ALGORITHME POUR TESTER LA STABILITÉ DES FILTRES DIGITAUX RÉCURSIFS BI-DIMENSIONNELS

*M. BARRET** et *M. BENIDIR***

* *Supélec, Campus de Metz, France* , ** *Université de Paris-Sud, L2S-Supélec, France.*

RÉSUMÉ

L'étude de la stabilité des filtres numériques bi-dimensionnels récursifs apparait en traitement des images. Les algorithmes testant cette stabilité nécessitent beaucoup d'opérations arithmétiques, les plus rapides ont une complexité polynomiale de degré 5. Cela signifie que, si n et m désignent les degrés par rapport aux deux variables respectives du dénominateur de la fonction de transfert d'un tel filtre, alors le nombre d'opérations requises par l'algorithme est un polynôme en n et m, dont le degré total vaut 5. Dans ce papier, nous donnons un algorithme qui a une complexité polynomiale de degré 4. Nous montrons d'abord que le rang de déplacement de la matrice de Schur-Cohn, associée à un polynôme quelconque, est en général égal à deux. Cela nous permet d'appliquer l'algorithme de Levinson-Szegö généralisé pour calculer rapidement un résultant apparaissant dans les critères de stabilité 2-D.

ABSTRACT

The 2-D recursive digital filters find many applications in image processing. The algorithms testing the stability of such filters need a lot of computations. The fastest have a polynomial complexity of degree 5. This means that, if n and m denote the degrees with respect to each variable of the polynomial equal to the transfer function denominator, then the number of arithmetic operations required by the algorithm is a polynomial in n and m with 5 as total degree. In this paper, we give an algorithm with a polynomial complexity of degree 4. First, we establish that the displacement rank of an arbitrary Schur-Cohn matrix is equal to 2. This permits us to use the generalised Levinson-Szegö algorithm for computing a particular resultant appearing in 2-D stability criteria.

1. Introduction

Le traitement numérique des images connaît depuis une quinzaine d'années un essor considérable grâce aux progrès de l'informatique. Cependant, le filtrage digital bi-dimensionnel continue à poser le problème majeur de la stabilité pour des filtres invariants récursifs, et des recherches sont toujours effectuées pour améliorer les solutions existantes. Ce problème se décompose naturellement en deux parties distinctes mais étroitement liées. Premièrement, trouver un critère (c'est à dire une condition nécessaire et suffisante) de stabilité pour les filtres considérés, comme par exemple les théorèmes de Huang, Shanks, Goodman, Strintzis, DeCarlo, ... [1-2] [4]. Deuxièmement, donner un algorithme qui permet la traduction en langage informatique du critère utilisé, comme par exemple les tests de Jury [8-9], Gu and Lee [6], ou autres [7] [10] ... La qualité de la solution, d'un point de vue pratique, ne dépend que de celles de l'algorithme (rapidité, sensibilité aux erreurs d'arrondis et à l'incertitude portant sur les valeurs des coefficients du filtre).

Notons

$$P(z_1, z_2) = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{h,k} z_1^{n-h} z_2^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} a_k(z_1) z_2^{m-k} \qquad (1)$$

le dénominateur de la fonction de transfert d'un tel filtre que l'on suppose sans singularité non essentielle de deuxième espèce [1-2]. Soit $R(z_1)$ le résultant [13] obtenu en éliminant z_2 entre les deux équations

$$P(z_1, z_2) = 0 \quad \text{et} \quad P^*(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k(z_1)} z_2^k = 0. \qquad (2)$$

