



ANALYSE PAR TRANSFORMEE DE WIGNER-VILLE  
D'UN SIGNAL NON-UNIFORMEMENT ECHANTILLONNE:  
ETUDE DU MOUVEMENT GYROSCOPIQUE  
D'UN MOBILE EN ROTATION

**L. SIMON, J. C. VALIERE  
et C. DEPOLLIER**

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine URA 1101  
Avenue O. Messiaen 72017 Le Mans CEDEX France

**RESUME**

Nous proposons une méthode basée sur la transformation de Wigner-Ville pour déterminer les composantes instantanées du mouvement d'un mobile lancé à grande vitesse et en rotation rapide autour de son axe de symétrie ( nutation, précession, rotation propre ), soumis à des forces de frottement. Les échantillons, collectés par une sonde asservie au mouvement, sont généralement répartis non-uniformément sur l'axe des temps. L'analyse spectrale par transformation de Wigner-Ville permet le traitement direct de ces échantillons. Des exemples simulés et réels ont été réalisés.

## 1 Introduction

Le problème de l'analyse spectrale de signaux non-uniformément échantillonnés n'a pas de solution générale simple. L'analyse directe des échantillons non-uniformément espacés sur l'axe des temps et dont la loi d'échantillonnage est contrôlée a été réalisée par FFT [1] dans le cadre de signaux stationnaires et fournit des résultats décevants. Les autres méthodes qui sont proposées sont souvent d'une mise en œuvre lourde et peu pratique; dans la plupart des cas une reconstruction préalable du signal est nécessaire mais pas toujours réalisable à cause des contraintes liées à cette reconstruction qui ne permettent bien souvent qu'une solution approchée [2].

L'analyse des signaux non stationnaires cumule évidemment les difficultés: à celles citées plus haut, s'ajoutent celles inhérentes à leur caractère non stationnaire. L'approche de ce problème que nous proposons ici s'appuie à la fois sur les propriétés de bilinéarité de certaines transformations temps-fréquence et sur les propriétés de symétrie d'échantillonnages non-uniformes obtenus par exemple lors de mesures sur des systèmes asservis. L'analyse directe de tels échantillons non équidistants par la distribution de Wigner-Ville (DWV) permet l'extraction et le suivi des composantes de signaux non stationnaires. Un exemple portant sur la détermination des composantes (rotation propre, précession et nutation) du mouvement gyroscopique d'un projectile illustre l'efficacité et les limites de la méthode.

**ABSTRACT**

The aim of this paper is the presentation of a method using the Wigner-Ville Distribution to determine instantaneous components (nutation, precession and rotation) of the fast speed spinning motive subject to friction forces. The samples are collected by a sensor enslaved to the motion, and thus they are non-uniformly distributed on the time axis. The spectral analysis by the Wigner-Ville Distribution allows a direct samples processing. Results from real and synthetic signals are presented.

## 2 Le problème mécanique

On s'intéresse au problème rencontré lors de la détermination des valeurs des composantes du mouvement gyroscopique d'un projectile lancé à grande vitesse. Lorsqu'un mobile, dont on suppose qu'il a une forme à symétrie de révolution, se déplace dans un fluide, les couplages entre ses mouvements de translation et de rotation induisent une dynamique compliquée et conduisent à des trajectoires qui paraissent parfois surprenantes. De telles situations se rencontrent couramment dans les sports de balle, ou en artillerie dans le cas de munitions lancées à l'aide de canons rayés.

