



Restriction d'un champ markovien sur un graphe et analyse d'images multirésolution

Patrick PÉREZ, Fabrice HEITZ

IRISA/INRIA, Campus Universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous étudions d'un point de vue général la restriction d'un champ de Markov défini sur un graphe à un sous-ensemble de sites de ce graphe. Cette étude donne un éclairage complet et unificateur sur les difficultés d'ordre théorique et pratique rencontrées lors de la mise en place de modèles markoviens multirésolutions. Elle fournit en particulier les graphes (structures de voisinage) associés aux modèles markoviens multirésolutions obtenus par décimation d'un champ initial ainsi que l'expression des fonctions d'énergie de ces modèles.

Introduction

Connus et étudiés par les statisticiens depuis plus de quinze ans, les champs de Markov ont fait récemment une apparition remarquable dans le domaine du traitement d'images [4]. Associés à la théorie bayésienne de l'estimation, ils offrent un cadre mathématique cohérent et unifié pour l'extraction de *primitives* à partir d'*observations*. Celle-ci se ramène à un problème d'optimisation globale dont le traitement algorithmique, s'il est bien maîtrisé, est malheureusement souvent très coûteux. C'est une des raisons qui a motivé l'introduction de techniques multigrilles, par ailleurs classiques en analyse numérique [6] pour essayer d'une part d'accélérer les algorithmes de relaxation déterministes ou stochastiques utilisés, et d'autre part d'améliorer la qualité des estimées obtenues après convergence.

L'association de la multirésolution et de la modélisation markovienne est toutefois un épineux problème qui fut dans un premier temps abordé de manière heuristique. Récemment des approches plus rigoureuses reposant sur l'idée suivante ont été proposées [5] : partant d'un modèle markovien original "pleine résolution", une structure multirésolution de champs aléatoires est *déduite* de proche en proche, par la spécification des probabilités de passage d'une configuration à une configuration de résolution immédiatement inférieure ; la transformation d'échelle opérée pouvant éventuellement être déterministe (décimation associée ou non à un filtrage linéaire). Malheureusement les nouveaux modèles ainsi définis se révèlent trop complexes pour être pratiquement mis en œuvre. Ceci est dû à la perte du caractère markovien du champ initial. L'étude de la localité des champs produits par ce type d'approches peut en fait se ramener à celle de la localité de la restriction d'un champ markovien à une partie de son support.

C'est ce problème de restriction d'un champ markovien que nous nous proposons d'aborder dans cet article, et ce dans le prolongement des travaux de Jeng [7]. Pour ce faire, nous avons adopté un point de vue très général : nous présentons les champs de Markov en termes de *champs aléatoires sur des*

ABSTRACT

This paper deals with the key problem of deriving the restriction of a Markov Random Field (MRF) on a part of its original set of sites. This study gives an unified and comprehensive lightening of theoretical difficulties encountered by recent works on multiresolution markovian models. Within this general framework, the graph structure associated to multiresolution random fields obtained by sub-sampling of an original MRF are given, as well as the joint distribution of the resulting field.

graphes simples non orientés et c'est dans ce cadre que nous étudions le problème clé de la restriction. Pour pouvoir appréhender le caractère local du champ restreint, il faut toutefois que celui du champ original soit clairement "délimité". Pour cette raison nous introduisons la notion originale de "potentiel irréductible" (§1). La distribution du champ restreint à une partie propre de l'ensemble des sites est ensuite étudiée (§2). Les résultats que nous présentons reprennent celui énoncé de façon incomplète par Jeng [7] et leur finalité est de fournir un cadre de travail à adapter au problème spécifique que l'on se pose. Nous verrons dans cet article qu'ils nous permettent d'étudier le champ produit par différents types de sous-échantillonnage (§3). D'autres applications et conséquences pourront être trouvées dans [9, 10].