Récemment [4], nous avons établi que tout algorithme, décidant en un nombre fini de pas si de tels filtres sont stables, doit tester impérativement si le résultant $R(z_1)$ s'annule sur le cercle unité (CU). Cette condition ne peut ni être omise, ni être simplifiée, et étant la plus difficile à vérifier, elle donne une limite à la complexité des critères, à partir desquels est construite la majorité des algorithmes testant la stabilité. Néanmoins, ces derniers [6-10] peuvent être améliorés. Les plus rapides parmi ceux existants aujourd'hui ont une complexité d'ordre 5, ce qui signifie que le nombre total d'opérations arithmétiques qu'ils exécutent vaut $k_0 m^5 + k_1 m^4 n + k_2 m^3 n^2 + k_3 m^2 n^3 + k_4 mn^4 + k_5 n^5 + O(n^4)$, où $k_0, k_1, \ldots, k_5$ sont des nombres rationnels non tous nuls et où nous pouvons supposer $m \leq n$ sans perte de généralité. Nous présentons un nouvel algorithme ayant une complexité d'ordre 4, qui nécessite au plus $21/2 m^2 n^2 + 36 m^3 n + O(mn^2)$ opérations. Il découle des résultats rappelés ou établis au paragraphe suivant.

Le résultant $R(z_1)$ peut s'exprimer comme un déterminant d'ordre $2m$, dénommé résultant de Sylvester [13] ou bien un déterminant d'ordre m, appelé résultant de Bezout [3] [5]. Dans ce papier, nous montrons que la matrice associée au résultant de Bezout, obtenu en éliminant z_2 entre les équations (2), admet en général un rang de déplacement [11] égal à 2, quand le nombre complexe z_1 est fixé. Ce fait nous permet d'appliquer l'algorithme de Levinson-Szegö généralisé [12] pour calculer $R(z_1)$ en un nombre fini de points z_1 situés sur le CU.

2. Étude d'un résultant de Bezout particulier

Dans la suite, le coefficient de plus haut degré des polynômes considérés pourra s'annuler. Considérons le polynôme complexe de degré au plus n :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \tag{3}$$

dont les coefficients sont indéterminés. Notons P^* le polynôme défini par

$$P^*(x) = \bar{a}_n x^n + \overline{a_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 \tag{4}$$

où $\bar{a}$ est le conjugué de a. Le polynôme P^* est le réciproque de P quand P est de degré n. Introduisons les notations suivantes. Soient les matrices colonnes

$$\underline{a}_{\mathrm{L}} = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^t \quad \text{et} \quad \underline{a}_{\mathrm{H}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)^t \tag{5}$$

de dimension n. Soient $\mathbf{J}$ et $\mathbf{Z}$ les matrices d'ordre n dont tous les éléments sont nuls, sauf, pour $\mathbf{J}$, ceux de la seconde diagonale qui valent tous 1, et sauf, pour $\mathbf{Z}$, ceux de la diagonale juste au-dessus de la première, qui valent tous 1. Si $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$, on a

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{J}\underline{x} = (x_n, \dots, x_1)^t,\ \ \mathbf{Z}\underline{x} = (x_2, \dots, x_n, 0)^t \\ \text{et}\ \ \mathbf{Z}^t\underline{x} = (0, x_1, \dots, x_{n-1})^t \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Notons $\underline{x}^{(-)}$ le produit $\mathbf{J}\underline{x}$. Soient les matrices $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ s'écrivant par blocs :

$$\mathbf{F} = \left[\underline{a}_{\mathrm{L}}, -\underline{a}_{\mathrm{H}}, \mathbf{Z}\underline{a}_{\mathrm{L}}, -\mathbf{Z}\underline{a}_{\mathrm{H}}, \dots, \mathbf{Z}^{n-1}\underline{a}_{\mathrm{L}}, -\mathbf{Z}^{n-1}\underline{a}_{\mathrm{H}}\right] \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \big[&\underline{a}_{\mathrm{L}}{}^{(-)}, \underline{a}_{\mathrm{H}}{}^{(-)}, \mathbf{Z}^t\underline{a}_{\mathrm{L}}{}^{(-)}, \mathbf{Z}^t\underline{a}_{\mathrm{H}}{}^{(-)}, \dots, \\ &\mathbf{Z}^{(n-1)t}\underline{a}_{\mathrm{L}}{}^{(-)}, \mathbf{Z}^{(n-1)t}\underline{a}_{\mathrm{H}}{}^{(-)}\big]^* \end{aligned} \tag{8}$$

où $\mathbf{X}^*$ est la matrice transposée et conjuguée de $\mathbf{X}$. Il est bien connu [3] [5] que le résultant de Bezout $R(P, P^*)$ des polynômes (3) et (4) est égal au déterminant de la matrice symétrique $\mathbf{M}$, d'ordre n, définie par

$$\mathbf{M} = \mathbf{FG} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Z}^k(\underline{a}_{\mathrm{L}}\underline{a}_{\mathrm{L}}{}^{(-)*} - \underline{a}_{\mathrm{H}}\underline{a}_{\mathrm{H}}{}^{(-)*})\mathbf{Z}^k. \tag{9}$$