Parmi les effets du milieu sur le mouvement, le plus important est le couple produit par le frottement du fluide sur le mobile dont l'action entraîne une dérive du projectile. Plus particulièrement ce projectile acquiert un mouvement gyroscopique dont les vitesses de rotation propre, de précession et de nutation sont des fonctions des forces de frottement. Si, à cause de leur complexité il n'est pas possible de donner une description complète des effets du fluide sur le mobile, on peut néanmoins les modéliser par une force de frottement proportionnelle à la vitesse de rotation. Le comportement dynamique du projectile est alors gouverné par le système suivant [3]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (A - C)qr &= \lambda p, \\ A\dot{q} - (A - C)rp &= \lambda q, \\ C\dot{r} &= \lambda r, \end{aligned} \quad (1)$$



où la lettre pointée désigne sa dérivée par rapport au temps, A et C les éléments de la matrice d'inertie du projectile et  $\lambda$  la constante de proportionnalité entre le moment des forces de frottement et la vitesse de rotation. Les quantités p,q et r s'expriment en fonction des angles de précession, de nutation et de rotation propre  $\psi, \vartheta$  et  $\varphi$  sous la forme:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + \dot{\vartheta} \cos(\varphi), \\ q &= \dot{\psi} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) - \dot{\vartheta} \sin(\varphi), \\ r &= \dot{\psi} \cos(\varphi) + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Si on suppose que les forces de frottement sont faibles par rapport aux forces d'inertie, la vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  du projectile qui est donnée par la solution du système (2) peut s'écrire:

$$\|\vec{\omega}(t)\| \cong \omega_0 \exp(-\varepsilon_0 t), \quad (3)$$

où  $\omega_0$  et  $\varepsilon_0$  sont des fonctions des angles  $\psi, \vartheta$  et  $\varphi$  et de  $\lambda$ . On définit ainsi la "pseudopériode"  $T(t)$  du mouvement de rotation du projectile par l'expression:

$$T(t) = T_0 \exp(\varepsilon_0 t), \quad (4)$$

qu'on peut encore développer au premier ordre à l'aide du paramètre sans dimension  $\varepsilon = \varepsilon_0 T_0$  sous la forme:

$$T(t) \cong T_0(1 + \varepsilon t/T_0). \quad (5)$$

### 3 Modèle d'échantillonnage

Pour étudier le mouvement de rotation du projectile, on mesure, à l'aide d'une sonde d'attitude, l'angle  $\beta(t)$  entre la direction d'un de ses axes ( $\vec{n}$ ) et celle du soleil ( $\vec{d}$ ) prise comme référence (fig.1). Le signal utile est l'éclairement mesuré par des cellules photo-électriques placées sur le corps du projectile. Les échantillons sont envoyés par la sonde lorsque le signal passe par ses maxima i.e. lorsque le produit scalaire  $\vec{n} \cdot \vec{d}$  est maximal. L'échantillonnage est ainsi asservi à la rotation non-uniforme du projectile et s'effectue avec la périodicité donnée par Eq. (5), l'écart de temps entre les deux dates consécutives  $t_{n+1}$  et  $t_n$  étant:

$$T(n) \cong T_0(1 + \varepsilon(n-1)). \quad (6)$$

Pour une collection de  $2N + 1$  échantillons, on définit le changement de variables  $(T_0, \varepsilon) \rightarrow (\bar{T}, \bar{\varepsilon})$  ( $\bar{T}$  est la période moyenne  $((t_{2N+1} - t_1)/2N)$  qui décrit la loi d'échantillonnage par rapport à la pseudo date centrale  $t_{N+1}$ . Dans ces conditions les échantillons possèdent la propriété de symétrie indicielle suivante (fig.2) :

$$t_{N+1+i} - t_{N+1-i} = 2i\bar{T}. \quad (7)$$

Cette symétrie indicielle des dates autour de la date centrale, bien adaptée à l'utilisation d'une transformation bilinéaire, ainsi que la nature du signal (non stationnaire et à faible nombre de composantes) permettent d'envisager l'analyse temps-fréquence du mouvement du projectile par la transformation de Wigner-Ville directement appliquée à l'échantillonnage non uniforme.