1 Graphe minimal et potentiels irréductibles

Étant donné un ensemble S fini de sites, on s'intéresse à des collections d'attributs scalaires ou vectoriels indexées par les éléments de S : Λ étant une partie finie de \mathbb{R}^q (¹), on appelle *configuration sur S* , d'espace d'états Λ toute application x de S dans Λ . On note x_s l'image du site s par x , et $\Omega \triangleq \Lambda^S$ l'ensemble de toutes les configurations sur S . Muni d'une mesure de probabilité P_X (²), cet ensemble constitue un *champ aléatoire X sur S* . À toute configuration $x = \{x_s, s \in S\}$ on peut associer sa *restriction* $x_A = \{x_s, s \in A\}$ à un sous-ensemble donné $A \subset S$ de sites. On définit ainsi sur l'ensemble de configurations $\Omega_A \triangleq \Lambda^A$ une mesure de probabilité image P_{X_A} . On notera X_A le *champ restreint* associé.

Le caractère markovien d'un champ aléatoire repose sur le notion de *voisinage*. Un *système de voisinage \mathcal{G}* est défini sur S en associant à chaque site s un voisinage \mathcal{G}_s (i.e. une partie non vide de S ne contenant pas s) de telle sorte que si $t \in \mathcal{G}_s$, alors

¹Pour une étude dans le cas général où Λ est une partie mesurée, dénombrable ou non de \mathbb{R}^q , on pourra se reporter à [9].

² $\forall x \in \Omega, P_X(x) \triangleq \Pr\{X = x\}$



$s \in \mathcal{G}_i$. Il confère à l'ensemble des sites une structure de *graphe simple non orienté* noté $G = [S, \mathcal{G}]$. On notera $d_G = \max_{s \in S} |\mathcal{G}_s|$ le degré de ce graphe et \mathcal{C} l'ensemble de ses *cliques* (i.e. des parties de S réduites à des singletons ou formées de sites deux à deux voisins). Le voisinage \mathcal{G}_A d'une partie A de S est défini par $\mathcal{G}_A \triangleq \{s \in S \setminus A, \mathcal{G}_s \cap A \neq \emptyset\}$.

Définition 1 X est un champ de Markov sur le graphe G si et seulement si pour tout site s et pour toute configuration x :

$$Pr\{X_s = x_s | X_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}}\} = Pr\{X_s = x_s | X_{\mathcal{G}_s} = x_{\mathcal{G}_s}\}. \quad (1)$$

Si de plus pour toute configuration x , $P_X(x) > 0$ (propriété de *positivité*), alors la forme de P_X pour un tel champ est donnée par le théorème de Hammersley–Clifford [1] :

Théorème 1 (Hammersley–Clifford) X est un champ markovien sur le graphe G vérifiant la propriété de positivité si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)\right\} \quad (2)$$

où V_c désigne un *potentiel* sur la clique c , i.e. une fonction de Ω dans \mathbb{R} ne dépendant que de x_c , et $Z = \sum_{x \in \Omega} \exp\{-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)\}$ est une constante de normalisation.

Le fait que le champ X soit markovien relativement au système de voisinage \mathcal{G} ne nous renseigne pas de façon précise sur le voisinage dont un site dépend "réellement" : il est clair que le champ sera encore markovien relativement à tout autre système de voisinage \mathcal{G}' sur S tel que $\forall s \in S, \mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}'_s$. Pour disposer d'une description plus précise des caractéristiques locales du champ il sera utile de considérer un système de voisinage "minimal" pour lequel le champ est markovien, d'autant que ce sont les dépendances "réelles" au sein des champs restreints que nous aimerions par la suite appréhender. Le recours à un tel système de voisinage est toujours possible :

Proposition 1 Si X est un champ markovien sur S alors il existe un système de voisinage \mathcal{G} sur S tel que X soit markovien sur le graphe $G = [S, \mathcal{G}]$ et tel que pour toute partie propre A d'un quelconque voisinage \mathcal{G}_s , il existe une configuration x telle que :

$$Pr\{X_s = x_s | X_{\mathcal{G}_s} = x_{\mathcal{G}_s}\} \neq Pr\{X_s = x_s | X_A = x_A\} \quad (3)$$

On dira que ce système de voisinage est *minimal* pour le champ markovien X . Cette notion de minimalité ne pourra être facilement utilisée que si nous la traduisons en termes de propriétés sur les potentiels associés aux cliques du graphe engendré. Pour cette raison, nous introduisons la notion originale de *potentiel irréductible* :

Définition 2 V_c est un *potentiel irréductible* si c est un singleton et V_c est non nul, ou, $\text{card}(c) \geq 2$ et V_c ne peut pas s'écrire comme une somme de potentiel sur des parties propres de c .