Les relations $\mathbf{ZJ} = \mathbf{JZ}^t$ et $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$ (matrice identité), permettent de définir la matrice $\mathbf{S}$ reliée à $\mathbf{M}$ par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{MJ} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Z}^k(\underline{a}_{\mathrm{L}}\underline{a}_{\mathrm{L}}{}^* - \underline{a}_{\mathrm{H}}\underline{a}_{\mathrm{H}}{}^*)\mathbf{Z}^{kt} \tag{10}$$

et notre algorithme résulte des deux propositions suivantes qui, à notre connaissance, sont nouvelles.

Proposition 1. La matrice hermitienne $\mathbf{S}$ associée au polynôme (3) par la relation (10) admet, en général, un rang de déplacement égal à 2.

Preuve. D'après (10), il est clair que $\mathbf{S}$ est hermitienne. Le rang de déplacement de $\mathbf{S}$ est, par définition et puisque $\mathbf{Z}^n = \mathbf{0}$, égal au rang de $\mathbf{S} - \mathbf{ZSZ}^t = \underline{a}_{\mathrm{L}}\underline{a}_{\mathrm{L}}{}^* - \underline{a}_{\mathrm{H}}\underline{a}_{\mathrm{H}}{}^*$.

Par symétries ($\mathbf{S} = \mathbf{S}^*$ et $\mathbf{SJ} = \mathbf{M} = \mathbf{M}^t$), tous les éléments de $\mathbf{S}$ peuvent être déduits de ceux localisés dans le triangle $1 \le j \le n/2$ et $j \le i \le n+1$ (où i et j sont les indices de ligne et respectivement de colonne). Le calcul de $\mathbf{S}$ demande au plus $2n^2 + O(n)$ additions et autant de multiplications quand $\mathbf{S}$ est complexe, et quatre fois moins, quand $\mathbf{S}$ est réelle.

Proposition 2. Les mineurs principaux, obtenus à partir des blocs situés en haut et à gauche de la matrice hermitienne $\mathbf{S}$ introduite ci-dessus, peuvent être calculés avec l'algorithme de Levinson-Szegö généralisé.

Preuve. La démonstration donnée dans [12] pour une matrice $\mathbf{S}$ réelle symétrique peut, sans difficultés, être étendue à une matrice complexe hermitienne.

Pour être complet, nous donnons les équations de cet algorithme. Soient

$$\underline{b}_{n-1} = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)^t, \quad \bar{\underline{b}}\,^{(-)}_{n-1} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^* \tag{11}$$

$$\mathbf{S} = [s_{i,j}]\ (1 \le i, j \le n) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{n-1} = [\bar{\underline{b}}\,^{(-)}_{n-1}, \underline{b}_{n-1}]. \tag{12}$$

Pour $1 \le m < n$, $\mathbf{D}_m$ désigne la matrice $m \times 2$ des m premières lignes de $\mathbf{D}_{n-1}$.

Soient $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\underline{\delta}_3^m$ une matrice colonne de dimension 3, $\mathbf{N}_m$ une matrice hermitienne d'ordre 3, $\mathbf{A}_m$ une matrice $m \times 3$ et $\underline{c}_m$ une matrice colonne de dimension m. Soit $\beta_m = \Delta_m/\Delta_{m-1}$, où Δ_m est le mineur principal de $\mathbf{S}$ obtenu à partir du bloc supérieur gauche d'ordre m ($\Delta_0 = 1$) ; β_m est un nombre réel. $\bar{\underline{\delta}}_3^m$ est la matrice colonne déduite de $\underline{\delta}_3^m$ en conjuguant ses éléments. L'algorithme est initialisé par :