### 4 Distribution de Wigner-Ville et échantillonnage non-uniforme

La distribution de Wigner-Ville (DWV) du signal  $s(t)$  [4] est une transformation bilinéaire qui appartient à la classe de Cohen. Pour le signal analytique  $z(t)$  [4] du signal  $s(t)$  elle s'écrit:

$$DWV_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t + \frac{\tau}{2}) z^*(t - \frac{\tau}{2}) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (8)$$

Une version discrète de cette distribution a été proposée par Claasen et et Mecklenbräuker [5] sous la forme:

$$DWVD_s(t_l, f) = \sum_k s(t_{l+k}) s^*(t_{l-k}) \exp(-j4\pi f k T), \quad (9)$$

dont le calcul nécessite que l'on limite le nombre d'échantillons à l'aide du fenêtrage du signal discret par une fonction  $h(t_k)$ . La Pseudo Distribution de Wigner-Ville Discrète (PDWVD) ainsi obtenue s'écrit:

$$PDWVD_s(t_{N+1}, f) = \sum_k s(t_{N+1+k}) s^*(t_{N+1-k}) h(t_k) h(t_{-k}) \exp(-j4\pi f k T),$$

où  $h(t)$  est une fenêtre symétrique de taille  $(2N+1)$ . L'existence de termes interférentiels dus à la bilinéarité de la transformation limite l'usage de la DWV à l'étude de signaux à faible nombre de composantes aux supports fréquentiels disjoints. Ces interférences dont la structure oscille dans le temps peuvent être lissées dans le cas classique de l'échantillonnage uniforme [6]. Quant au terme  $\exp(-j4\pi f k T)$  de l'Eq.(9) il indique que pour éviter tout problème d'aliasage dans le cas du signal réel  $s(t)$ , il doit être suréchantillonné d'un facteur 2 [5].

Dans le cas d'un échantillonnage non-uniforme respectant la symétrie indicielle des paires de dates de l'Eq.(7), on applique directement la DWV sur les échantillons. Cette opération est faite au détriment de la localisation de la date centrale et introduit une erreur (de l'ordre de  $\varepsilon T_0$ ) dans l'évaluation de la date d'analyse du signal. Le noyau de la transformation est construit de façon similaire à Eq.(9) et la transformée de Fourier à temps discret de ce noyau s'effectue à la cadence  $2\bar{T}$  où  $\bar{T}$  est la période moyenne d'échantillonnage sur la durée de la fenêtre d'observation. D'autre part le filtrage de Hilbert du signal non-uniformément échantillonné n'étant pas possible, on a privilégié la solution au problème du suréchantillonnage qui consiste simplement à imposer que les fréquences observables (pour une fenêtre d'observation) vérifient:

$$f_{obs} \leq \frac{1}{4\bar{T}}. \quad (10)$$

De ce fait, des interférences propres à l'utilisation du signal réel apparaîtront donc en particulier à la fréquence  $f = 0$ . Quant à la "pollution spectrale" engendrée par la non-uniformité de l'échantillonnage le modèle d'échantillonnage développé plus haut permet d'en prédire



la localisation. Considérons par exemple le signal monochromatique stationnaire suivant:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0). \quad (11)$$

Le calcul de la PDWVD de ce signal vu à travers une fenêtre rectangulaire et échantillonné suivant l'Eq.(6) conduit au résultat suivant:

$$\begin{aligned} PDWVD_s(t, f) &= A^2 \sum_k \exp(j4\pi(f_0 - f)k\bar{T}) \\ &+ A^2 \sum_k \exp(-j4\pi(f_0 + f)k\bar{T}) \\ &+ \frac{A^2}{2} \sum_k \cos(4\pi f_0(t + \varepsilon k^2 \bar{T}) + 2\varphi_0) \exp(-j4\pi f k \bar{T}). \end{aligned}$$