Dans le cas où c compte au moins deux sites, un tel potentiel V_c est en particulier "réellement" fonction de toutes les variables $x_s, s \in c$: si V_c ne dépendait pas des variables $x_s, s \in B$, où B est une partie propre de c , alors il serait la somme du potentiel nul sur B et d'un potentiel sur $c - B$, qui est une partie propre de c .

On montre (voir [9]) que l'on définit ainsi une classe de potentiels englobant celle des *potentiels canoniques* introduite par Descombes *et al* [2], et nous établissons dans [9] les deux propriétés suivantes :

Proposition 2 Tout potentiel V_c non nul est une somme de potentiels irréductibles sur des parties de c (distinctes de c si V_c n'est pas irréductible).

Proposition 3 Soit X un champ markovien sur le graphe fini $G = [S, \mathcal{G}]$. \mathcal{G} est minimal si et seulement si il existe une famille $\mathcal{V} = \{V_c, c \in \mathcal{C}\}$ de potentiels irréductibles ou nuls sur les cliques de G telle que X soit le champ de Markov associé à \mathcal{V} et :

$$\forall \{s, t\} \in \mathcal{C}, \exists c \in \mathcal{C} : \{s, t\} \subset c \text{ et } V_c \neq 0. \quad (4)$$

2 Restriction à un sous-ensemble de sites

Soit X un champ markovien sur le graphe minimal $G = [S, \mathcal{G}]$, associé à la famille $\mathcal{V} = \{V_c, c \in \mathcal{C}\}$ de potentiels irréductibles ou nuls vérifiant (4). Étant donnée une partie propre A de S nous allons étudier le champ restreint X_A pour d'une part exhiber un graphe sur lequel ce champ est markovien, et d'autre part montrer que ce graphe est minimal moyennant une certaine hypothèse *a priori* peu restrictive.

Notons $\bar{A}_i, i \in I$, les composantes connexes de $\bar{A} = S \setminus A$. Par définition des composantes connexes, une clique de \mathcal{C} ne peut contenir deux sites appartenant à deux composantes connexes différentes : son intersection avec \bar{A} est soit vide (i.e. c est incluse dans A), soit contenue dans une seule des composantes connexes de \bar{A} (i.e. il existe un unique i de I tel que $(c \cap \bar{A}) \subset \bar{A}_i$). L'ensemble des cliques se partitionne donc de la façon suivante :

$$\mathcal{C} = \left(\bigcup_{i \in I} \{c \in \mathcal{C} \mid c \cap \bar{A}_i \neq \emptyset\} \right) \cup \{c \in \mathcal{C} \mid c \subset A\} \quad (5)$$

que l'on peut réécrire : $\mathcal{C} = (\cup_{i \in I} \mathcal{C}_i) \cup \mathcal{C}_A$, en notant \mathcal{C}_i la partie $\{c \in \mathcal{C} \mid c \cap \bar{A}_i \neq \emptyset\}$ de \mathcal{C} et \mathcal{C}_A la partie $\{c \in \mathcal{C} \mid c \subset A\}$. En utilisant cette partition, on obtient pour tout x de Ω :

$$\exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)\right\} = \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_A} V_c(x)\right\} \cdot \prod_{i \in I} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_i} V_c(x)\right\}. \quad (6)$$

