



COMPORTEMENT CHAOTIQUE DE CIRCUITS ELECTRIQUES

Martin Hasler  
 Département d'Electricité  
 EPFL  
 1015 Lausanne, Suisse

1. Historique

Le chaos était, jusqu'à ces dernières années, une notion scientifique inconnue pour les ingénieurs électriciens. Pourtant, les premières indications pour un comportement chaotique dans les circuits électriques remontent au moins d'une quarantaine d'années. Dans les années quarante, les mathématiciens Cartwright, Littlewood et Levinson [1,2] ont publié des articles qui mettent en évidence des solutions irrégulières d'équations différentielles non linéaires de type

$$e d^2x/dt^2 + \phi(x)dx/dt + ex = b \cos(\omega t) \quad (1)$$

Le courant dans le circuit de la figure 1 obéit à cette équation. L'élément non linéaire est une résistance décrite par la relation constitutive  $u = h(i)$  où  $dh/di$  est proportionnelle à  $\phi$ . Dans le cas où  $\phi(x) = x^2 - 1$ , le circuit est connu sous le nom d'oscillateur de van der Pol forcé. Les travaux [1,2] ont eu une grande influence en mathématique, mais ils étaient largement ignorés par les théoriciens de circuits. Ces derniers ont cependant une excuse valable. Dans ces circuits, les conditions initiales menant aux solutions bizarres sont de mesure nulle et de ce fait elles ne peuvent être observées en laboratoire.

Une équation similaire à (1) est l'équation de Duffing

$$d^2x/dt^2 + kdx/dt + f(x) = b \cos(\omega t) \quad (2)$$

Le circuit correspondant est représenté à la figure 2. Au lieu d'une résistance non linéaire, il comporte une capacité non linéaire, dont la relation constitutive est  $u = f(q)$ . La charge  $q$  de la capacité obéit à l'équation 2. Contrairement à l'oscillateur de van der Pol, le circuit de la figure 2 possède des solutions irrégulières observables. Elles ont été mises en évidence par Y.Ueda et H.Kawakami dans les années soixante dix par simulation [3,4]. Ces deux Japonais sont des disciples de C.Hayashi qui a écrit un livre volumineux sur les différents types de solutions d'équations de type (1) et (2) et similaires [5]. Comme son analyse est basée sur des développements en série, il est passé à côté des solutions irrégulières que l'on appelle aujourd'hui chaotiques.

Une toute autre observation de comportement chaotique dans un circuit électrique a été rapportée par un groupe de physiciens [6] qui étaient au courant des études sur les itérations de fonctions sur un intervalle [7]. L'élément non linéaire dans leur circuit (fig.3) est une diode. Les phénomènes qu'ils ont observés au laboratoire ressemblent fortement à ceux décrits dans [7].

Au milieu des années quatre-vingt les théoriciens de circuits ont commencé à s'intéresser en grand nombre au comportement chaotique. Des numéros spéciaux de revues de IEEE en témoignent [8,9]. En grande partie les résultats étaient de nature expérimentale, que ce soient des mesures de circuits au laboratoire ou des simulations à l'ordinateur. Les résultats de nature mathématique sont restés jusqu'à ce jour très insuffisants. Nous avons choisi pour ce texte quelques exemples de circuits et nous montrerons le type de résultats qui ont été obtenus.

L'ingénieur électricien moyen a aujourd'hui probablement entendu parler du chaos. Pour lui, ce phénomène est quelque chose de mystérieux qui menace le bon fonctionnement des appareils qu'il conçoit. En effet, la tâche principale des théoriciens de circuits dans ce domaine est de fournir des méthodes qui permettent d'exclure tout fonctionnement anormal, et le comportement chaotique tout particulièrement. Les seules applications du chaos dans le domaine des ingénieurs électriciens qui ont été proposées jusqu'à présent sont la génération de bruit et la génération d'images fractales par des itérations à comportement chaotique.

2. Les équations d'un circuit non linéaire

Un circuit est une connexion de dispositifs, appelés les éléments du circuit. Les grandeurs qui décrivent le fonctionnement des éléments sont les tensions et les courants aux accès externes de ces derniers. Ce fonctionnement est caractérisé par des équations, appelées équations constitutives des éléments. Les connexions sont également décrites par des équations. Ce sont les équations de Kirchhoff. La réunion de toutes les équations constitue le système des équations standard du circuit.

Aux figures 4 à 11 on a représenté quelques éléments typiques. Le circuit de la figure 2 peut servir d'exemple pour l'établissement du système d'équations standards. Les courants et les tensions sont numérotés selon la numérotation des branches dans la figure 2 et ils sont pris dans le sens indiqué par les flèches.

Equation de Kirchhoff des tensions:  $u_1 = u_2 + u_3 + u_4 \quad (4)$

Equations de Kirchhoff des courants:  $i_1 = -i_2 = -i_3 = -i_4 \quad (5)$

Relations constitutives  $u_1 = E \cos(\omega t) \quad (6)$

$u_2 = R i_2 \quad (7)$

$u_3 = L di_3/dt \quad (8)$

$u_4 = f(q) \quad (9)$

$i_4 = dq/dt \quad (10)$

On constate que le système d'équations standard comporte des équations différentielles et non différentielles, et des équations linéaires et non linéaires. On peut utiliser les équations non différentielles pour éliminer des tensions et des courants. Dans notre exemple, on reste avec les variables  $i_4$  et  $q$  et le système réduit devient

$$dq/dt = i_4 \quad (11)$$

$$di_4/dt = (-f(q) - R i_4 + E \cos(\omega t))/L \quad (12)$$

En toute généralité, on obtient un système d'équations différentielles de premier ordre sous forme explicite, appelé le système d'équations d'état. Dans notre exemple, on pourrait encore substituer l'expression (11) dans (12) et ainsi obtenir l'équation (2) qui est d'ordre 2. Le nombre d'équations d'état, appelé aussi le degré du circuit, est normalement égal au nombre de capacités et d'inductances. En effet, ce sont ces éléments, appelés éléments réactifs, qui possèdent une relation constitutive sous forme différentielle.

L'étude des équations différentielles non linéaires telle que l'on trouve dans les textes mathématiques prend la forme

$$dx/dt = f(x,t) \quad (13)$$

(écriture vectorielle) comme point de départ. Des phénomènes chaotiques ne peuvent être observés qu'à partir d'une certaine taille du système (13). En effet, le théorème de Poincaré-Bendixon [10] appliqué aux équations d'état dit (en gros) que les solutions de deux équations autonomes convergent ou bien vers une solution constante ou bien vers une solution périodique. Donc, si le temps  $t$  n'apparaît pas explicitement dans (13), il faut un système d'au moins 3 équations, si l'on veut observer du chaos. En termes de circuits, en absence de source dépendantes du temps, il faut au minimum trois éléments réactifs pour engendrer du chaos. D'autre part, un système de  $n$  équations non autonomes peut être transformé en un système de  $n+1$  équations autonomes. Par conséquent, un circuit avec sources dépendantes du temps doit comporter au moins deux éléments réactifs s'il présente un comportement chaotique.

La réduction du système d'équations standard au système d'équations d'état n'est cependant pas toujours possible. Que l'on ne parvienne pas à l'effectuer explicitement n'est pas important pour l'application du théorème de Poincaré-Bendixon. Par contre, s'il



n'existe pas de système sous forme (13) qui décrit le circuit, alors le théorème ne peut plus être invoqué. La situation que les équations d'état n'existent pas se présente assez souvent pour les modèles de circuits électriques. Dans ce cas, les solutions des équations standard peuvent cesser d'exister à partir d'un certain instant. Ce phénomène est connu sous le nom de *point d'impasse*. Ce n'est évidemment pas un phénomène réel, mais un défaut du modèle. Il faut ajouter un ou plusieurs éléments parasites réactifs pour éliminer les points d'impasse. Si l'on considère les solutions du circuit modifié, on constate qu'elles présentent une discontinuité dans la limite où les éléments parasites tendent vers zéro et à l'endroit où dans le modèle original elles n'existaient plus. Dans le circuit physique, ceci correspond à une transition très rapide. L'adjonction de réactances parasites dans le modèle entraîne une augmentation du degré. De ce fait, **des circuits autonomes avec moins de 3 réactances et des circuits non autonomes avec une seule réactance peuvent également présenter un comportement chaotique, pourvu qu'ils possèdent des points d'impasse.**

Les chercheurs qui se sont mis à explorer les phénomènes chaotiques dans les circuits électriques ont évidemment concentré leur attention sur les circuits les plus simples qui peuvent présenter de tels phénomènes, c'est-à-dire les circuits autonomes de degré trois et les circuits non autonomes de degré deux, ainsi que les circuits de degrés inférieurs avec points d'impasse. La suite illustre ce fait.

### 3. Le circuit R-L-diode

Ce circuit est représenté à la figure 3. Le modèle le plus simple pour la diode est une résistance non linéaire avec la relation constitutive

$$i = I_S(\exp(u/nUT) - 1) \quad (14)$$

On peut également tenir compte de la capacité de jonction en ajoutant au modèle une capacité non linéaire en parallèle avec la résistance. On utilise normalement deux fonctions différentes pour la relations constitutive, suivant si l'on se trouve dans la zone où la diode est bloquante ou dans la zone où elle est conductrice. Pour les deux, la charge croît de manière monotone avec la tension.

Si l'on éteint la source sinusoïdale, toutes les tensions et courants convergent vers zéro. Ce fait est démontré facilement en utilisant l'énergie emmagasinée dans l'inductance et la capacité de la diode [11]. En présence de la source, normalement toutes les solutions convergent vers une solution périodique unique, dont la période coïncide avec celle de la source.