Par rapport au calcul classique, seul le pic d'interférence en  $f = 0$  est modifié par l'échantillonnage non-uniforme, les pics des fréquences  $\pm f_0$  restant facilement accessibles. Le terme d'interférence:

$$\sum_k \cos(4\pi f_0(t + \varepsilon k^2 \bar{T}) + 2\varphi_0) \exp(-j4\pi f k \bar{T}) \quad (12)$$

apparaît comme la transformée de Fourier à temps discret d'un signal du type "sinus glissant". Dans sa version continue, ce terme s'exprime à l'aide d'intégrales de Fresnel qui contribuent à l'élargissement de la zone d'interférences (fig.3). La figure 4 représente la PDWVD d'un signal bichromatique stationnaire échantillonné non-uniformément conformément à l'Eq.(6). Sur la figure 5, on montre une comparaison entre les évolutions temps-fréquence de signaux simulés (traits pleins) et échantillonnés selon l'Eq.(6) et les résultats (\*) obtenus par PDWVD de ces signaux. Pour les signaux de synthèse, l'analyse par PDWVD donne des résultats qui sont en bon accord avec les lois de variation des fréquences. Typiquement:

- l'erreur sur l'estimation de la fréquence basse (de précession) est de 2 % pour la gamme de fréquence de 0.5 à 4 Hz;
- l'erreur sur l'estimation de la fréquence haute (de nutation) est de 0.2 % pour la gamme de fréquence 10 à 20 Hz.

Pour des fréquences inférieures à 0.5 Hz l'effet des interférences en  $f = 0$  s'ajoute à la difficulté de détection d'une fréquence aussi basse.

## 5 Exemple d'un tir réel

Le signal collecté à partir du mouvement du projectile est acquis à une cadence liée à la vitesse de rotation propre de ce projectile. Ainsi, à cause des frottements, la fréquence d'échantillonnage varie typiquement entre 250 et 50 Hz. La composante basse fréquence du signal induite par le mouvement de précession est comprise dans la gamme [0.4 Hz, 4 Hz], tandis que celle de la composante due à la nutation peut varier de 10 à 20 Hz. La figure 6

montre la répartition de l'énergie de ce signal dans le plan temps-fréquence; on y distingue nettement les deux composantes de précession et nutation du mouvement, même si cette dernière disparaît lentement au cours de la durée de l'observation.

## 6 Conclusion

L'analyse spectrale de signaux non-uniformément échantillonnés a pu être réalisée à l'aide de la DWV moyennant certaines conditions sur ces signaux et sur la symétrie indiciale des dates de l'échantillonnage.

Dans ce cas, pour des signaux stationnaires (somme de signaux harmoniques par exemple) l'effet de la non-uniformité de l'échantillonnage ne perturbe que les termes d'interférences, permettant ainsi d'accéder directement aux fréquences présentes dans le signal. Dans le cas des signaux non stationnaires dont la fréquence est une fonction linéaire du temps on montre que l'effet de l'échantillonnage est simplement la convolution des composantes du signal avec des fonctions d'Airy dont la décroissance est suffisamment rapide pour permettre l'identification des fréquences utiles du signal.

La grande variété des phénomènes physiques dont la loi d'évolution est du type de l'Eq.(3) montre que cette méthode est particulièrement bien adaptée par exemple pour le contrôle de systèmes mécaniques tels que les systèmes vibrants, les machines tournantes dans les parties transitoires de leurs mouvements et pour lesquels l'échantillonnage est bien souvent asservi. De plus l'absence de reconstruction préalable du signal permet d'envisager une analyse en temps réel.

## References

- [1] A. Berkovitz and I Rusnak *FFT processing of randomly sampled harmonic signals* IEEE Trans. Sig. Proc. **Vol 40**, N° 11 2816-2819, (1992)
- [2] K.Yao and J.B.Thomas *On some stability and interpolatory properties of nonuniform sampling expansion* IEEE Trans. Circ.Th. **Vol CT-14**, N° 4 404-408, (1967).
- [3] A.Gray. *A treatise on gyrostatics and rotational motion* Dover Publications, Inc. New York, (1959).
- [4] J. Ville. *Théorie et applications de la notion de signal analytique*. Cables et Transmission, 2<sup>e</sup>, 1, 61-74, (1948).
- [5] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbräuker. *The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis* (3 parties), Philips J.Res., 35 N° 3,4/5,6, 217-250, 276-300, 372-389, (1980).
- [6] P.Flandrin, B.Escudié. *Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville* Traitement du Signal. 2 142-151, (1985).

