

ESTIMATION DES PARAMETRES DES TEXTURES BOOLEENNES : DE LA THEORIE A LA PRATIQUE.

Jean-Cédric CHAPPELIER,
Françoise PRETEUX.

Département Image, TELECOM-PARIS
46 rue Barrault, 75013 PARIS

RÉSUMÉ

Le problème général de l'estimation numérique de paramètres algébriques intrinsèques à un modèle est étudié dans le cadre de l'analyse de textures booléennes à partir de deux approches complémentaires. La première, de nature géométrique, explicite directement l'expression de la capacité de Choquet alors que la seconde, de nature statistique, est fondée sur l'étude des espérances conditionnelles relativement à un voisinage. Précision, robustesse et validité sont établies à partir d'images de synthèse et de radiographie industrielle.

INTRODUCTION

Dans le cadre de la reconnaissance des formes par analyse de texture, les approches stochastiques reposent soit directement sur l'analyse statistique de la réalisation du processus aléatoire sous-jacent, soit sur la modélisation mathématique de celui-ci.

Le principe de la première approche consiste à extraire un ensemble de paramètres, généralement corrélés mais de faible contenu sémantique [1], [2] en vue d'une caractérisation dans laquelle les hypothèses d'ergodicité, de stationnarité et la conjecture de Julez [3] sont plus ou moins implicitement requises.

La simplicité et la relative généralité de cette démarche s'opposent aux contraintes spécifiques (relatives au schéma d'organisation spatiale des motifs texturaux aléatoires et à leur simulation) sur lesquelles reposent explicitement les approches par modélisations probabilistes telles que fonctions booléennes, champs markoviens... Dans ce cas, si l'étape de synthèse de texture est assez aisée, l'étape d'analyse, i.e. de caractérisation et de discrimination, se heurte au problème général de l'estimation numérique de paramètres algébriques intrinsèques au modèle.

Nous présentons ici une étude détaillée de ce problème fondamental dans le cadre des textures booléennes et étudions la précision et la fiabilité des mesures de leurs paramètres caractéristiques, nécessaires à l'interprétation et à la discrimination de grandeurs physiques.

Après un bref rappel du cadre mathématique associé aux fonctions booléennes [4], nous établirons que les difficultés rencontrées lors de l'analyse sont liées aux hypothèses fortes

ABSTRACT

In the framework of boolean texture analysis, the quantitative estimation of algebraic parameters intrinsic to a model is studied by using two complementary approaches. The first one, geometrical, exploits directly the expression of the Choquet's Capacity, while the second one, statistical, is based on the concept of conditional expectation relative to a neighbourhood function. Accuracy and robustness of the obtained results are established on synthesized images and industrial radiography.

que sont la stationnarité et l'ergodicité, mal appréhendées du point de vue informatique, et surtout au problème général de l'estimation des coefficients d'une fonction polynôme connue à partir d'un nuage de points. Nous montrerons que la fiabilité des valeurs estimées peut être garantie par une approche qualitative fondée sur la notion d'espérance conditionnelle représentée sous forme d'images numériques à partir desquelles les statistiques du modèle peuvent être aisément estimées. La validation des résultats obtenus a été effectuée à partir d'une part d'images de synthèse et d'autre part de radiographies industrielles.

I. FONCTIONS BOOLEENNES : RAPPELS

Dans toute la suite nous désignerons par :

- Π_0 l'hyperplan de cote 0 dans \mathbb{R}^n ,
- Φ_s l'ensemble des fonctions semi-continues supérieurement de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} ,
- Φ_c le sous-ensemble de Φ_s des fonctions f telles que :

$$\exists t \in \mathbb{R}, SG(f) \cap (\mathbb{R}^n \times [t, +\infty[) \in K'(\mathbb{R}^{n+1})$$

où $SG(f)$ est le sous-graphe de f et $K'(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des compacts non vides de \mathbb{R}^{n+1} ,

- δ_0 la distribution de Dirac en 0,
- μ_n la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n ,
- \oplus l'addition de Minkowski.

Dans une formulation constructive pour la synthèse de textures [4], une fonction booléenne correspond à la donnée :

- d'un processus de Poisson \mathcal{P} stationnaire dans Π_0 , d'intensité $v = \mu_n \otimes a\delta_0$,
- d'une fonction aléatoire f de Φ_c appelée fonction primaire.

La fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Sup}(f(x) \oplus (y,t) / (y,t) \in \mathcal{P} \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$



est alors une fonction booléenne stationnaire notée $f \equiv (f, \alpha_0)$. Ainsi pour obtenir une réalisation de f , suffit-il de considérer une réalisation du processus de Poisson en chaque point duquel "germe" une réalisation de la fonction primaire dilatée par la demi-droite $[0, +\infty[$.