Cependant, dans certaines plages des paramètres, le comportement qualitatif des solutions est différent. Les figures 12 à 15 décrivent le comportement asymptotique des solutions quand les paramètres sont choisis de manière adéquate. D'une figure à l'autre, on fait varier seulement l'amplitude de la source. Pour de petites amplitudes, le comportement est "normal", c'est-à-dire toutes les solutions convergent vers l'unique solution périodique, dont la période coïncide avec celle de la source. L'orbite de cette solution dans l'espace d'état est représentée à la figure 12. L'abscisse est la charge de la capacité de la diode et l'ordonnée le courant dans l'inductance. A partir d'une certaine amplitude, le comportement asymptotique devient une solution périodique, dont la période est deux fois la période de la source (fig.13). Sa fréquence fondamentale est donc la moitié de la fréquence de la source. Pour cette raison, on l'appelle une sousharmonique 1/2. En augmentant l'amplitude davantage, on obtient une sousharmonique 1/4 (fig.14). Ensuite, les dédoublements de période se succèdent de plus en plus rapidement en fonction de l'amplitude et un certain moment, l'orbite devient complètement irrégulier (fig.15). On parvient mieux à discerner le comportement si l'on ne dessine que la position de l'orbite à des intervalles de temps espacés par une période de la source (fig.16). Si la solution était périodique, de même la période que la source, on trouverait un seul point. Une sousharmonique 1/n donnerait n points. On constate à la figure 16 qu'il ne s'agit pas d'une sousharmonique. Néanmoins, les points ne forment pas un amas irrégulier, mais se concentrent sur quelque chose qui a l'air d'un bout de ligne, mais qui est probablement un objet géométrique beaucoup plus compliqué. On utilise le terme *attracteur étrange*.

On peut représenter de manière succincte le comportement asymptotique en fonction de l'amplitude de la source dans un

diagramme de bifurcation (fig.17). L'abscisse représente l'amplitude. En ordonnée, on marque le courant dans l'inductance à des intervalles d'une période. Pour de petites amplitudes, où le comportement asymptotique est périodique avec la période de la source, on trouve un point en ordonnée pour chaque abscisse. La courbe résultante bifurque, quand l'amplitude augmente, à chaque dédoublement de période, et elle finit par devenir un nuage de points qui remplit tout un intervalle pour chaque ordonnée. C'est le domaine du comportement chaotique. On remarque également des intervalles d'abscisse avec des sousharmoniques entre des zones de comportement chaotique.

On peut se demander jusqu'à quel point cette richesse de phénomènes est une conséquence du modèle de la diode. Comme déjà mentionné, elle n'a lieu que dans une certaine plage de paramètres. Néanmoins, elle est loin d'être de mesure nulle. D'autre part, on peut montrer par la méthode de Lyapounov que rien d'anormal ne se passe, tant que le modèle ne comporte pas de capacité non linéaire [11]. A part cela, la forme précise du modèle ne joue pas un grand rôle. Nous avons obtenu des diagrammes de bifurcation très semblables par simulation numérique avec de différents types de modèles. Dans [6], un diagramme de bifurcation similaire est représenté qui provient d'une expérience au laboratoire. Il s'agit donc bien de phénomènes robustes. Le plus étonnant est la ressemblance avec le diagramme de bifurcation de l'itération de l'intervalle selon [7]. Malheureusement, les tentatives d'établir un lien rigoureux entre les comportements des deux systèmes dynamiques sont restées sans succès. Une approche par la dynamique symbolique est donnée dans [12].

### 4. Les circuits autonomes de degré 3 proposé par Chua et al.

Le circuit de la figure 18 a été étudié de manière très extensive, principalement à cause de l'influence de L.O.Chua [13 - 17]. Il comporte trois éléments réactifs. La résistance non linéaire possède la caractéristique linéaire par morceaux représentée à la figure 19. Une réalisation est donnée à la figure 20.

Si l'on se limite à une partie linéaire de la résistance non linéaire, on obtient un circuit linéaire. Le comportement de ce dernier sera décrit dans l'espace d'état qui est de dimension 3. Comme variables d'état on choisira les tensions des deux capacités et le courant de l'inductance. L'espace d'état est divisé en trois régions  $D_1$ ,  $D_0$  et  $D_{-1}$ , chacune correspondant à un circuit linéaire. Les trois régions sont séparées par deux plans  $U_1$ ,  $U_{-1}$  perpendiculaires à l'axe de la tension sur la capacité  $C_1$  (fig.21). En étudiant les trois circuits linéaires et leurs interfaces, on peut se former une image intuitive du comportement qualitatif du circuit non linéaire. Comme la caractéristique de la résistance est symétrique par rapport à l'origine (fig.19), deux des trois circuits linéaires ne diffèrent que d'un décalage dans l'espace d'état. Ce sont donc essentiellement deux circuits linéaires qui déterminent le comportement du circuit non linéaire.

Chaque circuit linéaire possède un point d'équilibre. On les désigne par  $P_+$ ,  $P_0$  et  $P_-$ .  $P_0$  se trouve à l'origine. Comme l'origine fait partie de  $D_0$ , c'est également un point d'équilibre du circuit non linéaire. Tel n'est pas forcément le cas de  $P_+$  et de  $P_-$ . Le point  $P_+$  est un point d'équilibre du circuit non linéaire si et seulement si  $P_+$  appartient à  $D_1$ , ce qui dépend des paramètres du circuit. De même pour  $P_-$ . La stabilité de ces points d'équilibre est également une fonction des paramètres.

La situation suivante est un cas typique. Le circuit non linéaire possède les trois points d'équilibre dont  $P_+$  et  $P_-$  sont stables alors que  $P_0$  est instable. Dans chaque région linéaire il y a une fréquence propre réelle et deux fréquences propres complexes conjuguées. Dans  $D_1$  et  $D_{-1}$  les trois se situent dans le demi-plan complexe de gauche, ce qui signifie que les solutions convergent vers  $P_+$  et  $P_-$  sous forme de spirales. Dans  $D_0$ , les deux fréquences propres complexes conjuguées ont une partie réelle négative, alors que la troisième se trouve sur l'axe réelle positive. Les solutions s'éloignent donc de  $P_0$  en forme de spirale centrée sur le vecteur propre correspondant à la valeur propre réelle. Globalement dans le circuit non linéaire, chaque solution (hormis celle qui reste figée en  $P_0$ ) converge vers  $P_+$  ou vers  $P_-$  (fig.22).

Un comportement beaucoup plus complexe est le cas suivant. Dans  $D_0$ , la fréquence propre réelle est positive et les fréquences

propres complexes conjuguées ont une partie réelle négative. Les solutions dans ce domaine décrivent donc en générale une spirale qui se resserre autour du vecteur propre  $v$  correspondant à la valeur propre réelle et s'éloigne de  $P_0$  (fig.23). Dans  $D_1$  et  $D_{-1}$  la situation est l'inverse, la valeur propre réelle est négative alors que les valeurs propres complexes conjuguées ont une partie réelle positive. Les solutions décrivent des spirales qui s'ouvrent de plus en plus en s'approchant au plan invariant  $E^u(P_+)$  ou  $E^u(P_-)$  correspondant aux valeurs propres complexes conjuguées.

Le comportement global du circuit non linéaire peut être décrit de la manière suivante. En partant par exemple d'un point de  $D_0$ , la solution quitte cette région près de l'intersection de  $v$  avec  $U_1$  ou  $U_{-1}$ . Admettons que ce soit  $U_1$ . Ensuite, elle décrit une spirale de plus en plus grande dans  $D_1$  en s'approchant à  $E^u(P_+)$ . Comme  $E^u(P_+)$  intersecte  $U_1$ , à la longue la solution doit retraverser  $U_1$  et passer dans  $D_0$ . Ensuite, elle va de nouveau quitter  $D_0$  près de l'intersection de  $v$  avec  $U_1$  ou  $U_{-1}$ , etc. On comprend donc facilement, que normalement la solution passe continuellement d'une région à l'autre. Le comportement asymptotique dans le temps n'est cependant pas évident à partir de ce raisonnement. Une solution périodique est tout aussi concevable qu'une solution chaotique. En effet, les deux ont été observées par simulation et par expérimentation. Les figures 24 et 25 montrent les orbites obtenues par simulation, projetées dans le plan sous-tendu par le courant de l'inductance et la tension de la capacité  $C_1$ . Les circuits correspondants ne diffèrent que de la valeur de la capacité  $C_1$ . A cause de la forme géométrique de l'orbite de la figure 25, les auteurs ont appelé ce type d'attracteur "double scroll".

Une évidence mathématique partielle pour le comportement chaotique a été donné par le théorème de Shilnikov [18]. Les hypothèses de ce théorème applicable aux équations autonomes d'ordre 3 sont:

- existence d'un point d'équilibre instable  $P_0$
  - valeurs propres de l'équation linéarisée en  $P_0$ :  $\gamma > 0$  et  $\alpha \pm j\beta$  avec  $\alpha < 0$
  - $|\alpha| < \gamma$
  - il existe une orbite homocline en  $P_0$ , c'est-à-dire il existe une solution qui converge pour  $t \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow -\infty$  converge vers  $P_0$ .
- Dans ce cas il existe dans un voisinage de l'orbite homocline un "fer à cheval", c'est à dire, un ensemble invariant  $\Lambda$  qui
- possède la géométrie d'un ensemble de Cantor
  - comporte une infinité dénombrable d'orbites périodiques instables
  - comporte une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques

Comme  $\Lambda$  est de mesure 0, une orbite typique ne se trouve pas dans  $\Lambda$ , mais normalement la présence d'un tel fer à cheval rend l'orbite typique très irrégulière. Dans le cas de notre circuit, il est possible de montrer que les conditions du théorème de Shilnikov sont réunies pour certains choix de paramètres. L'orbite homocline se trouve de la manière suivante. On choisit un point initial sur le vecteur propre  $v$ . Ceci garantit que la solution correspondante converge vers  $P_0$  pour  $t \rightarrow -\infty$ . Vers les temps positifs, la solution atteint la région  $D_1$  et revient ensuite sur l'interface  $U_1$  comme décrit ci-avant. Si le point de retour sur  $U_1$  est situé en même temps sur l'espace propre  $E^s(0)$  des valeurs propres complexes conjuguées en  $D_0$ , la solution converge également vers  $P_0$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . En variant les paramètres, on peut obtenir ce cas (fig.26). Ensuite, on peut garantir la présence d'un fer à cheval non seulement pour ce choix précis de paramètres, mais également pour un voisinage dans l'espace des paramètres [13].

