés de cette classe [5]. Notons que la distribution due à P. et J. BERTRAND possède toutes ces propriétés et appartient en outre à la classe WIGNER VILLE affine [5].

Comme: $\chi_Z^*(\theta, \phi) \Leftrightarrow W_d(t, v) \Leftrightarrow_{\tau} R_d(t, \tau)$, il vient:

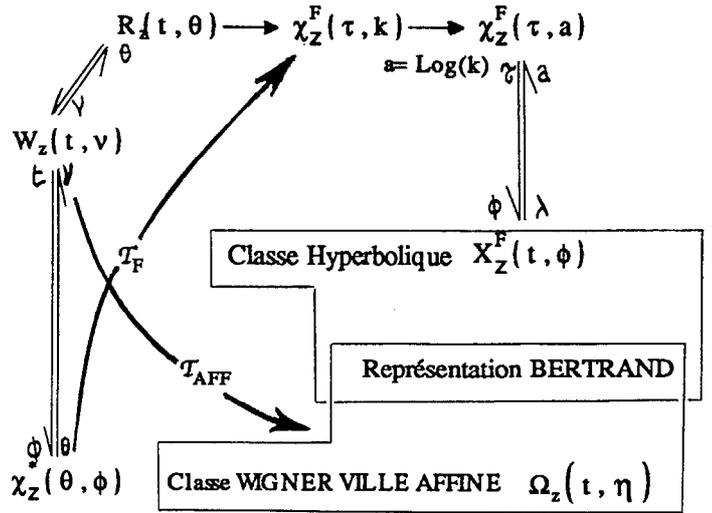
$$\chi_Z^F(\tau, k) = \left(\int_{\mathbb{R}} R_d(t', \tau + \alpha t) dt' \right)^*$$

$$\chi_Z^F(\tau, k) = \left(\int_{\mathbb{R}} W_d(t', v) e^{-2i\pi v(\tau + \alpha t')} dt' dv \right)^* \quad (14)$$

avec: $\alpha = 2 \left(\frac{k-1}{k+1} \right)$ et $R_d(t, \tau) = Z \left(t + \frac{\tau}{2} \right) Z^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right)$

est la représentation bitemporielle associée. A partir de (11) avec les relations (12)(13) vient l'expression de $X_Z^F(t, \phi)$.

Le diagramme suivant s'en déduit :



Il apparait que la classe hyperbolique peut s'exprimer par une déformation non linéaire des variables (cf ci-dessus en 4a). Elle dépend du mode d'écriture choisi pour l'opérateur de changement d'échelle:

$$D_{\eta} [Z(t)] = e^{2i\pi(\text{Log}(\eta))} \hat{t} \hat{v} [Z(t)],$$

$a = \text{Log}(\eta)$ où \hat{t} et \hat{v} sont les opérateurs attachés aux variables temps et fréquence.

4c) Vers une classe de représentation hyperbolique temps fréquence :

Nous suivons une voie différente de celle proposée par F. HLAWASTSCH et al, en utilisant la relation (13) liée à la fonction d'Ambiguïté. On procède à

partir de $X_Z^F(t, \phi)$ (classe de COHEN) comme avec (11), il vient, ϕ' étant égale à $-2\phi \text{th} \left(\frac{a}{2} \right)$:

$$X_Z^F(t, \phi) = \left(\int_{\mathbb{R}^2} W_z(t', v') f(\phi', \phi - v) e^{-2i\pi(\phi a t - \phi' t')} dv dt' \right)^*$$

avec: $f'(\phi, n) \Leftrightarrow_{\tau} f(n, \tau)$.

ce qui conduit à:

$$X_Z^F(t, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \left[W_z \left(2\phi \text{th} \left(\frac{a}{2} \right), n \right) *_{\tau} f \left(2\phi \text{th} \left(\frac{a}{2} \right), n \right) \right]_{(\omega)} e^{-2i\pi t a} da \quad (15)$$

où W_z est la représentation bifréquentielle associée à $W_z(t, v)$. La classe hyperbolique, au sens de F. HLAWASTSCH, se déduit des propriétés de la fonction d'Ambiguïté Symétrique due à P. FLANDRIN. L'existence d'une telle classe liée à la fonction de pondération $f(n, \tau)$ de la classe de COHEN traduit les différentes écritures de l'opérateur de changement d'échelle. Les règles de correspondances associées suggèrent que les cas $f(n, \tau) = g(n\tau)$ ont un intérêt certain.



Conclusion:

La classe des distributions temps/échelle WIGNER VILLE affines s'interprète comme une analyse à surtension constante. La transformée de FOURIER à 2 dimensions est une représentation fréquence, date réduite de module extrémal à l'origine révélant certaines propriétés du signal. L'emploi de la transformation de MELLIN FOURIER plus adaptée conduit à la classe hyperbolique des représentations temps fréquence déductible des propriétés des fonctions d'Ambiguïté en translation et changement d'échelle. Le rôle d'une règle de correspondance pour l'écriture de l'opérateur de changement d'échelle paraît alors essentiel.

Remerciements :

Les auteurs tiennent à remercier P. FLANDRIN et P. GONCALVES pour bien des renseignements documentaires et pour des échanges de vue des plus précieux au sujet de ces problèmes ouverts.

Références :

- [1] A. GROSSMANN, B. ESCUDIE
Une représentation bilinéaire en temps et en échelle des signaux d'énergie finie.
13^{ème} Col. National Traitement du Signal
Tome 1, GRETSI Sept 1991 - p. 33 à p.36
- [2] P. FLANDRIN,
Sur une classe générale d'extensions affines de la distribution de WIGNER VILLE
13^{ème} Col. National Traitement du Signal
Tome 1, GRETSI Sept 1991 - p. 17 à p.20
- [3] G. COURBEBASSE
Transformée bilinéaire temps échelle des signaux asymptotiques d'énergie finie.
14^{ème} Col. National Traitement du Signal
GRETSI 1993 (à paraître).
- [4] R.A. ALTES
Wide-band, proportional bandwidth WIGNER VILLE analysis.
IEEE Trans. A.S.S.P. Vol 38 n°6 1990
p. 1005 à p. 1012
- [5] A. PAPANDREOU, F.HLAWATSCH et al.
A unified framework for the BERTRAND distribution and the ALTES distribution: the new hyperbolic class of quadratic time-frequency distribution
IEEE ICASSP 1992 - p. 27 à p. 30
- [6] J. VILLE
Câbles et Transmissions n°1 - 1948
- [7] S.M. SUSSMANN
Phys. Doct. J. Hospinks
Université de Baltimor USA 1961

- [8] R. G. SHENOY T.W. PARKS
Proc. IEEE ICASSP 1992 Vol 5 - p. 185 à p.188
- [9] P.FLANDRIN B.ESCUDE
Rapport interne ICPI TS81 - 10 LYON 1981
- [10] P.FLANDRIN et al.
IEEE symp. on Inf. theory - Les Arcs 1982