De la même façon qu'une variable aléatoire est caractérisée par sa fonction de répartition, une fonction booléenne stationnaire (f, α_0) est caractérisée par sa capacité de Choquet [5], c'est-à-dire la fonctionnelle Q de $K(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $[0,1]$ qui à tout compact K de \mathbb{R}^{n+1} associe l'expression [4] :

$$Q(K) = \exp\{-a E(\mu_n[(SG^+(f) \oplus \check{K}) \cap \Pi_0])\} \quad (1)$$

où $E(X)$ représente l'espérance mathématique de X .

Plus précisément, on montre que (1) mène à :

$$\int \text{Log}(Q(K_t)) dt = -a E(\mu_3(SG^+(f) \oplus \check{K}))$$

avec $K_t = K \oplus \{t\}$ et $SG^+(f)$ le sous-graphe positif de f .

Si f est presque sûrement convexe, le second membre de (1) peut se développer à l'aide des formules de Steiner [6], [7]. En particulier dans le cas où K est une sphère de rayon ρ , le second membre s'écrit :

$$a \mu_3(SG^+(f) \oplus K) = a(4\pi/3 \rho^3 + \rho^2 M(SG^+(f)) + \rho S(SG^+(f)) + \mu_3(SG^+(f))) \quad (2)$$

avec $S(X)$ la surface de X et $M(X)$ l'intégrale de la courbure moyenne de X .

II. ANALYSE

II.1 Analyse géométrique

En pratique, la taille maximale de la sphère K susceptible d'être considérée est limitée, en raison d'une part de la finitude du champ d'analyse et d'autre part des effets de bords liés à la non-stationnarité. Nous proposons de déterminer la taille optimale de K en sélectionnant les points significatifs à partir d'une méthode fondée sur les différences finies d'ordre 2. On peut en effet montrer que l'expression

$$h_i = y_{i+1} - 2 y_i + y_{i-1}$$

représente la dérivée seconde du signal $y_i(x_i)$, pourvu que les x_i soient régulièrement espacés. Si on suppose que

$$y_i = A x_i^3 + B x_i^2 + C x_i + D$$

avec pour tout i , $x_{i+1} - x_i = 1$, alors

$$h_i = 6 A x_i + 2 B.$$

Dans le cas d'images de synthèse [8], 20 réalisations de la même fonction booléenne définie par 2500 points de Poisson et par une fonction primaire gaussienne d'écart type 5 pixels tronquée à son point d'inflexion et subissant une affinité verticale de rapport aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(1, 0.15)$, l'expression de la cubique (2) devient :

$$2.76 \cdot 10^{-2} \rho^3 + B \cdot \rho^2 + C \cdot \rho + 29.60.$$

Les différences finies doivent donc donner une droite de pente faible ($6 \times 2.76 \cdot 10^{-2} = 0.17$). On constate sur les résultats obtenus que, pour les 8 à 12 premiers points suivant les cas, les résultats sont acceptables mais qu'ensuite il y a une chute de la courbe (Fig. 1) mettant en évidence des effets de bords de champ et de portée. Ainsi, toutes les mesures effectuées ne

sont-elles pas significatives, et les différences finies fournissent-elles un bon critère de discrimination.

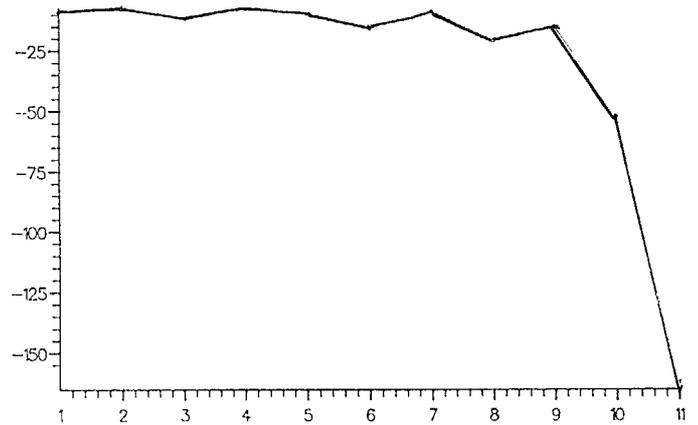


Figure 1 : Exemple d'effet de bord de champ.

A partir du nuage de points pertinents ainsi obtenus, comment évaluer numériquement les coefficients de la cubique (2) ?