Nous avons décrit trois comportements qualitatifs très différents que possède le circuit de la figure 18 pour trois choix de paramètres distincts. Un diagramme de bifurcation où deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  varient de manière continue est représenté à la figure 27. Les valeurs des éléments du circuit varient en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ .

## 5. Bascule astable pilotée.

Un circuit non autonome très simple est représenté à la figure 28 [19]. Il est composé d'une résistance linéaire par morceaux avec la caractéristique de la figure 29, une capacité et une source de tension

qui injecte des impulsions à des intervalles réguliers (fig.30). C'est un schéma de principe pour un oscillateur de relaxation piloté.

Le fonctionnement de ce circuit peut être expliqué de la manière suivante. D'abord on éteint la source. Sur la branche DC de la caractéristique de la résistance, la tension  $v_R$  évolue selon

$$C_0 dv_R/dt = I_0 \quad (15)$$

ce qui signifie qu'elle croît linéairement en fonction du temps. Quand une solution arrive au point C, elle ne peut plus continuer, puisque sur les branches DC et BC la tension  $v_R$  augmente en fonction du temps. Le point C est donc un point d'impasse. Une analyse plus détaillée avec une petite inductance parasite montre que la solution passe rapidement de C à A. Ensuite elle satisfait

$$C_0 dv_R/dt = -I_0/\alpha \quad (16)$$

et  $v_R$  décroît linéairement en fonction du temps, jusqu'au deuxième point d'impasse B, d'où elle passe rapidement à D. Le circuit avec source annulée effectue donc une oscillation passant par les points ABDC. Dans la limite où l'inductance parasite tend vers 0, les passages de B à D et de C à A sont des sauts. Un circuit avec un tel comportement est appelé *bascule astable* ou *oscillateur de relaxation*. La tension  $v_R(t)$  est une fonction en forme de dents de scie.

La fréquence d'oscillation de la bascule astable est soumise à des variations puisqu'elle dépend des paramètres des composants électroniques qui la composent. Par contre, le signal  $d(t)$  peut être périodique avec une grande précision en provenant, par exemple, d'un quartz. Si la fréquence de  $d(t)$  est légèrement supérieure à celle de la bascule libre, chaque impulsion de la source déclenche le saut de C à A et la solution du circuit devient périodique avec la période de  $d(t)$  (fig.31). On dit que *la source pilote l'oscillateur*.

Par contre, si la fréquence de la source est légèrement inférieure à celle de la bascule libre, seulement une partie des impulsions de la source déclenche un saut (fig.32). Entre des sauts forcés il y a un certain nombre de sauts libres. Soient  $s_n$  les instants des sauts forcés,  $p$  la période de la source,  $q$  la période de la bascule libre et  $t_n = s_n \bmod q$ . Il est facile de calculer  $t_{n+1}$  en fonction de  $t_n$ . En termes de la variable normalisée

$$\tau_n = (t_n - (b-c)I_0)/(p-q) \quad (15)$$

on obtient

$$\tau_{n+1} = f(\tau_n) = 1 - (\alpha\tau_n + \beta) \bmod (p-q) \quad (16)$$

où

$$\beta = (b-c)(1+\alpha)/(p-q)I_0 \quad (17)$$

La fonction  $f$  est représentée à la figure 33. Si  $\alpha < 1$ , toute suite  $\tau_n$  engendrée par (16) converge vers un point fixe de  $f$ , ce qui implique que toute solution du circuit converge vers une solution périodique sousharmonique. Par contre, si  $\alpha > 1$ , il n'y a pas de solution périodique stable. De plus, deux solutions dont les conditions initiales sont proches vont toujours se séparer au cours du temps. Ce phénomène est appelé *dépendance sensible aux conditions initiales*. C'est une propriété essentielle du comportement chaotique.

## 6. Filtre numérique avec arithmétique modulaire.

Un filtre numérique est un système en principe linéaire dont la tâche est de laisser passer certaines gammes de fréquences d'un signal échantillonné et d'en bloquer d'autres. Il est composé de sommateurs, de multiplicateurs par une constante et de retards. Un exemple très simple est représenté à la figure 34. Il est décrit par la récurrence

$$y(n) = ay(n-1) + by(n-2) + u(n) \quad (18)$$

Les opérations "somme" et "produit" sont effectuées de manière numérique. Ceci implique que le signal doit être quantifié. En d'autres mots, les signaux  $x$  et  $y$  ne peuvent prendre que des valeurs dans un ensemble fini  $S$ . On distingue différents types de quantifications, notamment la quantification en virgule fixe et la



quantification en virgule flottante. Dans tous les cas,  $S$  est un ensemble fini, sinon on ne pourrait représenter les membres de  $S$  par des mots binaires de longueur fixe.

Le problème avec cette méthode de filtrage est que les opérations arithmétiques ne laissent  $S$  pas invariant. Par conséquent, on doit requantifier leurs résultats. Comme la quantification est une opération non linéaire, les filtres numériques sont des systèmes légèrement non linéaires. La quantification a deux aspects différents. D'une part il faut pousser une valeur qui se situe entre deux membres de  $S$  vers l'un ou l'autre de ces membres c'est la *quantification fine*. D'autre part il faut ramener une valeur qui dépasse l'intervalle de la droite réelle occupé par  $S$  à cet intervalle. C'est le *traitement du dépassement*.

On se limite ici au remède porté au dépassement et on fait abstraction de la quantification fine. Par conséquent, on admet toutes les valeurs réelles à l'intérieur d'un intervalle fini de la droite réelle. On va supposer que cet intervalle soit  $[-1, +1]$ . Le traitement du dépassement le plus naturel est de ramener une valeur  $w > 1$  à 1 et une valeur  $w < -1$  à -1. C'est l'*arithmétique de saturation*. Une autre méthode est de soustraire un multiple de 2 à  $w$ . C'est l'*arithmétique modulaire*. Elle peut être réalisée de manière plus efficace. La fonction de traitement du dépassement est représentée à la figure 35 pour l'arithmétique de saturation et à la figure 36 pour l'arithmétique modulaire.

Le cas qui sera étudié par la suite est le suivant [20]. On choisit  $b = -1$  et  $|a| < 2$ . Pour un tel choix de paramètres les pôles de la fonction de transfert

$$F(z) = \{1 + az^{-1} + bz^{-2}\}^{-1} \quad (19)$$

se situent sur le cercle unité du plan complexe  $z$ . Par conséquent, le filtre linéaire est à la limite de la stabilité. Le traitement du dépassement est effectué par arithmétique modulaire. Plus précisément, on suppose que la somme dans le filtre de la figure 34 soit calculée de manière modulaire, alors que l'on accepte un dépassement temporaire éventuel après la multiplication par  $a$ . Finalement, on annule le signal  $u$ . La récurrence non linéaire est donc

$$y(n) = D(ay(n-1) + by(n-2)) \quad (20)$$

On peut la récrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x_2(n-1) \\ x_2(n) &= D(ax_2(n-1) + bx_2(n-1)) \end{aligned} \quad (21) \quad (22)$$

et  $y(n)$  est à identifier avec  $x_2(n)$ . Les formules (21),(22) définissent une application du carré limité par les droites  $x_1 = \pm 1$ ,  $x_2 = \pm 1$  sur lui-même. Pour être précis, le carré est "semi-ouvert": les segments de droite  $x_1 = 1$  et  $x_2 = n$  en font pas partie.

Les itérés de cette application peuvent se comporter de la manière suivante:

- Ils passent de manière répétitive par  $N$  points.
- Ils sont denses sur une ellipse.
- Ils décrivent un mouvement non périodique.
- Ils sont d'abord situés sur une ellipse qui touche la droite  $x_1 = 1$  ou  $x_2 = 1$ . Ils quittent ensuite l'ellipse par le point de tangence.
- Ils entrent une ellipse qui touche la droite  $x_1 = -1$  ou  $x_2 = -1$  par le point de tangence.

Suivant le point initial on se trouve dans l'un ou l'autre de ces cas. Les points périodiques sont entourés d'ellipses concentriques invariants. Le mouvement sur les ellipses est stable. Les ellipses invariantes remplissent presque tout le carré. Néanmoins, on peut montrer qu'il y a des suites d'itérés non périodiques en dehors des ellipses invariantes. Cependant, les points initiaux correspondants n'ont qu'une mesure nulle. Strictement parlant, il n'y a pas de chaos observable dans ce filtre. Malgré cela, la simulation numérique met en évidence des suites d'itérés qui décrivent un mouvement extrêmement complexe. En effet, la figure 37 montre une seule orbite. On y distingue clairement les ellipses que l'orbite évite soigneusement.

