



APPLICATION DE LA RENORMALISATION A L'ANALYSE DE TEXTURES MARKOVIENNES GAUSSIENNES

X. DESCOMBES, M. SIGELLE, F. PRETEUX

**TELECOM PARIS Département Images
46, rue Barrault 75634 Paris Cedex 13.**

RÉSUMÉ

Le problème de l'estimation des paramètres associés aux champs markoviens est souvent abordé soit conjointement à un problème de restauration, ou de segmentation, soit directement dans le cadre d'approximations à partir du pseudo-maximum de vraisemblance. Ces méthodes se révèlent inappropriées dans le cadre de l'analyse de textures où une discrimination fine nécessite une estimation précise des paramètres caractéristiques du modèle markovien. Dans cet article, nous proposons une méthode pour l'estimation exacte des paramètres d'un modèle markovien gaussien 4-connexe reposant sur la théorie de la renormalisation. Tout d'abord, nous démontrons de façon analytique le caractère gaussien de la texture décimée, puis nous donnons les estimateurs conjoints, associés aux textures initiale et décimée permettant alors d'estimer les paramètres caractéristiques de la texture originale. Précision et robustesse des estimations sont établies à partir d'images de synthèse de textures stationnaires ou non.

1) Introduction

Dans le cadre de la modélisation markovienne en analyse d'image, le problème principal lié à l'utilisation de cette approche concerne l'estimation des paramètres mis en jeu. La seule méthode exacte, fondée sur le principe du maximum de vraisemblance, est inexploitable en pratique si l'on ne dispose pas a priori de la connaissance de la fonction de partition. Des méthodes approchées ont donc été proposées à partir du pseudo-maximum de vraisemblance [GIM-90]. Une autre démarche consiste à effectuer l'estimation conjointement à l'étape d'optimisation associée à la segmentation ou la restauration, avec les algorithmes de type EM [CHA-89] ou SEM [MAS-91]. Si ces techniques permettent d'obtenir de bons résultats en segmentation et restauration, elles se révèlent inappropriées dans le cadre de l'analyse de textures où une discrimination fine repose sur l'estimation précise des paramètres caractéristiques du modèle markovien. En outre, l'analyse de textures requiert, en particulier dans le cadre non-stationnaire, l'utilisation de fenêtres de petites tailles, d'où la nécessité de garantir la robustesse de la méthode d'estimation vis-à-vis de la taille de l'ensemble des statistiques calculées.

Dans cet article, nous présentons une méthode d'estimation des paramètres intrinsèques à un champ markovien gaussien (CMG) défini en 4-connexité, fondée sur la théorie de la renormalisation. Après avoir rappelé les principes fondamentaux de la méthode de renormalisation, nous en détaillons l'application au cas des CMG, explicitant les calculs des différentes énergies

ABSTRACT

Estimating various parameters involved in Markov Random Fields modelling is usually dealt with indirectly within the framework of a specific segmentation or restoration algorithm, or directly via such approximations as pseudo-likelihood estimation. These methods prove to be unadequate within the framework of texture analysis where satisfying discrimination relies on accurately estimating the various parameters involved in the Markov model. In this article, we present a renormalization-based approach for accurately estimating parameters of a 4-connected GMRF. Decimated texture is proved to be Gaussian and robust estimators associated with initial and decimated textures are derived, yielding consistent estimates for initial texture parameters. Accuracy and robustness of these estimators are established on synthetic textures within both stationary and non-stationary frameworks.

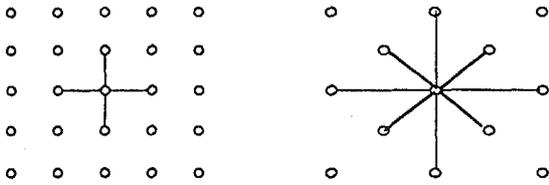
en jeu. Ensuite, nous déduisons les estimateurs du paramètre de température et du coefficient de pondération entre les cliques d'ordre 1 et 2. Finalement, nous démontrons la pertinence des résultats ainsi obtenus et le pouvoir discriminant des paramètres estimés à partir de la synthèse d'images de textures stationnaires ou non.