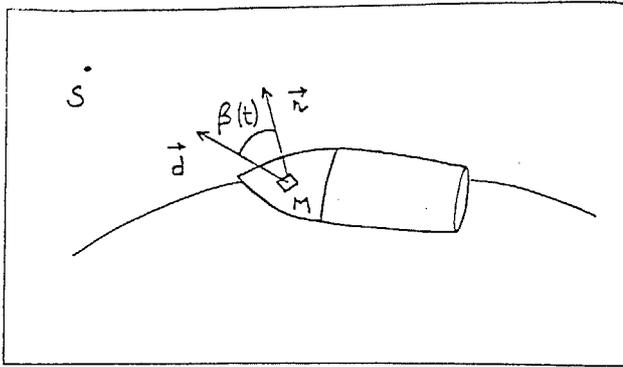


fig.1: Définition des notations utilisées pour la mesure de l'attitude du projectile.

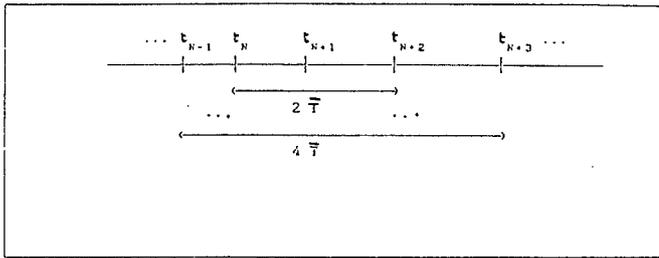


fig.2: Position des échantillons autour de la date centrale (symétrie indicelle des paires d'échantillons).

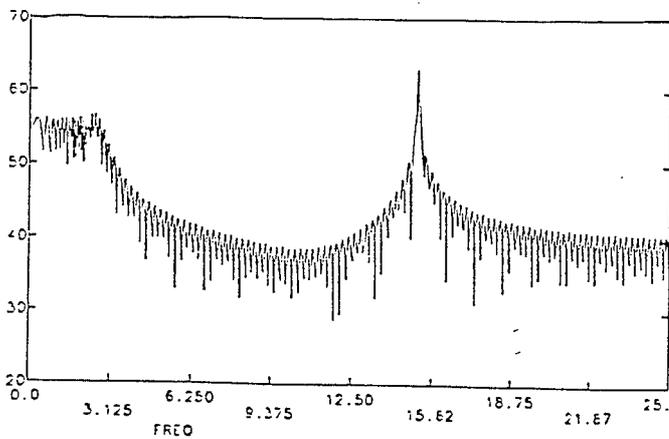
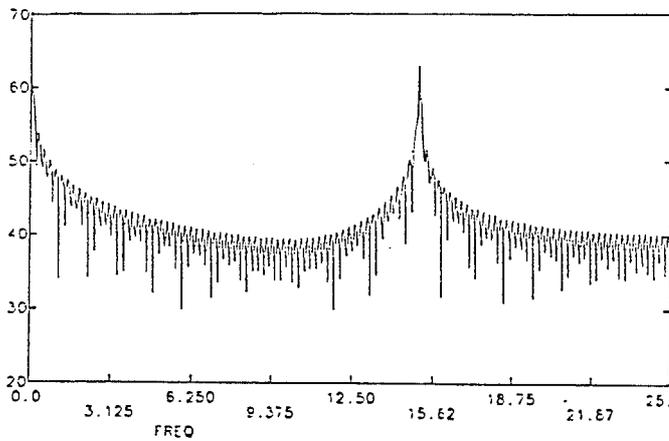


fig.3: PDWVD d'un signal monochromatique stationnaire a) échantillonné régulièrement; b) échantillonné non uniformément.