## 7. Convertisseur $\Sigma-\Delta$ .

Le convertisseur analogique-numérique de type " $\Sigma-\Delta$ " est très intéressant pour la pratique, notamment dans le cas des applications audio. Le principe consiste à suréchantillonner le signal, de le quantifier à un nombre de bits réduit, normalement un seul bit, et ensuite d'appliquer un filtre de décimation pour revenir à la fréquence d'échantillonnage de base avec une quantification du signal à un nombre de bits élevé.

La partie cruciale de ce dispositif est la boucle comportant le quantificateur à un bit et un intégrateur numérique, représentée à la figure 38. A ce stade le signal est déjà échantillonné. Le réponse est limitée aux valeurs 1 et -1. Ce signal est ensuite transformé en une réponse correspondant à une fréquence d'échantillonnage plus basse, mais dont les valeurs sont quantifiées plus finement.

Nous nous intéressons ici au système dynamique non linéaire à temps discret de la figure 38 à entrée  $x$  constante et limitée à  $|x| \leq 1$ . L'hypothèse d'un  $x$  constant est raisonnable puisque le signal est suréchantillonné. Ce système est décrit par l'équation d'état

$$u_{n+1} = u_n + x - \text{sgn}(u_n) \quad (23)$$

La fonction  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour un  $x$  donné est représenté à la figure 39. Il est clair que l'intervalle de  $x-1$  à  $x+1$  est invariant et même attractif. Comme  $f(x-1) = f(x+1) = 2x$ , l'application (23) est équivalente à une rotation du cercle par l'angle  $\pi x$ . Il s'ensuit que pour  $x = r/m$  rationnel, la solution de (23) est périodique de période  $2m$ . A titre d'exemple, pour  $x = 2/3$  on a, à partir la condition initiale  $u_0 = 1/6$  la suite périodique  $u_1 = -1/6$ ,  $u_2 = 9/6$ ,  $u_3 = 7/6$ ,  $u_4 = 5/6$ ,  $u_5 = 3/6$  et  $u_6 = u_0 = 1/6$ . La réponse correspondante est 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, ... La valeur  $x$  peut être reconstituée à partir de cette réponse en prenant simplement la moyenne. En effet la moyenne sur la période de six échantillons de sortie est  $(-1 + 5)/6 = 2/3$ . Si l'on prenait une condition initiale différente, la réponse ne changerait pas, si ce n'est que par une translation dans le temps.

Si  $x$  est irrationnel, la solution de (23) est presque périodique. Tel est également le cas de la réponse, dont la moyenne converge vers  $x$ . En résumé, pour presque toutes les valeurs de  $x$  on a une réponse presque périodique, seulement pour les valeurs rationnels de  $x$  la réponse est périodique. Dans les deux cas, on peut reconstituer une approximation de  $x$  en prenant la moyenne de la réponse sur une fenêtre suffisamment large. Si  $x$  est rationnel, la reconstitution est exacte, si la moyenne est prise sur une période de la réponse. La condition initiale pour l'itération (23) ne joue pas de rôle.

Si l'on introduit une perte pour l'intégrateur (fig.40) la situation change complètement [21]. L'itération (23) devient

$$u_{n+1} = pu_n + x - \text{sgn}(u_n) \quad (24)$$

où  $0 < p < 1$  modélise la perte de l'intégrateur. Pour presque tous les  $x$ , l'itération (24) possède une solution périodique globalement asymptotiquement stable. Contrairement au cas  $p = 1$ , la solution de (24) n'est en général qu'asymptotiquement périodique, mais la réponse reste dès le début périodique. La moyenne sur une période n'est plus exactement égale à  $x$ , et même un filtre de décimation plus sophistiqué ne parviendrait jamais à reconstituer exactement  $x$ . Ceci vient du fait que tout un intervalle de valeurs de  $x$  conduisent à la même réponse et par conséquent les différents  $x$  de l'intervalle ne peuvent pas être distingués à partir de la sortie. Cela signifie qu'une perte dans l'intégrateur cause une erreur intrinsèque de quantification qui ne peut être éliminée par le filtre de décimation. A la figure 41 la valeur moyenne de la réponse est représentée en fonction de  $x$  pour  $p = 0.8$ . On constate qu'il y a un nombre extrêmement élevé d'intervalles à moyenne constante, avec des largeurs différentes. L'aspect de cette fonction est à l'origine du terme "escalier du diable" utilisé dans ce contexte.

Pour des valeurs de  $p$  juste inférieures à 1 toutes les réponses périodiques du cas  $p = 1$  se retrouvent. Seulement qu'elles couvrent presque tout l'intervalle  $|x| \leq 1$  alors que pour  $p = 1$  elles n'ont lieu que pour des  $x$  rationnels. Quand  $p$  diminue, une partie des intervalles disparaît et les autres gagnent en largeur (fig.42). En conséquence, l'erreur de quantification augmente.

Le système de la figure 40 présente donc une structure de bifurcation assez riche pour  $p < 1$ . Par contre, il n'y a pas de comportement chaotique. Pour cela, il faudrait choisir  $p > 1$ . Remarquons encore que l'on peut entièrement caractériser les

séquences de 1 et -1 périodiques qui peuvent être générées par le système de la fig. 40. Elles sont liées à la représentation en fractions continues des nombres rationnels [21].

**Références:**

[1] M.L.Cartwright and J.E.Littlewood, "On non-linear differential equations of the second order: I. The equation  $y'' - k(1-y^2)y' + y = b\lambda k \cos(\lambda\tau + \alpha)$ ,  $k$  large", *J.London Math Soc.*, vol.20, pp.180-189, 1945.

[2] N.Levinson, "A second order differential equation with singular solutions", *Ann. Math.*, vol.50, pp.127-153, 1949.

[3] H.Kawakami, "Elementary bifurcation phenomena in forced oscillatory circuits", *Proceedings of the VIIIth Int. Conf. on Nonlinear Oscillations*, pp.379-384, 1978.

[4] Y.Ueda, "Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffings equation", *J.Stat.Phys.*, vol.20, pp.181-196, 1979.

[5] C.Hayashi, *Nonlinear oscillations in physical systems*, MacGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series, New York, 1964.

[6] J.Testa, J.Perez and C.Jeffries, "Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator", *Phys. Rev. Lett.*, vol.48, pp.714-717, 1982.

[7] P.Collet and J.-P.Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, Boston MA, 1980.

[8] *Proc.IEEE*, vol.75, no.8, Aug.1987.

[9] *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol.35, no.7, July 1988.

[10] J.K.Hale, *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, New York NY, 1969.

[11] M.Hasler and J.Neirynck, *Circuits non linéaires*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

[12] A.Azzouz, M.Hasler, "Orbits of the R-L-diode circuit", *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol.37, pp.1330-1338, 1990.

[13] L.O.Chua, M.Komuro and T.Matsumoto, "The double scroll family - part I: Rigorous proof of chaos", *IEEE Trans. Circ.Syst.*, vol.33, pp.1072-1096, 1986.

[14] L.O.Chua, M.Komuro and T.Matsumoto, "The double scroll family - part II: Rigorous analysis of bifurcation phenomena", *IEEE Trans. Circ.Syst.*, vol.33, pp.1097-1118, 1986.

[15] T.Matsumoto, L.O.Chua, M.Komuro, "The double scroll bifurcations", *Int. J. Circ. Th. Appl.*, vol 14, pp.117-146, 1986.

[16] T.Matsumoto, "Chaos in electronic circuits", *IEEE Proc.*, vol.75, pp.1033-1057, 1987.

[17] S.-X.Wu, "Chua's circuit family", *IEEE Proc.*, vol.75, pp.1022-1032, 1987.

[18] J.Guckenheimer and P.Holmes, *Nonlinear oscillations, Dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer, New York NY, 1983.

[19] Y.S.Tang, A.I.Mees and L.O.Chua, "Synchronization and chaos", *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol.30, pp.620-626, 1983.

[20] L.O.Chua and T.Lin, "Chaos in digital filters", *IEEE Trans.Circ.Syst.*, vol.35, pp.648-658, 1988.

[21] O.Feely, L.O.Chua, "The effect of integrator leak in S-D modulation", to appear in *IEEE Trans. Circ. Syst.*