Parmi les méthodes d'approximation sur différentes bases, on peut montrer que celle des moindres carrés est optimale dans le cas de données bruitées par un bruit additif de moyenne nulle, propriété qui est vérifiée par le bruit de calcul. Nous avons donc adopté cette méthode d'approximation pour estimer le coefficient d'ordre 3 de la cubique. Etant proportionnel à la densité du processus ponctuel de Poisson sous-jacent, il est fondamental pour discriminer deux textures booléennes [4]. A partir de la famille d'images de synthèse précédemment décrite, nous avons trouvé des valeurs estimées présentant de fortes variabilités (Fig. 2), ce qui nuit à la fiabilité de l'interprétation des grandeurs physiques.

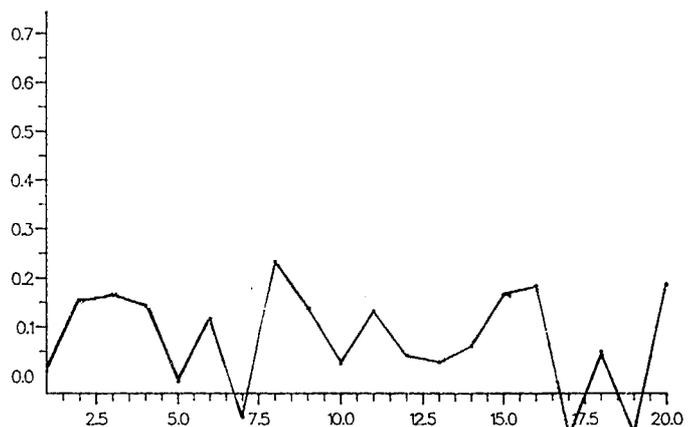


Figure 2 : Estimation par moindres carrés du coefficient d'ordre trois à partir de 20 réalisations de la même fonction booléenne.

Pour expliquer et contrôler cette absence de robustesse inhérente soit au modèle aléatoire, soit à la méthode d'estimation, nous avons considéré une image de synthèse purement déterministe. La fonction polynôme (2) associée à pour expression théorique :

$$2.1716 X^3 + 332 X^2 + 16917 X + 287322$$

alors que l'approximation par la méthode des moindres carrés fournit l'équation suivante :

$$P_{mc}(X) = - 0.16 X^3 + 384 X^2 + 16545 X + 283647.$$

On constate alors que le coefficient du cube ainsi estimé n'a aucun rapport avec celui attendu. La périodicité des différences finies d'ordre 2 (Fig. 3) indique que cela est lié à un problème d'échantillonnage et suggère de recourir à une méthode d'approximation prenant en compte l'erreur maximale (ordre 1) au lieu de l'erreur quadratique (ordre 2). Pour cela, nous avons utilisé la méthode du Min-Max (approximation de Chebychev) qui conduit à l'expression suivante :

$$P_{MM}(X) = 2.136 X^3 + 327 X^2 + 16697 X + 284061.$$

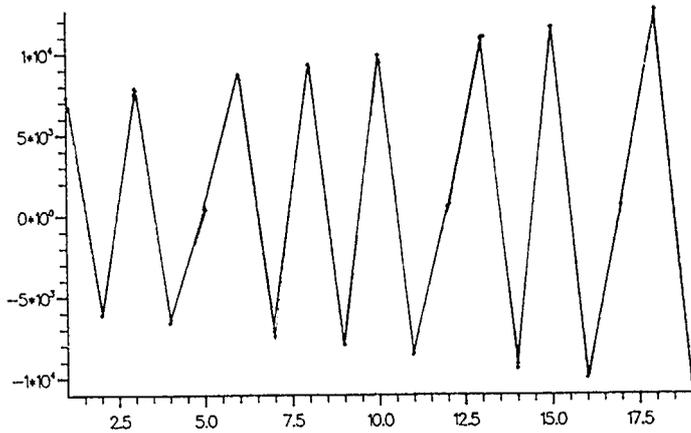


Figure 3 : Périodicité des différences finies sur un modèle déterministe.

Soulignons que les deux approximations proposées P_{mc} et P_{MM} sont à peine discernables (Fig. 4) en dépit de coefficients d'ordre 3 très différents.

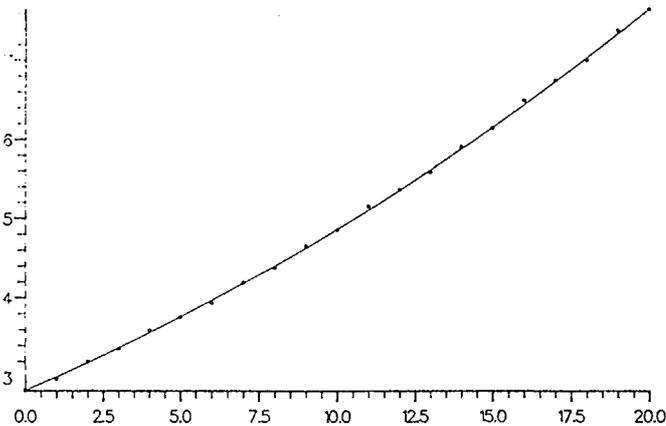


Figure 4 : Approximations par Min-Max et moindres carrés.