2) Principes de la méthode de renormalisation

La théorie de la renormalisation a été développée en physique statistique dans le cadre de l'étude des systèmes comprenant un grand nombre d'éléments en interaction et est appliquée en physique des particules et en théorie des champs, notamment dans le cadre des réseaux de spins [LEB-74], [AMI-80].

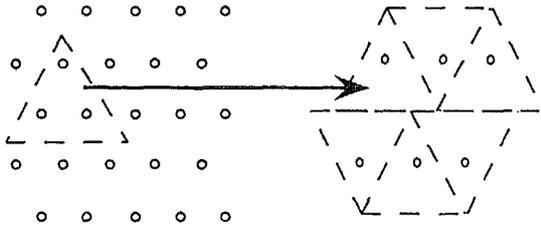
Le principe de la renormalisation consiste à exploiter les propriétés de quasi-invariance par changement d'échelle des fonctions thermodynamiques de réseaux de spins au voisinage de leur température critique afin d'obtenir des relations sur les coefficients critiques associés. Deux variantes de renormalisation ont été étudiées dans ce cadre :

- 1) renormalisation par décimation qui consiste à calculer l'hamiltonien effectif d'un sous-réseau du réseau initial,
- 2) renormalisation par blocs qui consiste à calculer l'hamiltonien d'un nouveau réseau constitué par des blocs formés de plusieurs pixels adjacents (fig. 1).



Réseau initial et interactions en 4-connexité. Réseau décimé et interactions induites (8-connexité).

Figure 1.a : Renormalisation par décimation.



Réseau triangulaire initial. Réseau renormalisé.

Figure 1.b : Renormalisation par blocs.

Figure 1 : Transformations de réseaux.

Les applications de cette théorie en traitement d'image restent peu nombreuses et ne concernent que l'imagerie binaire [MAT-88] [GID-89]. En nous restreignant à la seule renormalisation par décimation, nous nous proposons de mettre en œuvre le principe de renormalisation dans le cadre de l'estimation des CMG en 4-connexité.

Soit une partition de l'ensemble S des sites en deux sous-ensembles D et R disjoints : $S = \{s\}_{s \in S} = \{r\}_{r \in R} \cup \{d\}_{d \in D}$.

Soit une distribution de Gibbs sur S :

$$P(x_r, x_r, \dots, x_d, x_d, \dots) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{1}{T} U(x_r, x_r, \dots, x_d, x_d, \dots) \right], \quad (2.1)$$

où x_d (resp. x_r) désigne une réalisation au site d de D (resp. r de R), les x_d et x_r prenant leurs valeurs dans l'espace d'états Λ , Z est la fonction de partition et T le paramètre de température.

Renormaliser le modèle consiste alors à calculer la loi marginale de P sur le sous-ensemble R , soit :

$$P(x_r, x_r, \dots) = \frac{1}{Z} \int_{x_d \in \Lambda} \exp \left[-\frac{1}{T} U(x_r, x_r, \dots, x_d, x_d, \dots) \right] dx_d. \quad (2.2)$$

Le modèle est renormalisable si la loi marginale ainsi définie est encore une loi de Gibbs sur R , c'est-à-dire :

$$P(x_r, x_r, \dots) = \frac{1}{\tilde{Z}} \exp \left[-\frac{1}{T} \tilde{U}(x_r, x_r, \dots) \right], \quad (2.3)$$

où \tilde{U} est l'énergie renormalisée.

Pour calculer \tilde{U} , nous imposons l'égalité des fonctions de partition $Z = \tilde{Z}$, et obtenons :

$$\exp \left[-\frac{1}{T} \tilde{U}(x_r, \dots) \right] = \int_{x_d \in \Lambda} \exp \left[-\frac{1}{T} U(x_r, \dots, x_d, \dots) \right] dx_d. \quad (2.4)$$

Appliquons ce principe au cas d'un CMG 4-connexe.