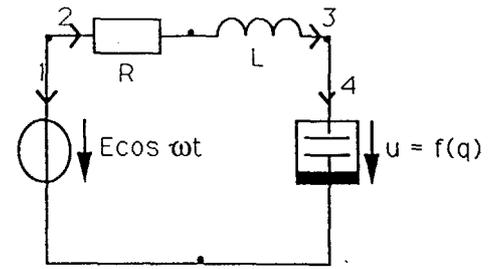


Fig.2

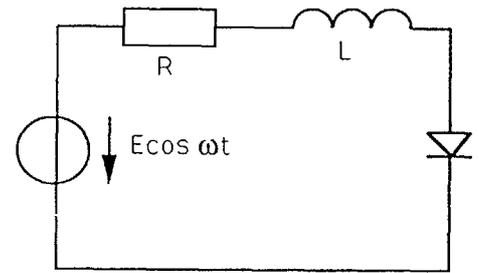


Fig.3

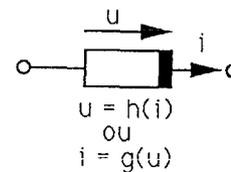


Fig.4: Résistance non linéaire

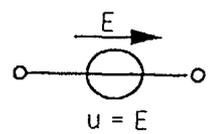


Fig.5: Source de tension

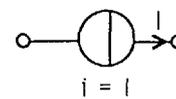


Fig.6: Source de courant

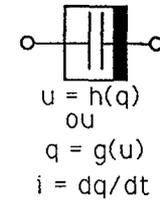


Fig.7: Capacité non linéaire

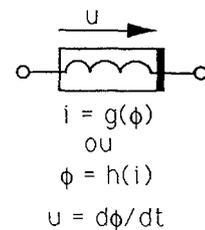


Fig.8: inductance non linéaire

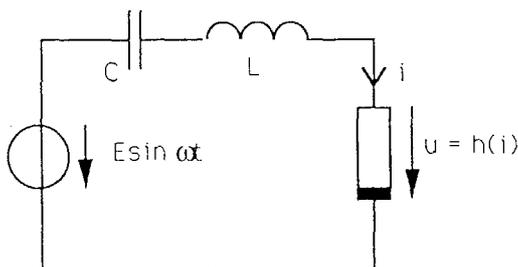


Fig.1

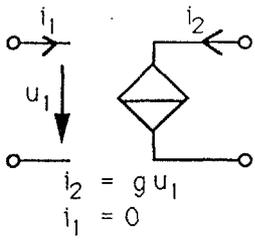


Fig.9: source de courant commandée par une tension

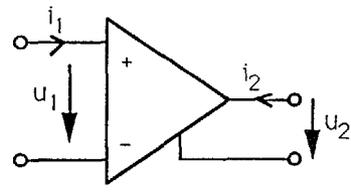


Fig.10: Amplificateur opérationnel idéal

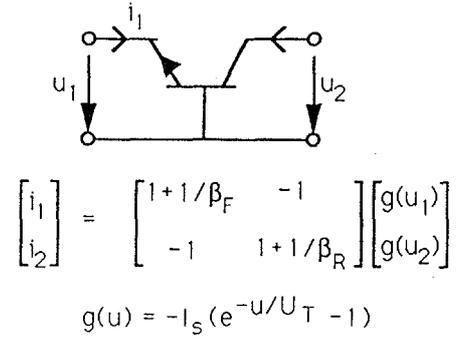


Fig.11: Transistor bipolaire npn

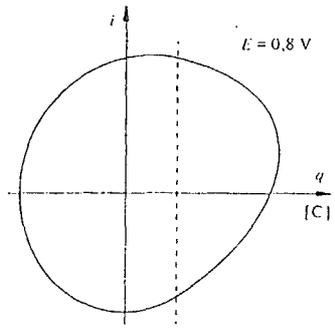


Fig. 12 (de [11])

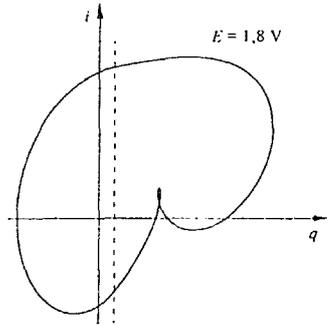


Fig. 13 (de [11])

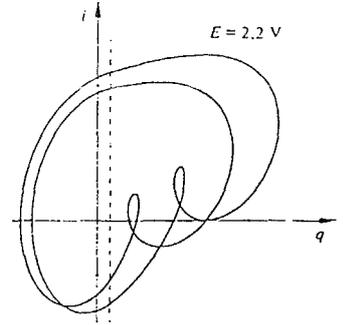


Fig. 14 (de [11])

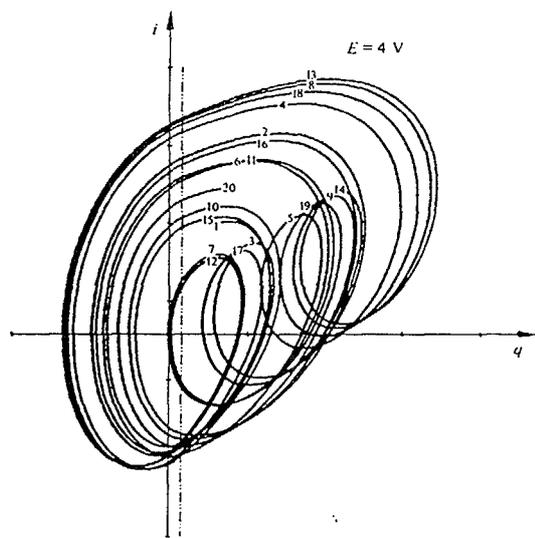


Fig. 15 (de [11])

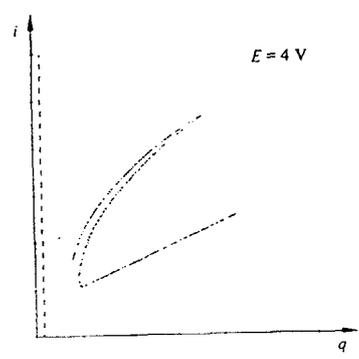


Fig. 16 (de [11])

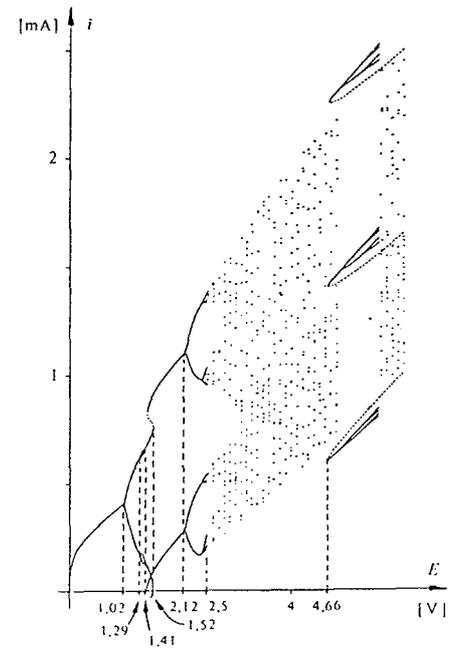


Fig. 17 (de [11])

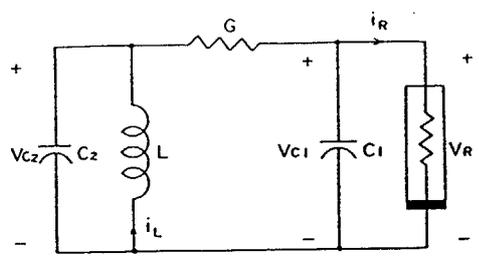


Fig. 18 (de [16])

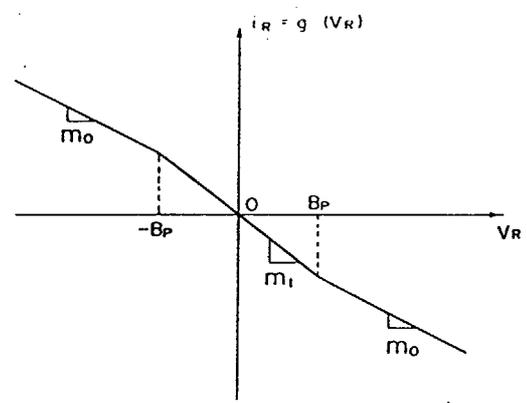


Fig. 19 (de [16])

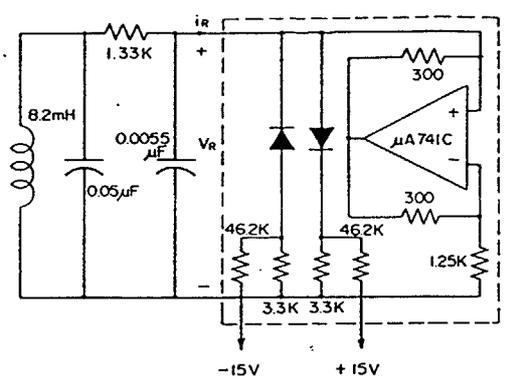


Fig. 20 (de [16])

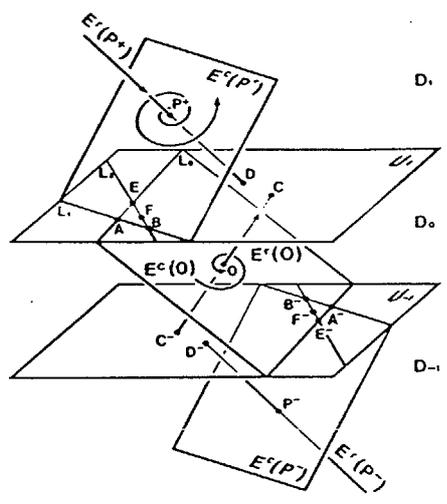


Fig. 21 (de [16])

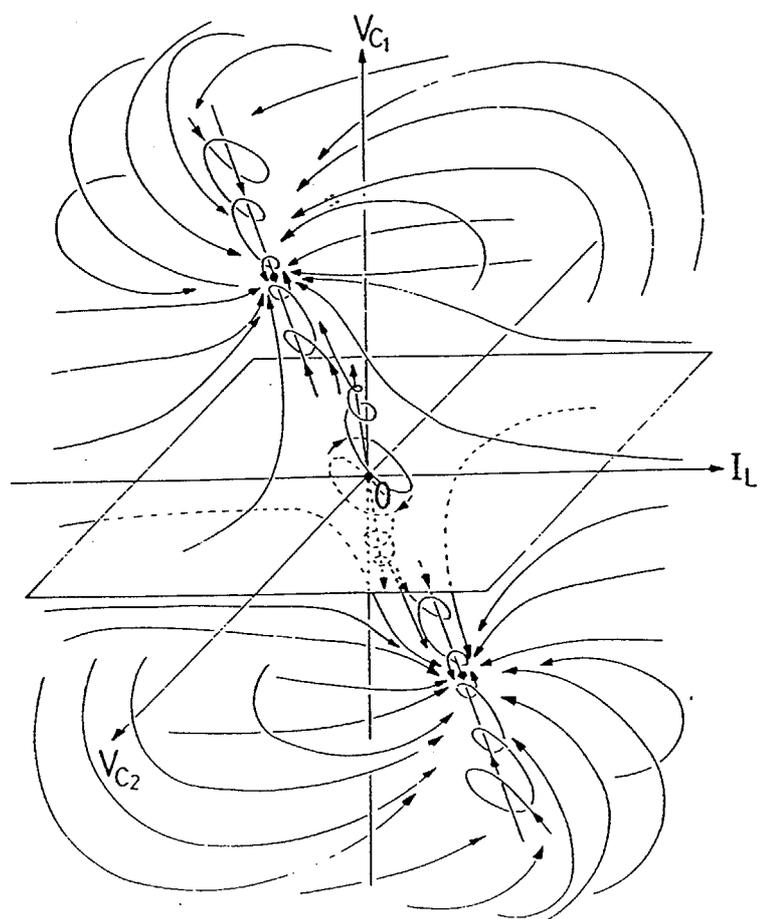


Fig. 22 (de [17])