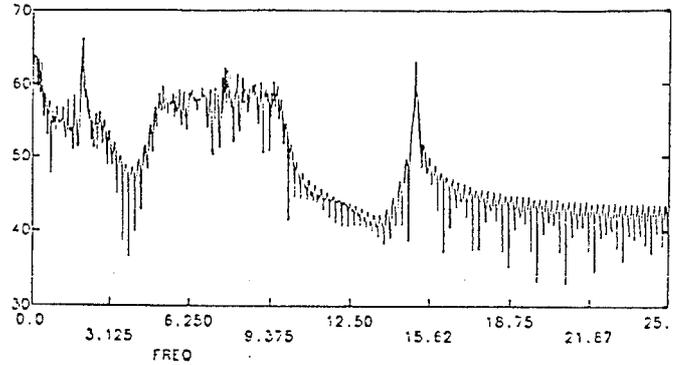
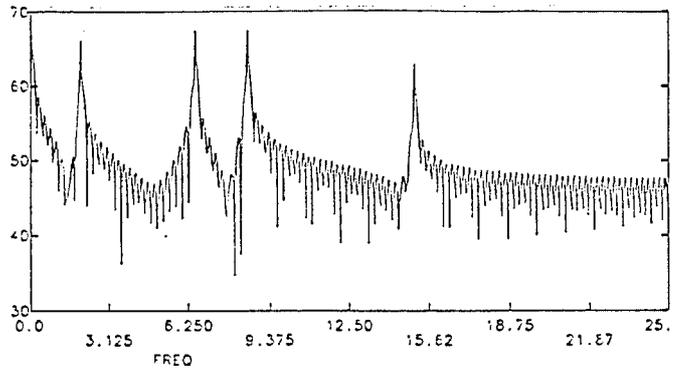


fig.4: PDWVD d'un signal bichromatique stationnaire a) échantillonné régulièrement; b) échantillonné non uniformément.

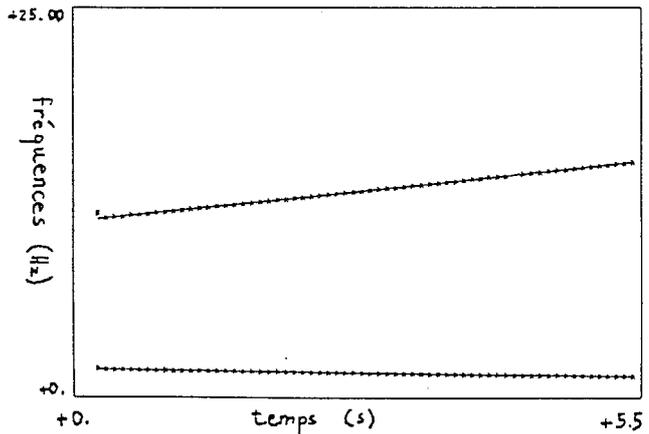


fig.5: Comparaison entre l'évolution temps-fréquence d'un signal simulé (trait plein) et les résultats (\*) obtenus par PDWVD de ce signal.

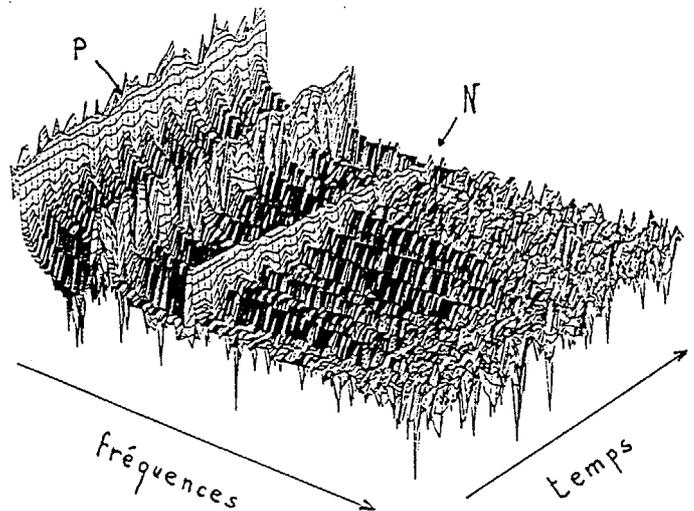


fig.6: Représentation temps-fréquence du signal d'un tir réel. Les fréquences de précession et de nutation sont respectivement notées P et N