3) Renormalisation d'un CMG 4-connexe

La fonction d'énergie d'un CMG 4-connexe défini sur S s'exprime sous la forme générale suivante :

$$U(x_s, x_{s'}, \dots) = \sum_{\{s, s'\} \in C_2} (x_s - x_{s'})^2 + \lambda \sum_{\{s\} \in C_1} (x_s - \mu_s)^2, \quad (3.1)$$

où C_1 est l'ensemble des cliques d'ordre 1 (singleton) et C_2 l'ensemble des cliques d'ordre 2 (sites adjacents au sens de la 4-connexité) et où μ_s désigne un paramètre de moyenne locale éventuellement non-stationnaire.

Le premier terme de l'expression (3.1) est un terme de type attractif qui augmente la corrélation entre sites adjacents alors que le second terme représente une attache à une moyenne locale non-stationnaire. L'hyperparamètre λ , pondérant l'influence des potentiels associés aux cliques d'ordre 1 et 2, permet de définir le grain de la texture (fig. 2).

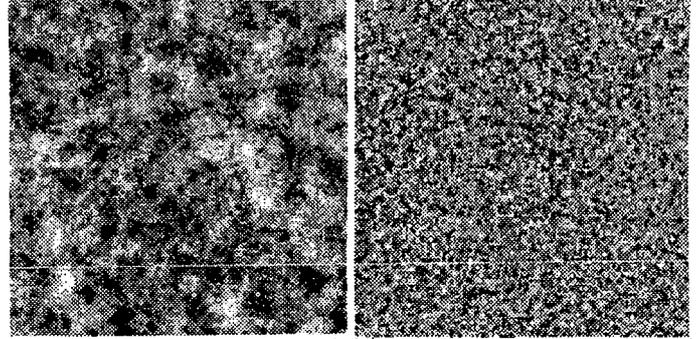


Figure 2-a : $T = 2000$, $\lambda = 0.1$.

Figure 2-b : $T = 2000$, $\lambda = 1$.

Figure 2 : Simulations d'un CMG 4-connexe.

Le processus de décimation choisi consiste à ne conserver qu'un site sur deux en décalant le processus suivant la parité des lignes. Ainsi, deux sites du réseau décimé (resp. du réseau renormalisé) ne sont pas mutuellement voisins. L'énergie initiale peut donc s'écrire :

$$U(x_r, \dots, x_d, \dots) = \sum_{\{r, d\} \in C_2, r \in R, d \in D} (x_r - x_d)^2 + \lambda \sum_{\{r\} \in C_1, r \in R} (x_r - \mu_r)^2 + \lambda \sum_{\{d\} \in C_1, d \in D} (x_d - \mu_d)^2, \quad (3.2)$$

ou encore, sachant qu'un site de R a quatre voisins dans D :

$$U(x_r, \dots, x_d, \dots) = \sum_{d \in D} \left[\lambda (x_d - \mu_d)^2 + \sum_{\{r, d\} \in C_2, r \in R} (x_d - x_r)^2 \right] + \lambda \sum_{\{r\} \in C_1, r \in R} (x_r - \mu_r)^2. \quad (3.3)$$

Renormaliser le modèle revient donc à intégrer l'exponentielle de l'énergie U donnée par (3.3) sur les sites de D . L'énergie s'écrivant comme une somme sur les sites de D , l'intégrale multiple obtenue est séparable et nous avons :

$$\exp \left[-\frac{1}{T} U(x_r, \dots, x_d, \dots) \right] = \exp \left[-\frac{\lambda}{T} \sum_{\{r\} \in C_1, r \in R} (x_r - \mu_r)^2 \right] \times \prod_{d \in D} \int_{\Lambda} \exp \left[-\lambda (x_d - \mu_d)^2 + \sum_{\{r, d\} \in C_2, r \in R} (x_d - x_r)^2 \right] dx_d. \quad (3.4)$$

Une conséquence directe du théorème d'Huyghens permet de vérifier que, si Λ est égal à \mathbb{R} [DES-92], on a :

$$\int_{\Lambda} \exp \left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x - \alpha_i)^2 \right] dx = \exp \left[-\frac{\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (\alpha_i - \alpha_j)^2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \right]. \quad (3.5)$$