Étudions maintenant la distribution du champ restreint X_A . Soit x_A une quelconque configuration sur A . On a :

$$\begin{aligned} P_{X_A}(x_A) &= Pr\{X_A = x_A\} = \sum_{x_{\bar{A}} \in \bar{\Omega}_A} Pr\{X_A = x_A, X_{\bar{A}} = x_{\bar{A}}\} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{x_{\bar{A}} \in \bar{\Omega}_A} \left[\exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_A} V_c(x_A, x_{\bar{A}})\right\} \prod_{i \in I} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_i} V_c(x_A, x_{\bar{A}})\right\} \right] \\ &= \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_A} V_c(x_A, a_{\bar{A}})\right\} \sum_{x_{\bar{A}} \in \bar{\Omega}_A} \prod_{i \in I} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_i} V_c(x_A, x_{\bar{A}})\right\} \end{aligned}$$

où a est une configuration quelconque, car $\exp\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_A} V_c(x_A, x_{\bar{A}})\}$ est indépendant de $x_{\bar{A}}$

$$= \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_A} V_c(x_A, a_{\bar{A}})\right\} \prod_{i \in I} \sum_{x_{\bar{A}_i} \in \bar{\Omega}_{\bar{A}_i}} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_i} V_c(x_A, x_{\bar{A}_i}, a_{\bar{A} \setminus \bar{A}_i})\right\}$$

car $\exp\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_i} V_c(x_A, x_{\bar{A}})\}$ ne dépend que de x_A et $x_{\bar{A}_i}$. La fonction définie sur $\bar{\Omega}_A$ par

$$V_i(x_A) = -\ln \left[\sum_{x_{\bar{A}_i} \in \bar{\Omega}_{\bar{A}_i}} \exp\left\{-\sum_{c \in \mathcal{C}_i} V_c(x_A, x_{\bar{A}_i}, a_{\bar{A} \setminus \bar{A}_i})\right\} \right]$$

est un potentiel sur le voisinage $\mathcal{G}_{\bar{A}_i}$ de la composante connexe \bar{A}_i de l'ensemble des sites éliminés. En vertu de la proposition 2, chacun de ces nouveaux potentiels V_i se décompose comme une



somme de potentiels irréductibles sur des parties $A_{i,k}$, $k \in K_i$ de $\mathcal{G}_{\bar{A}_i}$: $V_i = \sum_{k \in K_i} V_{i,k}$. La distribution P_{X_A} s'écrit donc :

$$\forall x_A \in \Omega_A, P_{X_A}(x_A) = \frac{1}{Z} \exp\left\{- \sum_{c \in \mathcal{C}_A} V_c(x_A, a_{\bar{A}}) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} V_{i,k}(x_A)\right\} \quad (7)$$

Le champ X_A défini sur l'ensemble de sites A est donc markovien sur le graphe $\tilde{G}_A = [A, \tilde{\mathcal{G}}]$ pour lequel deux sites distincts s et t de A sont voisins s'ils sont voisins pour G ou s'ils appartiennent au voisinage d'une même composante connexe de \bar{A} (c'est-à-dire s'il existe une chaîne joignant s et t dont tous les sites exceptés ses extrémités, appartiennent à \bar{A}_i). Le système de voisinage $\tilde{\mathcal{G}}$ du graphe \tilde{G}_A est donc défini de la façon suivante : soit s un site quelconque de A ,

- si s n'appartient pas au voisinage de \bar{A} , c'est-à-dire qu'il appartient à l'intérieur de A , alors $\mathcal{G}_s \subset A$ et $\tilde{\mathcal{G}}_s \triangleq \mathcal{G}_s$;
- si s appartient au voisinage de \bar{A} , c'est-à-dire au bord de A ,

$$\tilde{\mathcal{G}}_s \triangleq (\mathcal{G}_s \cap A) \cup (\cup_{i \in K} \mathcal{G}_{\bar{A}_i} \setminus \{s\}) \quad (8)$$

où K est l'ensemble des indices des composantes connexes de \bar{A} contenant s dans leur voisinage : $s \in \cap_{i \in K} \mathcal{G}_{\bar{A}_i}$.

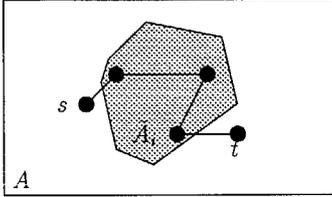


Figure 1 : Sites s et t de A devenant voisins par restriction de X à A

L'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}_A$ des cliques de ce graphe contient entre autres les cliques de \mathcal{C} incluses dans A et les voisinages $\mathcal{G}_{\bar{A}_i}$ des composantes connexes de \bar{A} : $\tilde{\mathcal{C}}_A \supset \mathcal{C}_A \cup \{\mathcal{G}_{\bar{A}_i}, i \in I\}$. Associations à cet ensemble de cliques la famille de potentiels sur Ω_A , $\tilde{V}_A = \{\tilde{V}_c, c \in \tilde{\mathcal{C}}_A\}$, définie par :