$$\underline{c}_1 = (1), \quad \mathbf{A}_1 = [1, 0, 0], \quad \beta_1 = s_{1,1} \tag{13}$$

$$\text{et} \qquad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

puis il utilise les équations

$$(\underline{\delta}_3^m)^t = (0, \underline{c}_m^*) \begin{bmatrix} s_{1,1} & \underline{0}^t \\ \vdots & \mathbf{D}_m\Sigma \\ s_{m+1,1} & \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\beta_{m+1} = \beta_m - (\underline{\delta}_3^m)^t \mathbf{N}_m^{-1} (\bar{\underline{\delta}}_3^m) \tag{16}$$

$$\underline{c}_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{c}_m \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m^{-1} (\bar{\underline{\delta}}_3^m) \tag{17}$$

$$\mathbf{A}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{c}_m \end{pmatrix} \beta_m^{-1} (\underline{\delta}_3^m)^t \tag{18}$$

$$\mathbf{N}_{m+1}^{-1} = \mathbf{N}_m^{-1} + \mathbf{N}_m^{-1}(\bar{\underline{\delta}}_3^m)\beta_{m+1}^{-1}(\underline{\delta}_3^m)^t \mathbf{N}_m^{-1}. \tag{19}$$

Il demande au plus, pour $n \ge 2$, $18n^2 + O(n)$ multiplications, autant d'additions et $O(n)$ divisions, quand $\mathbf{S}$ est complexe, et quatre fois moins d'opérations, quand $\mathbf{S}$ est réelle. Cet algorithme permet de calculer le résultant des polynômes (3) et (4) en $O(n^2)$ opérations réelles. Il existe d'autres algorithmes [15] qui calculent en $O(n^2)$ opérations le résultant de deux polynômes.

Remarque 1. D'après (10), nous avons

$$\det \mathbf{M} = (-1)^{n(n-1)/2} \det \mathbf{S}. \tag{20}$$

Dans la suite, seuls les signes de mineurs principaux de **S** et l'éventuelle nullité du déterminant de **M** nous intéresse, c'est pourquoi nous appellerons "résultant des polynômes (3) et (4)" le déterminant de la matrice **S**, et nous le noterons encore R.

Il résulte de (10), qu'en notant $s_{i,j}$ $(1 \le i, j \le n)$ les éléments de **S**,

$$s_{n+1-i,\, n+1-j} = \sum_{p=1}^{i} (a_{i-p}\bar{a}_{j-p} - \bar{a}_{n-i+p} a_{n-j+p}) \quad \text{pour } i \le j. \tag{21}$$

La matrice $\Gamma = \mathbf{JSJ}$, dont les coefficients valent $\gamma_{i,j} = s_{n+1-i,\, n+1-j}$ $(1 \le i, j \le n)$, est la matrice de Schur-Cohn associée au polynôme (3). Il est bien connu [9] que (3) ne s'annule pas sur le disque unité fermé, si et seulement si, Γ est définie négative. On en déduit que le polynôme (3) ne s'annule pas sur le disque unité fermé, si et seulement si, la matrice **S**, définie en (10), est définie négative, ou, ce qui est équivalent, si et seulement si, tous les rapports de deux mineurs principaux consécutifs, obtenus à partir des blocs situés en haut et à gauche de **S**, sont strictement négatifs.

Proposition 3. Quand z_1 est sur le CU, le résultant $R(z_1)$, obtenu en éliminant z_2 entre les équations (2), est une série de Laurent ayant un nombre fini de termes non nuls :

$$R(z_1) = \sum_{j=-nm}^{nm} \alpha_j z_1^j \quad \text{où } \alpha_{-j} = \bar{\alpha}_j \quad \text{pour } -nm \le j \le nm. \tag{22}$$

Preuve. $R(z_1)$ est le déterminant de la matrice hermitienne $\mathbf{S}(z_1)$ déduite de (10) quand $(a_0(z_1), \ldots, a_n(z_1))$ remplace $(a_0, \ldots, a_n)$. $R(z_1)$ est réel, de plus les éléments de $\mathbf{S}(z_1)$ sont des séries de Laurent de la forme $\sum_{j=-n}^{n} \beta_j z_1^j$ quand z_1 est sur le CU $(\bar{z}_1 = z_1^{-1})$.