Comme chaque site a quatre voisins, chacune des intégrales de (3.4) s'exprime comme suit :

$$\exp \left[-\frac{1}{(4+\lambda)T} \lambda \sum_{\{r,d\} \in C_2, r \in R} (x_r - \mu_d)^2 + \sum_{\substack{r_1, r_2 \in R \\ \{r_1, d\} \in C_2 \\ \{r_2, d\} \in C_2}} (x_{r_1} - x_{r_2})^2 \right] \quad (3.6)$$

Cela établit que le modèle renormalisé reste gaussien. Le système de voisinage induit sur le réseau renormalisé se déduit de (3.6). En effet, deux sites voisins d'un même site décimé se retrouvent mutuellement voisins après renormalisation. Le modèle renormalisé est donc un modèle gaussien 8-connexe. Le potentiel associé aux cliques d'ordre 1 est donné par la somme du potentiel du modèle initial sur la clique considérée et des quatre contributions de (3.6) des potentiels d'ordre 1 associés aux sites décimés, voisins du site considéré, d'où :

$$V_{c=\{r\}}(x_r) = \lambda(x_r - \mu_r)^2 + \frac{\lambda}{4+\lambda} \sum_{d \in D, \{d,r\} \in C_2} (x_r - \mu_d)^2 \quad (3.7)$$

$$= \frac{\lambda(4+\lambda) + \lambda}{4+\lambda} (x_r - \bar{\mu}_r)^2 + \text{Cste.}$$

Un seul site décimé est simultanément voisins des deux sites d'une clique verticale (resp. horizontale) du réseau renormalisé alors que pour les cliques diagonales, cette propriété est vérifiée par deux sites (fig. 3). Les potentiels des cliques verticales et horizontales sont donc donnés par :

$$V_{c=\{r_1, r_2\}}(x_{r_1}, x_{r_2}) = \frac{1}{4+\lambda} (x_{r_1} - x_{r_2})^2, \quad (3.8)$$

et ceux des cliques diagonales par :

$$V_{c=\{r_1, r_2\}}(x_{r_1}, x_{r_2}) = \frac{2}{4+\lambda} (x_{r_1} - x_{r_2})^2. \quad (3.9)$$



Figure 3 : Formation des cliques du réseau renormalisé.

4) Estimateurs obtenus

Les paramètres T et λ peuvent maintenant être estimés à partir des probabilités conditionnelles calculées sur le réseau initial et sur le réseau décimé.

Pour un CMG quelconque, les probabilités conditionnelles locales sont alors données par :

$$P(x_s / x_{s'}, s' \in V_s) = \frac{1}{Z_s} \exp \frac{1}{T} \left[-\lambda(x_s - \mu_s)^2 - \sum_{s' \in V_s} \alpha_{s'} (x_s - x_{s'})^2 \right], \quad (4.1)$$

où V_s désigne le voisinage du site s.

En regroupant les différents termes quadratiques et en intégrant la constante résiduelle dans la fonction de partition locale, nous obtenons :

$$P(x_s / x_{s'}, s' \in V_s) =$$

$$\frac{1}{Z_s} \exp \left[-\frac{1}{T} \left(\lambda + \sum_{s' \in V_s} \alpha_{s'} \right) \left(x_s - \frac{\lambda \mu_s + \sum_{s' \in V_s} \alpha_{s'} x_{s'}}{\lambda + \sum_{s' \in V_s} \alpha_{s'}} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

Pour un site s donné, cette distribution ne dépend des différents voisins de s que par une combinaison linéaire. De plus, la variance de cette distribution étant indépendante des voisins, chaque variance conditionnelle donne un estimateur de la même fonction des paramètres. Nous proposons d'utiliser cette propriété remarquable pour obtenir un estimateur de T et λ donné par :

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{\hat{T}}{2 \left(\hat{\lambda} + \sum_{s' \in V_s} \hat{\alpha}_{s'} \right)} = \sum_m \hat{\sigma}_m^2 P \left(\sum_{s' \in V_s} \alpha_{s'} x_{s'} = m \right), \quad (4.3)$$

où $\hat{\sigma}_m^2$ est la variance de la distribution en s conditionnellement à $\sum_{s' \in V_s} \alpha_{s'} x_{s'} = m$.