$$\tilde{V}_c(x_A) \triangleq \begin{cases} V_c(x_A, a_{\bar{A}}) & \text{si } c \in \mathcal{C}_A \\ & \text{et } c \notin \{A_{i,k}, i \in I, k \in K_i\} ; \\ V_{i,k}(x_A) & \text{si } c = A_{i,k} \text{ et } A_{i,k} \notin \mathcal{C}_A ; \\ V_{i,k}(x_A) + V_c(x_A, a_{\bar{A}}) & \text{si } c = A_{i,k} \text{ et } A_{i,k} \in \mathcal{C}_A ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (9)$$

pour toute clique c de $\tilde{\mathcal{C}}_A$. La distribution du champ X_A s'écrit :

$$\forall x_A \in \Omega_A, P_{X_A}(x_A) = \frac{1}{Z} \exp\left\{- \sum_{c \in \tilde{\mathcal{C}}_A} \tilde{V}_c(x)\right\}.$$

En vertu de l'irréductibilité des potentiels V_c originaux d'une part, et des nouveaux potentiels $V_{i,k}$ d'autre part, on déduit de la proposition 3 :

Proposition 4 *Le graphe \tilde{G}_A est minimal relativement au champ X_A si :*

- (H1) : pour tout $A_{i,k}$ appartenant à \mathcal{C} , $V_{i,k} + V_c$ est irréductible ou nul.
- (H2) : pour toute paire $\{s, t\}$ de $\mathcal{G}_{\bar{A}_i}$, il existe c de $\tilde{\mathcal{C}}_A$ telle que \tilde{V}_c est non nul.

A priori, cette double hypothèse ne semble pas très forte : elle est sans doute vérifiée "en général". Dans le cas d'un champ markovien gaussien par exemple, elle n'est pas vérifiée dans le cas où

le processus conjugué (celui admettant la matrice de covariance inverse) est lui-même markovien, ce qui est très rare [8, 9].

Sous ces deux hypothèses (H1) et (H2), le graphe \tilde{G}_A rend effectivement compte des dépendances fonctionnelles entre les variables du champ restreint X_A . En particulier, si ce graphe est complet (i.e. tous les sites sont mutuellement voisins : $\forall s \in A, \tilde{\mathcal{G}}_s = A \setminus \{s\}$) le champ restreint n'est plus "local" ; il est de ce fait inexploitable d'un point de vue algorithmique. On a ainsi :

Proposition 5 *Si l'intérieur de A est vide (i.e. $\mathcal{G}_{\bar{A}} = A$), et si \bar{A} est connexe, quel que soit le champ markovien X sur G vérifiant (H1) et (H2), le champ restreint X_A admet le graphe complet sur A pour graphe minimal.*

3 Application à la décimation

3.1 Décimation simple

On peut appliquer la proposition précédente à un cas de figure couramment rencontré en analyse d'images multirésolution par champs markoviens : G étant constitué d'une grille bidimensionnelle finie munie d'un système de voisinage d'ordre 1, la décimation d'un facteur 2 dans chaque direction (fig. 2), qui consiste à retenir "un site sur quatre", élimine un ensemble connexe de sites dont le voisinage se confond avec l'ensemble des sites conservés (c'est encore vrai pour une grille de dimension d). En conséquence un tel sous-échantillonnage transforme en général un champ de Markov sur G en champ sur un graphe minimal qui est complet.

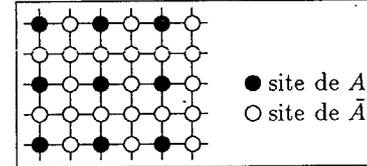


Figure 2 : Décimation d'un facteur 2 dans chaque direction d'une grille bidimensionnelle munie d'un système de 4-voisinage

3.2 Coloration et décimation

Considérons une coloration en p couleurs du graphe G , i.e. une partition de S en p parties C_k , $k = 1, \dots, p$ ($p \geq 2$) constituées chacune de sites deux à deux non voisins et que nous appellerons composantes monochromatiques (chaque site de C_k constitue à lui seul une composante connexe de C_k).