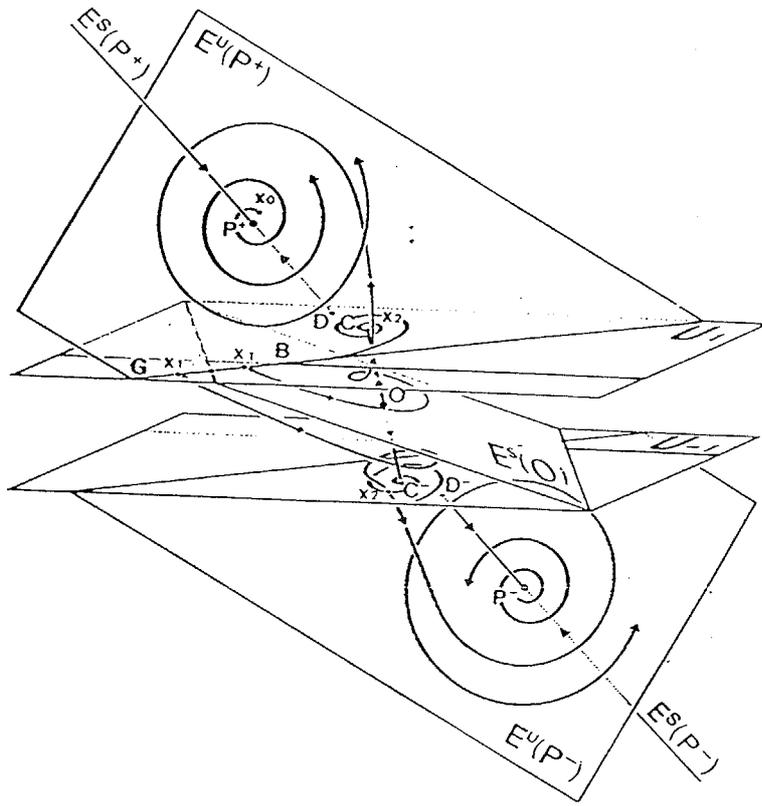


Fig. 23 (de [16])

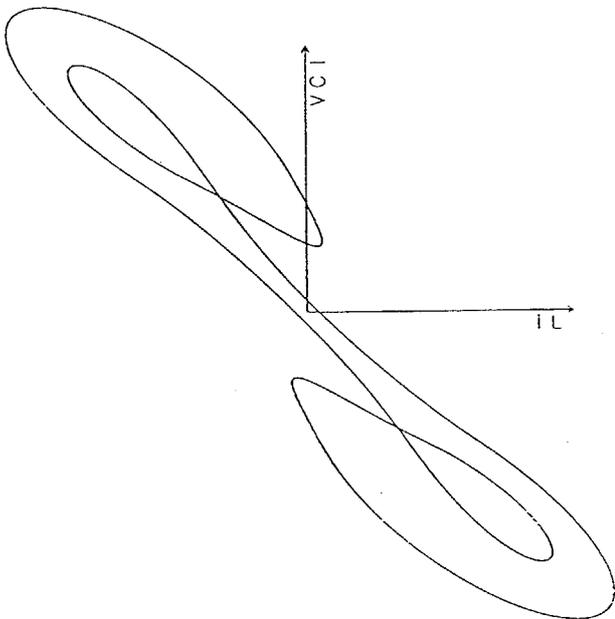


Fig. 24 (de [15])

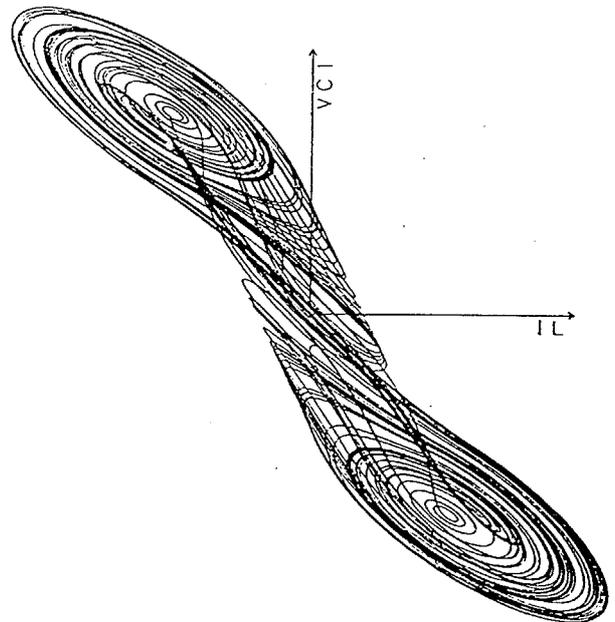


Fig. 25 (de [15])

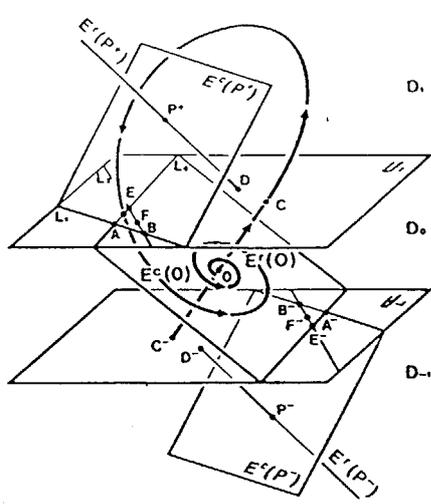


Fig. 26 (de [16])

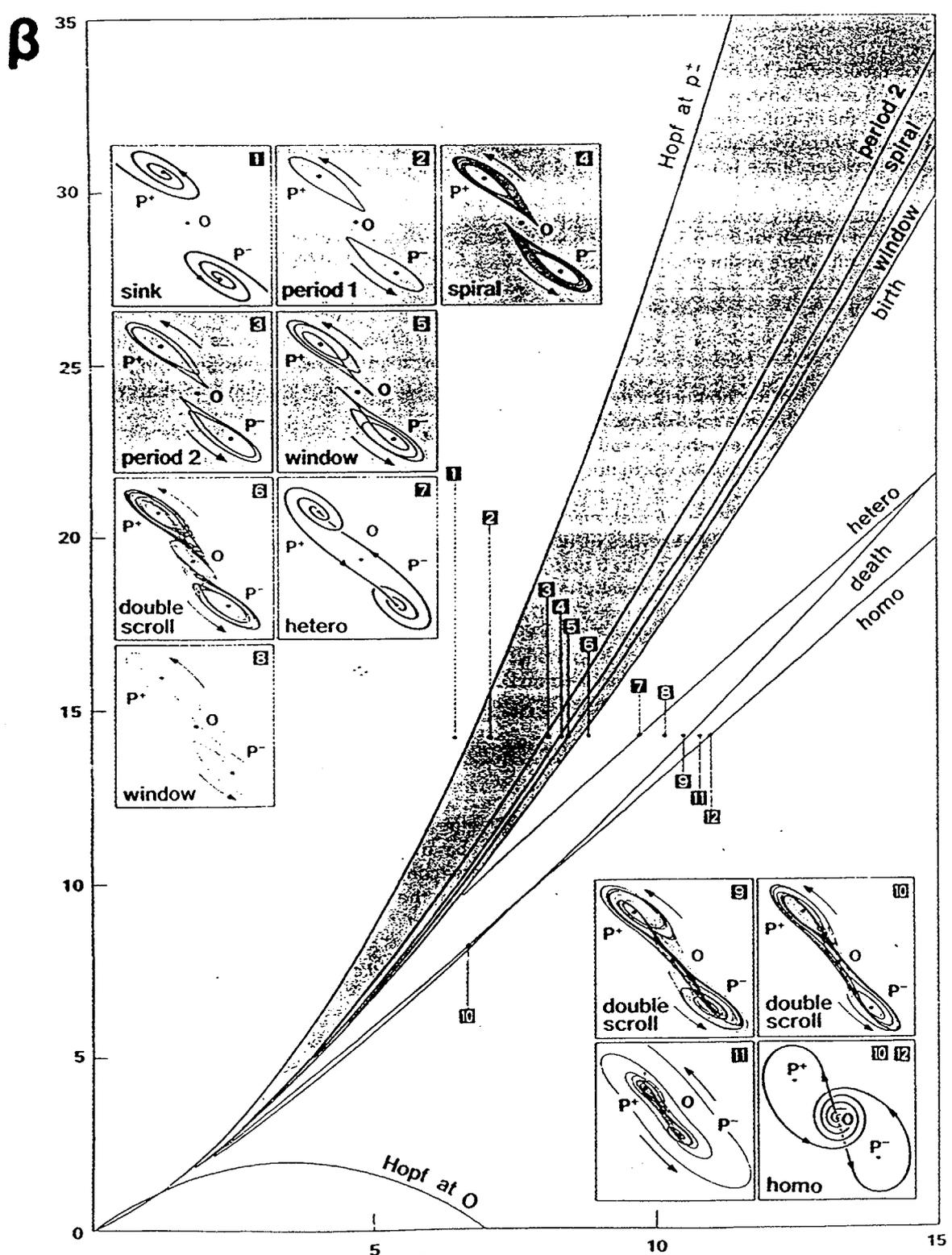


Fig. 27 (de [16])