Si nous appliquons la formule (4.3) au CMG 4-connexe initial et au CMG 8-connexe renormalisé, nous obtenons les estimateurs $\hat{\sigma}_s^2$ et $\hat{\sigma}_R^2$ des variances sur le réseau initial et sur le réseau renormalisé, respectivement :

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{\hat{T}}{2(4+\hat{\lambda})}, \text{ et } \hat{\sigma}_R^2 = \frac{\hat{T}(4+\hat{\lambda})}{2(12+\hat{\lambda}(8+\hat{\lambda}))}. \quad (4.4)$$

Un calcul direct fournit alors les estimateurs $\hat{\lambda}$ et \hat{T} :

$$\hat{\lambda} = 2 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_R^2}{\hat{\sigma}_s^2} - 4} \quad \text{et} \quad \hat{T} = 2 \hat{\sigma}_s^2 \sqrt{4 + \hat{\lambda}}. \quad (4.5)$$

5) Résultats

Les estimations $\hat{\lambda}$ et \hat{T} ainsi obtenues sur des images de synthèse démontrent la fiabilité, la précision et la robustesse de la méthode puisque celle-ci reste pertinente pour des tailles de fenêtre de 16x16 pixels (fig. 4) ainsi que son aptitude à prendre en compte les non-stationnarités de la moyenne locale. En outre, la seule utilisation de moments d'ordre 2 garantit la précision spatiale des estimations lors des procédures de discrimination. Ainsi, les deux zones associées à des températures différentes (Fig. 5) sont-elles discriminées malgré la présence d'une forte non-stationnarité et l'estimation reste-t-elle précise même si la pente de la non-stationnarité est forte (Fig. 6).

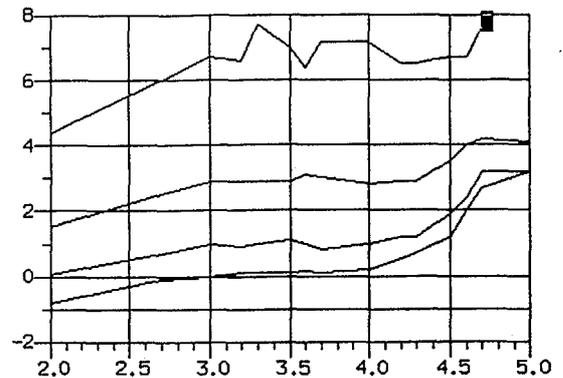


Figure 4-a : $\hat{\lambda} = f(\text{Log}T)$ pour $\lambda = 0, 1, 3, 7$.

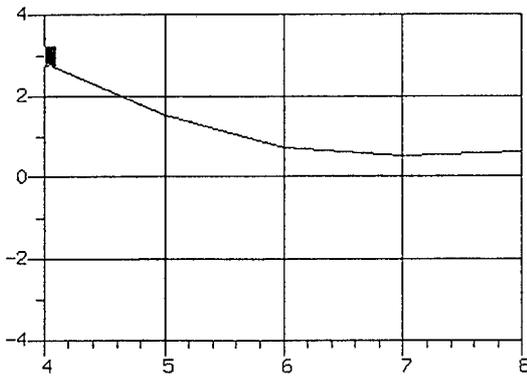


Figure 4-b: $\hat{\lambda} = f(p)$ pour $\lambda = 1$ et card $S = 2^p \times 2^p$.
 Figure 4 : Estimations du paramètre λ .

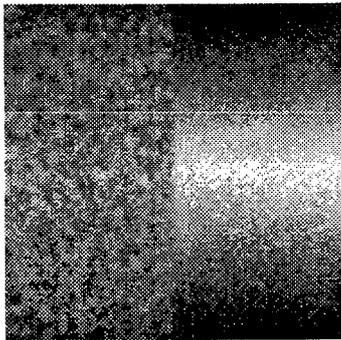


Figure 5-a : Image initiale.