X étant un champ markovien sur G , nous allons dans un premier temps nous intéresser à sa restriction au complémentaire de l'une quelconque de ses composantes monochromatiques : $A = \cup_{k \neq k_0} C_k$ et $\bar{A} = C_{k_0}$.

Proposition 6 *Soit X un champ markovien sur le graphe minimal G et A le complémentaire d'une composante monochromatique de G , X_A est markovien sur un graphe de degré inférieur ou égal à $d_G(d_G - 1)$.*

La démonstration est présentée dans [9]. À titre d'illustration, considérons la coloration en quatre couleurs d'une grille bidimensionnelle finie munie d'un système de voisinage d'ordre 2 ($d_G = 8$). La restriction d'un champ markovien sur G au complémentaire de l'une quelconque des composantes monochromatiques est un champ markovien sur le graphe \tilde{G}_A de degré inférieur ou égal à 56. On constate en fait que ce graphe est de degré 20 et qu'il n'est pas homogène. La topologie du voisinage d'un site de A dans ce graphe dépendra de sa position (fig. 3).

Dans le cas particulier où $p = 2$ (G est 2-coloriable) alors A est également une composante monochromatique : étant donné

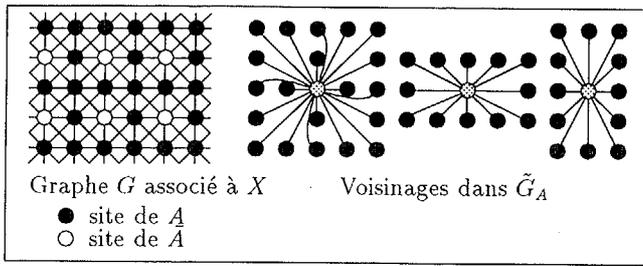


Figure 3 : Restriction au complémentaire d'une composante monochromatique d'une grille bidimensionnelle munie d'un système de 8-voisinage et différents voisinages dans le graphe associé au champ restreint X_A

un site quelconque s de A , son voisinage \mathcal{G}_s est inclus dans \bar{A} . Le voisinage de s pour le graphe \tilde{G}_A est donc $\tilde{\mathcal{G}}_s = \bigcup_{t \in \mathcal{G}_s} \mathcal{G}_t \setminus \{s\}$, c'est-à-dire que les voisins de s dans \tilde{G}_A sont les voisins de ses voisins dans G . Un exemple de ce cas particulier est constitué par la restriction à l'une des deux composantes monochromatiques d'une grille de dimension d munie d'un système de voisinage d'ordre 1. Une telle décimation qui ne conserve "qu'un site sur deux" est souvent qualifiée de *décimation quinconce* ; dans le cas bidimensionnel le graphe associé au champ restreint est de degré 8 (fig. 4). Ce cas de figure est étudié par Descombes *et al.* [3], pour un champ initial gaussien : les potentiels du champ restreint sont explicités et sont utilisés dans le cadre d'une méthode originale d'estimation des paramètres du champ initial. Intéressons-nous maintenant à la restriction à une seule compo-

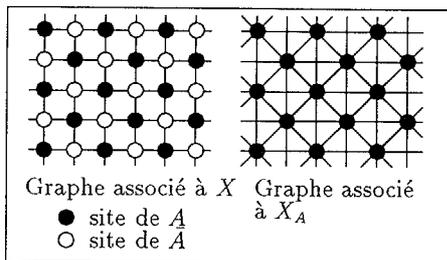


Figure 4 : Décimation quinconce d'une grille bidimensionnelle munie d'un système de 4-voisinage et graphe associé au champ restreint X_A

sante monochromatique de G : $A = C_{k_0}$ et $\bar{A} = \bigcup_{k \neq k_0} C_k$. En supposant que le voisinage de chaque site de G soit connexe, nous établissons le résultat suivant (voir [9]) :

Proposition 7 Soit $G = [S, \mathcal{G}]$ un graphe fini p -coloriable tel que tous les éléments de \mathcal{G} soient connexes pour G . Soit A une composante monochromatique dans une coloration de G en p couleurs. Quel que soit le champ markovien X sur le graphe minimal G , vérifiant (H1) et (H2), le champ X_A admet le graphe complet sur A pour graphe minimal.