Remarque 2 Il résulte de la proposition 3 que, quand $P(z_1, z_2)$ est réel et z_1 sur le CU, $R(z_1)$ est égal à un polynôme réel $Q(u)$ en l'indéterminée $u = z_1 + z_1^{-1}$, de degré mn.

3 Algorithme proposé

Considérons un filtre récursif bi-dimensionnel réel quelconque (sans singularité non essentielle de la deuxième espèce) et notons $P(z_1, z_2)$, défini en (1), le dénominateur de sa fonction de transfert. Nous avons le théorème de stabilité suivant, où $R(z_1)$ est le résultant obtenu en éliminant z_2 entre les équations (2).

Proposition 4. Le polynôme complexe $P(z_1, z_2)$ défini en (1) ne s'annule pas sur le bi-disque unité fermé $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \le 1 \text{ et } |z_2| \le 1\}$, si et seulement si, les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$P(z_1, 0) \ne 0 \text{ pour tout } z_1 \text{ tel que } |z_1| \le 1 \tag{23}$$

$$P(1, z_2) \ne 0 \text{ pour tout } z_2 \text{ tel que } |z_2| \le 1 \tag{24}$$

$$R(z_1) \ne 0 \text{ pour tout } z_1 \text{ sur le CU.} \tag{25}$$

Preuve. Voir [5].

Algorithme. Les coefficients du polynôme (1) sont supposés être réels. L'algorithme est expliqué plus bas, après son énoncé. Posons $M = mn + 1$.

1. Tester si $P(z_1, 0)$ s'annule pour $|z_1| \le 1$. On peut pour cela construire la matrice **S** associée à $P(z_1, 0)$ d'après (10), puis utiliser l'algorithme de Levinson-Szegö généralisé pour calculer les rapports β_k $(1 \le k \le n)$ des mineurs principaux consécutifs, obtenus à partir des blocs situés en haut à gauche. Si, pour un k, $\beta_k \ge 0$, alors le filtre est instable.

2. Pour $0 \le k \le M$, calculer en utilisant l'algorithme de Levinson-Szegö généralisé, $\alpha_k = R(\exp(jk\pi/M))$, où $R(z_1)$ est le résultant obtenu par élimination de z_2 entre les équations (2). Tester en même temps si tous les rapports β_k $(1 \le k \le m)$ des mineurs principaux des matrices $\mathbf{S}(\exp(jk\pi/M))$ sont strictement négatifs. Si un de ces rapports est positif ou nul, alors le filtre est instable.

3. En posant $u = z_1 + z_1^{-1}$, calculer les coefficients du polynôme réel $Q(u)$ défini par

$$Q(u) = \sum_{k=0}^{mn} x_k u^k = R(z_1). \tag{26}$$

Pour cela, nous allons résoudre le système suivant d'équations :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{M-1} \\ 1 & 2\cos(\pi/M) & \cdots & (2\cos(\pi/M))^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 2\cos((M-1)\pi/M) & \cdots & (2\cos((M-1)\pi/M))^{M-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{M-1} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

en introduisant un système triangulaire intermédiaire. Notons **B** la matrice carrée apparaissant dans (27) et $\underline{\alpha}$ la matrice du membre de droite. Soit $\mathbf{T} = [t_{k,l}]$ $(0 \le k, l < M)$, définie par

$$t_{k,k+2l+1} = 0, \; t_{0,2l} = C_{2l}^{l} \; \text{ et pour } k \ge 1, \; t_{k,k+2l} = C_{k+2l}^{k+l} \tag{28}$$

où $C_n^p = n!/(n-p)!p!$ désigne le coefficient du triangle de Pascal, c'est une matrice triangulaire et soit **C** définie par :

$$\mathbf{C} = [c_{k,l}] \; (0 \le k, l < M) \quad \text{avec} \quad c_{k,l} = \cos(kl\pi/M). \tag{29}$$