$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$
$T = 1000$	$T = 1000$
$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$
$T = 2000$	$T = 2000$

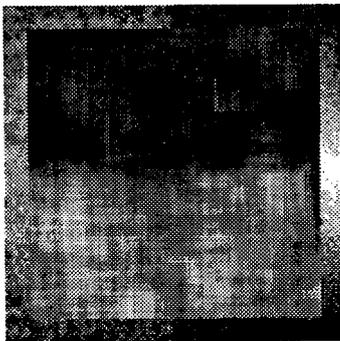


Figure 5-b : Estimation de T.

Figure 5 : Estimation de T dans un cadre non-stationnaire.

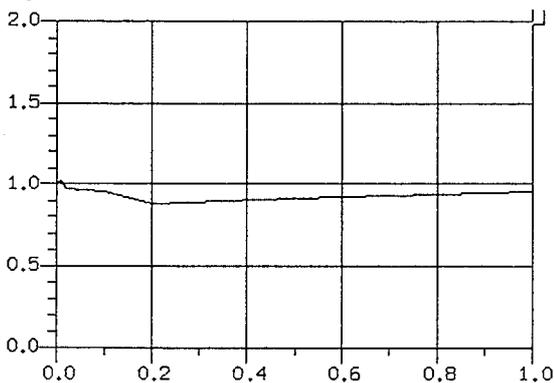


Figure 6 : $\hat{\lambda} = f(p)$ pour $\lambda=1$ et p est la pente de non-stationnarité.

6) Conclusion et perspectives

Nous avons développé une méthode originale d'estimation des paramètres associés à un CMG 4-connexe fondée sur la théorie de la renormalisation. Les principaux avantages de cette méthode résident dans sa robustesse vis-à-vis de la taille de l'ensemble de statistiques dans son domaine de validité étendu à un cadre non-stationnaire et sa simplicité de mise en œuvre.

La principale limite de cette méthode se trouve dans la connexité du modèle. En effet, le modèle renormalisé ne reste markovien que sous de strictes contraintes concernant le système de voisinages du modèle initial [PER-93]. La seconde limitation à la généralisation de cette méthode est liée à la nécessité d'intégrer le modèle de façon analytique. Nos recherches actuelles portent donc sur l'élaboration de méthodes pertinentes dans le cadre de connexités quelconques [DES-93], notamment à partir de la théorie du champ moyen, et dans celui de potentiels plus généraux, en introduisant principalement les techniques du calcul perturbatif.

7) Références

[CHA-89] B. Chalmond. "An Iterative Gibbsian Technique for Reconstruction of m-ary Images." Pattern Recognition, Vol. 22 No. 6, 1989, pp. 747-761.

[DES-92] X. Descombes, F. Prêteux, M. Sigelle. "Champs Markoviens Gaussiens : deux méthodes d'estimation des paramètres." Rapport interne Télécom Paris 92 D 009, Août 1992.

[DES-93] X. Descombes, F. Prêteux. "Topology and Parameters Estimation in MRF Modelling." SPIE, Neural and Stochastic Methods in Image and Signal Processing II, Vol. 2032, San Diego, 11-16 Juillet 1993.

[GID-89] B. Gidas. "A Renormalization Group Approach to Image Processing Problems." IEEE PAMI, Vol. 11 No. 2, Feb. 1989, pp. 164-180.

[GIM-90] G.L. Gimelfarb. "Gibbs Random Fields and Compound Bayesian Decisions at the Lower Level of Digital Image Processing." Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 1 No. 1 April 1991, pp. 39-49.

[MAS-91] P. Masson, W. Pieczynski. "Segmentation contextuelle non supervisée des images SPOT." 8ème congrès de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Lyon Villeurbanne 25-29 Nov. 1991, pp. 997-1002.

[MAT-88] I. Matsuba. "Renormalization Group Approach to Hierarchical Image Analysis." ICASSP Conference, pp. 1044-1047, 1988.

[PER-93] P. Pérez, F. Heitz. "Restriction d'un champ markovien sur un graphe. Application à l'analyse d'images multirésolution." Rapport de recherche INRIA-Rennes No. 713, Mars 1993.