Dans la pratique, la connexité de tous les voisinages est une propriété souvent vérifiée. Par exemple, si S est une grille de dimension d munie d'un système de voisinage d'ordre supérieur ou égal à deux, on peut montrer que pour le graphe $G = [S, \mathcal{G}]$ tous les voisinages sont connexes. L'application du théorème précédent donne :

Proposition 8 Soit X un champ markovien défini sur une grille finie S de dimension d munie d'un système de voisinage \mathcal{G} d'ordre supérieur ou égal à 2. Si A est une composante monochromatique du graphe $G = [S, \mathcal{G}]$ telle que (H1) et (H2) soient vérifiées, alors le champ restreint X_A admet le graphe complet sur A pour graphe minimal.

La classique "décimation d'ordre 2 dans chaque direction" d'une grille bidimensionnelle (ou de dimension d) munie d'un système de voisinage d'ordre 2 (fig. 5) correspond à ce cas de figure : elle transforme généralement un champ markovien en un champ pour lequel tous les sites seraient voisins.

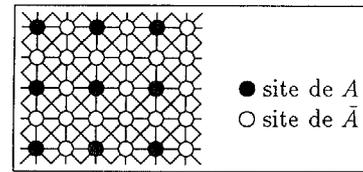


Figure 5 : Décimation d'un facteur 2 dans chaque direction d'une grille bidimensionnelle munie d'un système de 8-voisinage

Conclusion

Dans cet article, l'étude générale de la restriction d'un champ de Markov défini sur un graphe à un sous-ensemble de sites de ce graphe a été menée. Cette étude permet de faire le point sur différents problèmes d'ordre théorique et pratique soulevés par la mise en place de modèles markoviens multirésolutions en analyse d'images. Elle fournit par ailleurs un cadre général pour l'étude de différents aspects des modélisations markoviennes débordant le seul cadre des modèles multirésolutions.

Les auteurs tiennent à remercier B. Levy, D. Petritis, F. Prêteux et M. Sigelle pour leurs précieuses remarques.

Bibliographie

- [1] J. BESAG. – Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. – *J. Royal Statist. Soc.*, Serie B, Vol. 36 : pages 192–236, 1974.
- [2] X. DESCOMBES and F. PRETEUX. – Potentiels canoniques et modèles markoviens. – In *Proc. 13ième Colloque Trait. Sign. et Image, GRETSI*, pages 812–824, Juan-Les-Pins, Septembre 1991.
- [3] X. DESCOMBES, F. PRETEUX, and M. SIGELLE. – Champs markoviens gaussiens : deux méthodes d'estimation des paramètres. – Rapport de recherche 92D009, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Août 1992.
- [4] S. GEMAN and D. GEMAN. – Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the bayesian restoration of images. – *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol. 6, No. 6 : pages 721–741, Novembre 1984.
- [5] B. GIDAS. – A renormalization group approach to image processing problems. – *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol. 11, No. 2 : pages 164–180, Février 1989.
- [6] W. HACKBUSCH. – *Multi-Grid Methods and Applications*. – Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [7] F.C. JENG. – Subsampling of Markov random fields. – *J. of Visual Com. and Image Representation*, Vol. 3, No. 3 : pages 225–229, Septembre 1992.
- [8] S. LAKSHMANAN and H. DERIN. – Gaussian Markov random fields at multiple resolutions. – In R. Chellappa and A.K. Jain, editors, *Markov Random Fields : Theory and Applications*. Academic Press, 1993.
- [9] P. PÉREZ. – *Champs markoviens et analyse multirésolution de l'image : application à l'analyse du mouvement*. – Thèse de l'Université de Rennes 1, Juillet 1993.
- [10] P. PÉREZ and F. HEITZ. – Restriction d'un champ markovien sur un graphe. Application à l'analyse d'images multirésolution. – Rapport de recherche 713, IRISA, Mars 1993.