T et **C** sont carrées d'ordre M et :

$$\mathbf{B} = \mathbf{CT}. \tag{30}$$

Pour résoudre (27), on cherche d'abord la solution de $\mathbf{C}\underline{x}' = \underline{\alpha}$. Elle est donnée par :

$$\mathbf{D}\underline{x}' = \alpha_0 \underline{c}_0 + \alpha_M \underline{c}_M + 2\sum_{k=1}^{M-1} \alpha_k \underline{c}_k, \tag{31}$$

où $\mathbf{D} = M\mathrm{Diag}(2, 1, \ldots, 1)$ est une matrice diagonale d'ordre M et, pour $0 \le k \le M$, $\underline{c}_k$ est la matrice colonne à M lignes définie par $\underline{c}_k = (c_{k,0}, \ldots, c_{k,M-1})^t$. Enfin, nous résolvons $\mathbf{T}\underline{x} = \underline{x}'$.

4. Tester si le polynôme $Q(u)$ défini en (26) s'annule sur le segment $[-2 ; 2]$ en utilisant le théorème de Sturm [14-15]. Pour cela, notons $f_0 = Q, f_1 = Q'$ (dérivée de Q), si $f_0(2)f_0(-2) = 0$, alors le filtre est instable. Faire la division euclidienne en changeant le

signe du reste : $f_{l-1} = k_l f_l - f_{l+1}$ jusqu'à ce que $f_{q+1} = 0$, (polynôme nul) et calculer $f_l(u)$ pour $u = 2$ et $u = -2$. Compter le nombre $V(u)$ de variations de signes dans la suite $(f_0(u), \ldots, f_q(u))$, pour $u = \pm 2$. Si $V(2) \neq V(-2)$ le filtre est instable, sinon il est stable.

Explications

La première étape teste si la condition (23) est satisfaite ou non. Les étapes 2 et 3 servent à calculer les coefficients du polynôme (26) introduit à la remarque 2. Nous calculons, pour $0 \leq k \leq M$, $\alpha_k = Q(2\cos(k\pi/M))$ et nous testons si $P(\exp(jk\pi/M), z_2)$ s'annule le quand $|z_2| \leq 1$. Si c'est le cas, le filtre est instable. La condition (24) est ainsi testée. Pour calculer les coefficients $\underline{x}$ du polynôme Q, on utilise le résultat suivant :

$$(2\cos v)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cos(k-2l)v = \sum_{l=0}^{k} t_{l,k} \cos lv = 2\cos kv +$$

$$2\binom{k}{1}\cos(k-2)v + \begin{cases} 2\binom{k}{p-1}\cos 2v + \binom{k}{p} & \text{si } k = 2p \\ 2\binom{k}{p-1}\cos v & \text{si } k = 2p-1 \end{cases} \tag{32}$$

d'où l'on déduit (28), (29), (30) et le fait qu'il existe M nombres réels $x'_0, \ldots, x'_{M-1}$ tels que pour tout v, $Q(2\cos v) = \sum_{k=0}^{M-1} x'_k \cos kv$. Ainsi, en posant $\mathbf{C}_{2M} = [c_{k,l}]$ $(0 \leq k < 2M$ et $0 \leq l < M)$, on a $\mathbf{C}_{2M}\,\underline{x}' = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{M-1}, \alpha_M, \alpha_{M-1}, \ldots, \alpha_1)^t$. De plus, pour tous i, j : $\sum_{k=0}^{2M-1} \cos(jk\pi/M)\cos(ik\pi/M) = M[\delta(i-j) + \delta(i+j)]$, (où δ est le symbole de Kronecker) donc $\mathbf{C}_{2M}^t\,\mathbf{C}_{2M} = \mathbf{D}$. (31) s'en déduit alors, sachant que $\underline{c}_k = \underline{c}_{M-k}$.

La dernière étape indique si la condition (25) est satisfaite ou non. Pour cela, nous utilisons le fait que $R(z_1)$ s'annule sur le CU, si et seulement si, $Q(u)$ s'annule sur le segment réel $[-2\,;\,2]$.