**a**

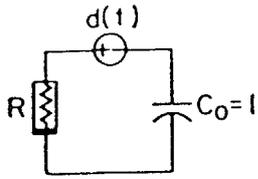


Fig. 28 (de [191])

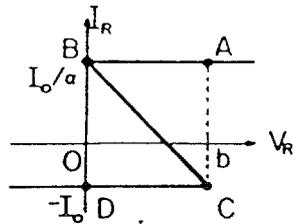


Fig. 29 (de [191])

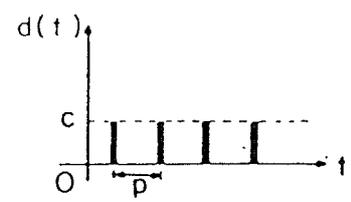


Fig. 30 (de [191])

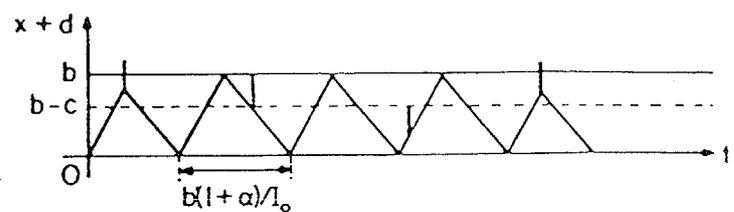


Fig. 31 (de [191])

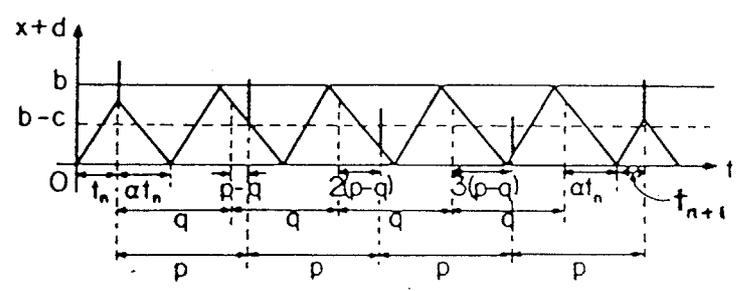


Fig. 32 (de [191])

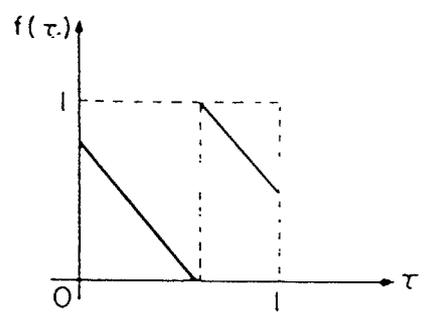


Fig. 33 (de [191])

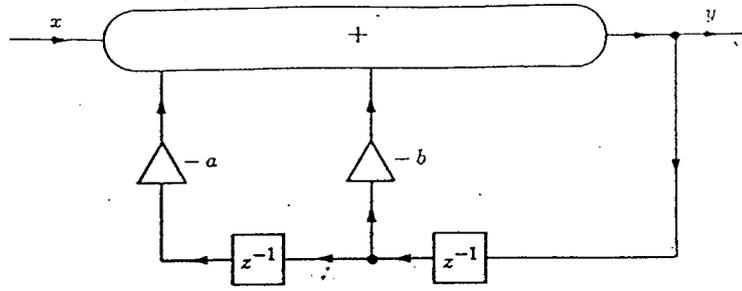


Fig. 34

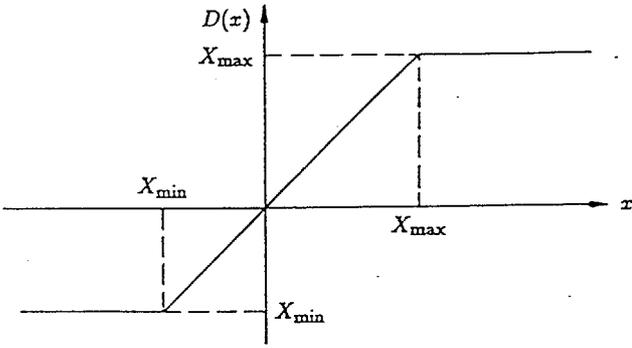


Fig. 35

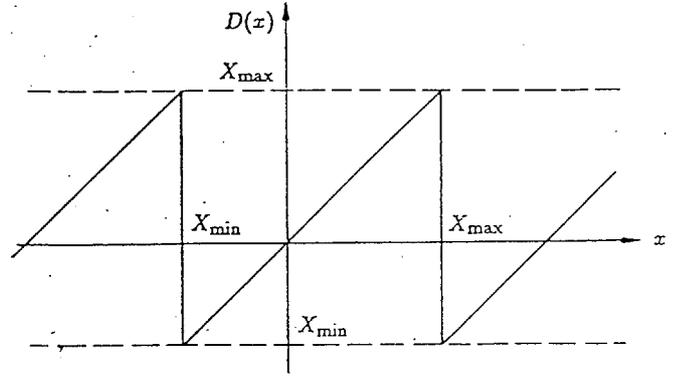


Fig. 36

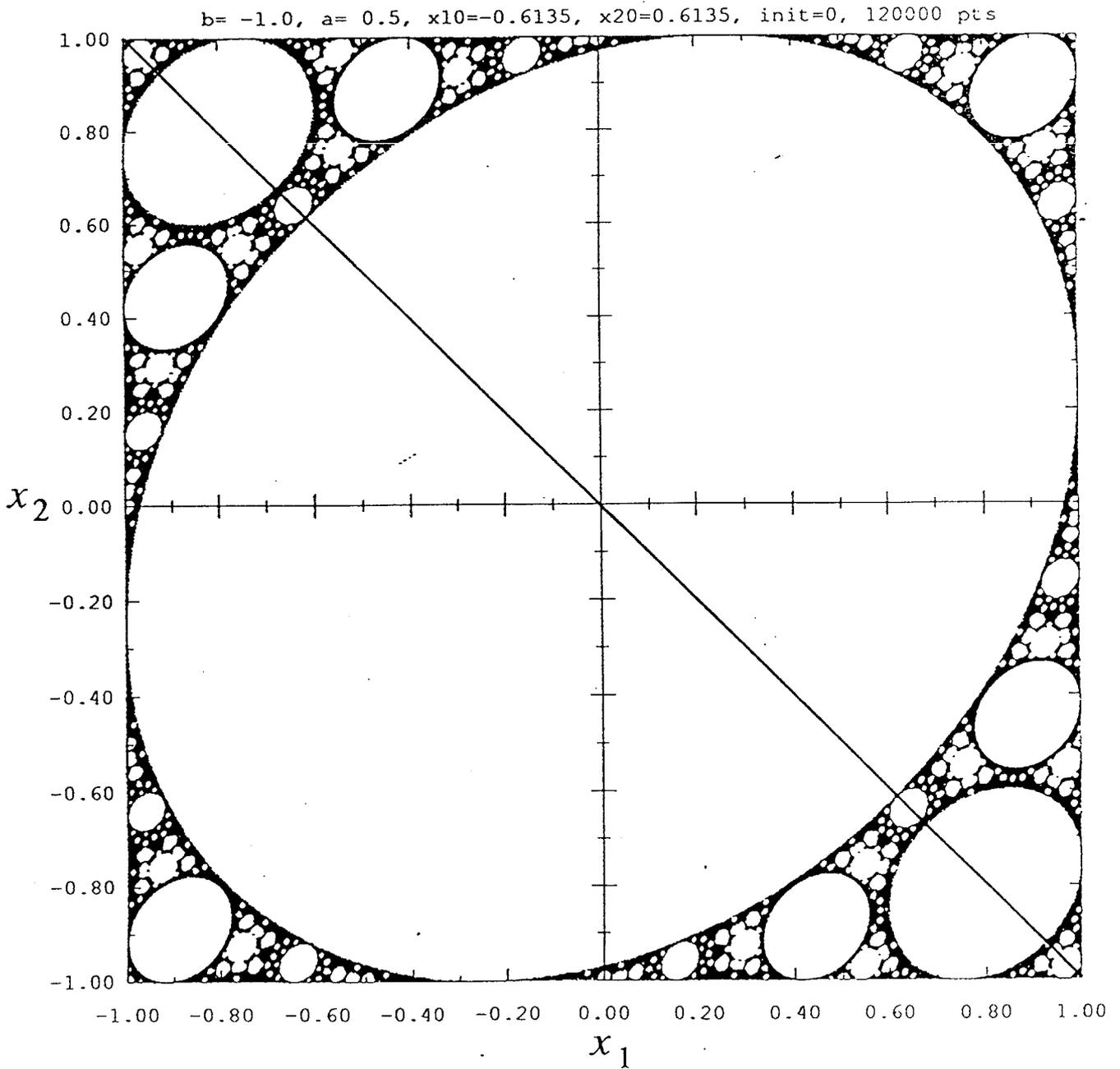


Fig. 22 (a) (b)