Remarques

Cet algorithme demande moins de $5m^2n^2 + 18m^3n + O(mn^2)$ multiplications réelles, $11/2m^2n^2 + 18m^3n + O(mn^2)$ additions réelles et $O(mn^2)$ divisions réelles. Le calcul du polynôme $Q(u)$ nécessite $3m^2n^2 + 18m^3n + O(mn^2)$ multiplications, $7/2m^2n^2 + 18m^3n + O(mn^2)$ additions et $O(mn^2)$ divisions.

Pour le calcul de $f_0(u), \ldots, f_q(u)$ à l'étape 4, il est préférable de normaliser les polynômes avant chaque division, on peut aussi utiliser un algorithme donné dans [15]. La limitation principale de cet algorithme provient de la précision concernant la position des zéros du polynôme $Q(u)$ de degré mn. Cette précision décroît rapidement quand mn augmente. Nous avons tester cet algorithme sur un grand nombre de polynômes (1) générés au hasard. Il donne en général de bons résultats pour $mn \leq 64$ quand les données sont définies en virgule flottante avec 10 mots de 8 bits. Pour tester notre algorithme, nous avons utilisé un programme de tracé, dans le plan complexe, des zéros de $P(z_1, z_2)$ quand z_1 parcourt le cercle unité par valeurs discrètes.

4. Conclusions

Nous avons montré que le résultant de Bezout apparaissant dans les tests de stabilité de filtres digitaux récursifs s'obtient à partir d'une matrice proche de Töeplitz ayant un rang de déplacement égal à 2. Ceci nous a permis d'utiliser l'algorithme de Levinson-Szegö généralisé [12] pour construire un nouveau test de stabilité pour les filtres digitaux récursifs bi-dimensionnels réels. Ce nouvel algorithme nécessite $21/2m^2n^2 + 36m^3n + O(mn^2)$ opérations et améliore donc sensiblement la rapidité des tests équivalents existants.

Références

[01] D. E. Dudgeon et R. Mersereau, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984.

[02] B. T. O'Connor et T.S. Huang, *Two-Dimensional Digital Signal Processing I*, Topics in Applied Physics, vol. 42, ch. 4, Springer-Verlag, New-York, 1981.

[03] Liénart et Chipart, "Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (6ème série), tome X, pp. 291-346, 1914.

[04] M. Barret et M. Benidir, "On the optimality of the classical stability criteria for 1-D and 2-D digital recursive filters", ICASSP-93, Minneapolis, Avril 1993.

[05] M. Benidir and M. Barret, "A Bezoutian resultant based stability test for 2-D digital recursive filters", Proc. of EUSIPCO-92, pp. 989-992, Brussels, Août 1992.

[06] G. Gu et E. B. Lee, "A Numerical Algorithm for Stability Testing of 2-D Recursive Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 37, No 1, Janvier 1990.

[07] X. Hu, "2-D filter stability tests using polynomial array for $F(z_1, z_2)$ on $|z_1| = 1$", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 38, N° 9, pp. 1092-1095, Septembre 1991

[08] E. I. Jury, "Stability tests for one- two- and multi-dimensional linear system", Proc. IEE, vol. 124, N° 12, Décembre 1977

[09] E. I. Jury, "Modified Stability Table for 2-D Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 35, No 1, Janvier 1988.

[10] A. Kanellakis, S. Tzafestas & N. Theodorou, "Stability tests for 2-D systems using the Schwarz form and the inners determinants", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 38, N° 9, pp.1071-1077

[11] T. Kailath, S. Y. Kung et M. Morf, "Displacement rank of a matrix", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 1, N° 5, pp. 769-773, Septembre 1979.

[12] B. Friedlander, M. Morf, T. Kailath et L. Ljung, "New Inversion Formulas for Matrices Classified in Terms of their Distance from Toeplitz Matrices", Linear Algebra and its Applications, pp. 31-60, 1979.

[13] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, *Cours de Mathématiques, Algèbre*, tome 1, ch. VI, Dunod, Paris, 1978.

[14] F. R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, Dunod, Paris, vol. 2, ch. 15, 1966.

[15] L. Gonzalez-Vega, H. Lombardi, T. Recio & M. F. Roy, "Spécialisation de la suite de Sturm et sous-résultants (I)", Informatique Théorique et Applications, vol. 24, N° 6, pp. 561-588, 1990.