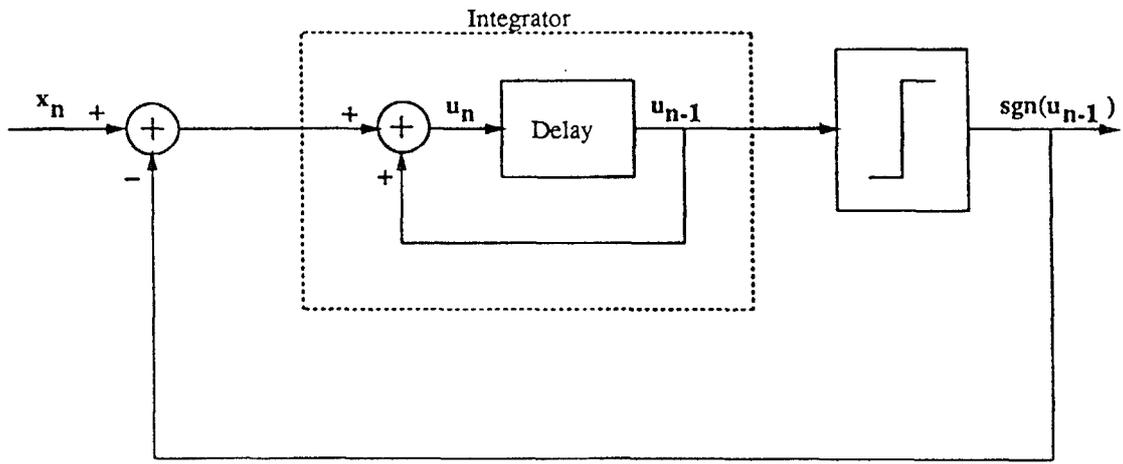


Fig 38

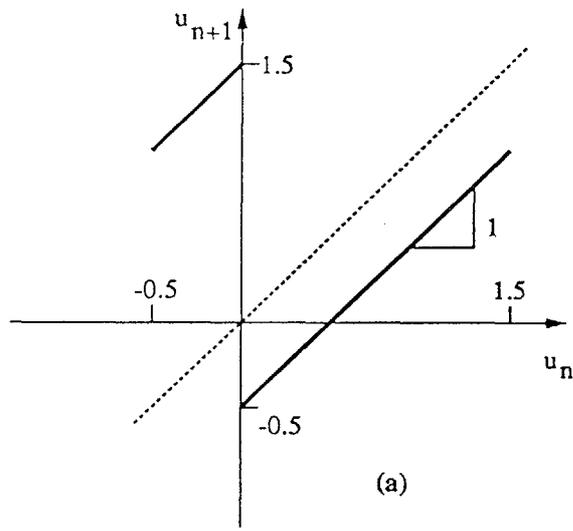


Fig 39

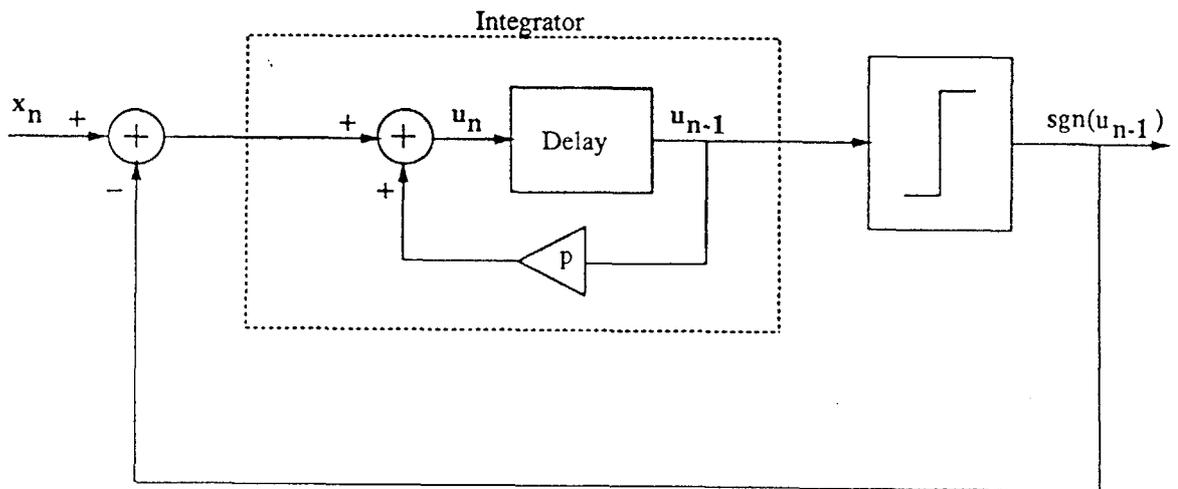


Fig. 40

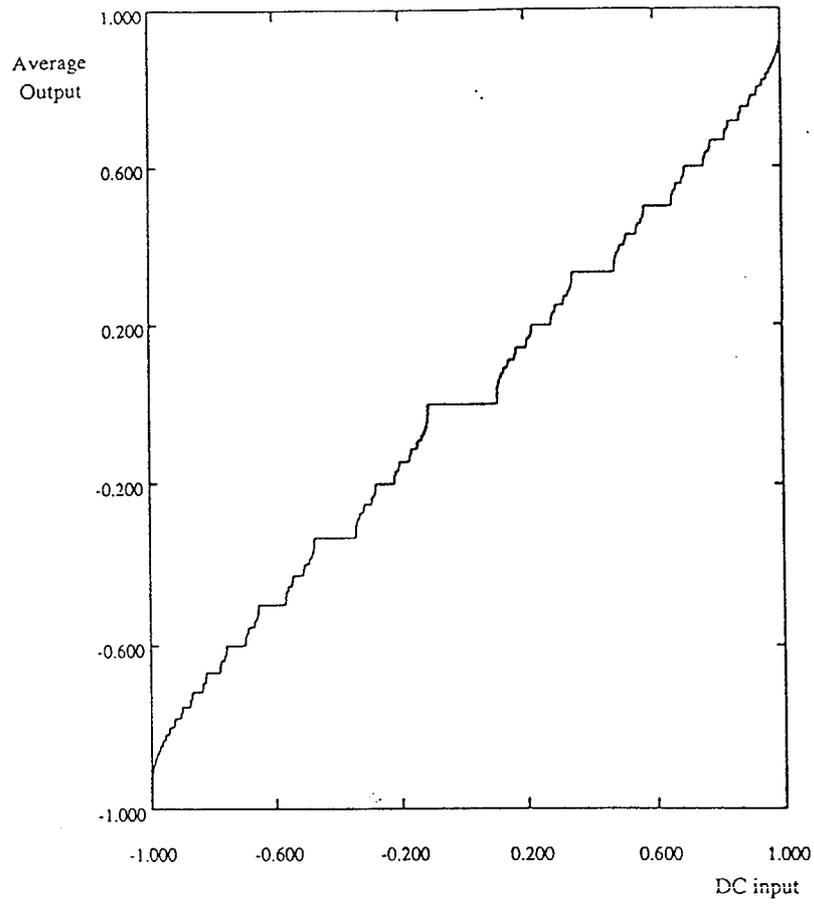


Fig. 41 (de [21])

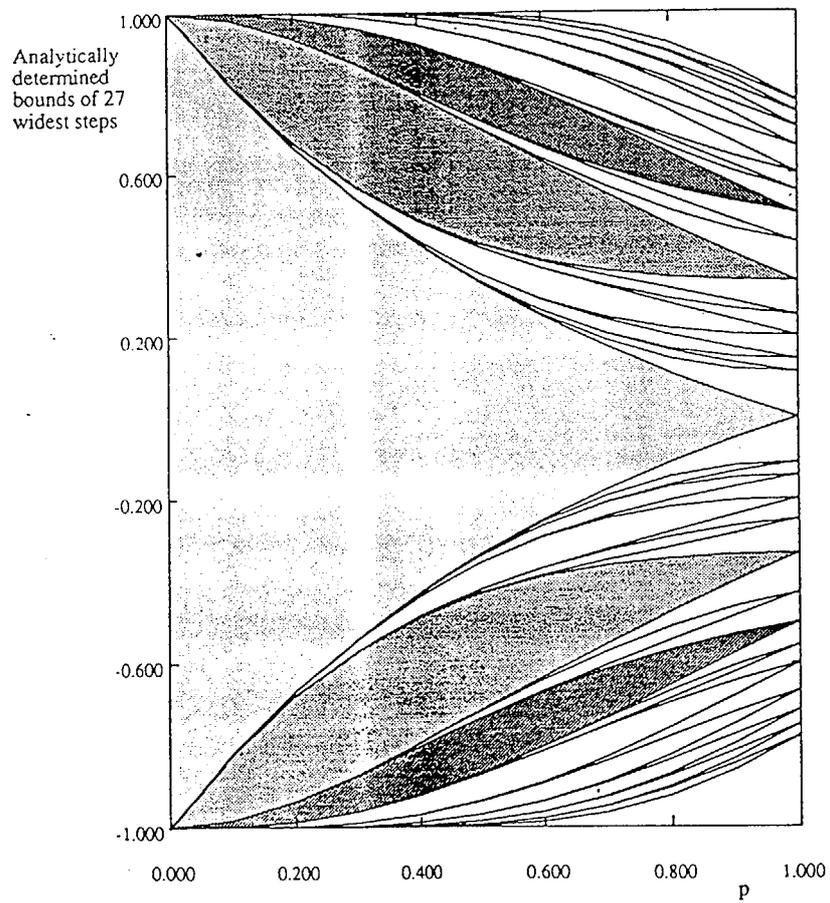


Fig. 42 (de [21])