Ainsi, pour interpoler une courbe à partir d'un nuage de points, pratiquement toutes les méthodes d'approximation sont satisfaisantes, mais dès qu'il s'agit d'obtenir la valeur numérique exacte de coefficients algébriques, les résultats fournis sont à considérer avec circonspection. Face à cette difficulté nous avons supposé que, lorsque les méthodes d'approximation par moindres carrés et par Min-Max produisent des résultats équivalents, le paramètre considéré est "correctement" estimé grâce à un contrôle des ordres 1 et 2 de l'erreur ; ce que l'on a confirmé à partir d'analyse d'images de synthèse.

En ce qui concerne l'estimation des paramètres généraux de la fonction booléenne (volume, surface, norme) l'exploitation de l'équation (2) impose de diviser les coefficients d'ordre inférieur à trois par celui d'ordre trois. Pour s'affranchir de l'accumulation d'erreurs, nous proposons de recourir à une

méthode fondée sur l'extraction d'information de nature statistique.

II.2 Analyse statistique

Notre démarche s'apparente à celle introduite par Haralick [1] pour analyser les co-occurrences d'une image. Toutefois au lieu d'extraire de la matrice de co-occurrence un ensemble de paramètres texturaux, nous synthétisons sous forme d'une nouvelle image l'information donnée par les distributions des différentes espérances conditionnelles. L'interprétation de telles images permet ensuite d'obtenir des renseignements qualitatifs relatifs à la fonction primaire.

Par définition, l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X_{ij} relativement à une fonction de voisinage $F(\mathcal{V}(i,j))$ est donnée par :

$$E(X_{ij} / F(\mathcal{V}(i,j))) = m.$$

Dans le cadre de l'analyse de texture, nous construisons l'image Y définie à l'aide de ces espérances conditionnelles de la façon suivante : la ligne m de l'image Y représente la distribution de l'espérance conditionnelle relativement à la fonction de voisinage $F(\mathcal{V}(\cdot))$:

$$Y_{nm} = P(X_{ij} = n / F(\mathcal{V}(i,j) = m)).$$

Ainsi lorsque variable conditionnée (X_{ij}) et variable conditionnante ($F(\mathcal{V}(i,j))$) sont décorréelées, l'image résultante est constituée d'un cylindre d'axe vertical, les différentes distributions étant alors égales. En revanche, une quelconque corrélation se traduit par une évolution des distributions en fonction de la valeur de la variable conditionnante, l'aspect rendu étant celui d'une queue de comète plus ou moins dispersée.

En pratique, nous particularisons F et le voisinage de la façon suivante :

$$F(\mathcal{V}(i,j)) = \sum X_{kl} \quad (k,l) \in \mathcal{V}(i,j),$$

et $\mathcal{V}(i,j) = \mathcal{W}(i,j) = \{(i-1,j); (i+1,j); (i,j-1); (i,j+1)\}$,
ou $\mathcal{V}(i,j) = \mathcal{U}_p(i,j) = \{(i+p,j)\}$ avec $p \in \mathbb{N}$.

En considérant le voisinage \mathcal{W} , on obtient des informations concernant l'importance de l'interaction grain-fond. On estime ainsi qualitativement la densité des motifs texturaux. Par ailleurs, une mesure de la distribution des écarts d'un point à ses 4-voisins représente qualitativement la pente moyenne du motif primaire. En effet, pour une image de pente régulière non nulle (image d'un plan non horizontal), $X_{ij} = a \cdot i + b \cdot j + d$ et donc :

$$P(X_{ij} = n / F(\mathcal{W}(i,j) = 4n)) = 1,$$

$$P(X_{ij} = n / F(\mathcal{W}(i,j) \neq 4n)) = 0.$$

L'image Y précédemment introduite ne contient alors qu'une droite de pente 4.

L'emploi de différents \mathcal{U}_p , pour p croissant, nous indique à partir de quelle valeur de p , X_{ij} est décorréel de $X_{i+p,j}$, ce qui fournit la taille horizontale moyenne du motif primaire (Fig. 5).

Les résultats obtenus sur des textures booléennes de synthèse par cette approche sont significativement corrélés à ceux estimés à partir de l'expression de la capacité de Choquet ($r = 0,93$).

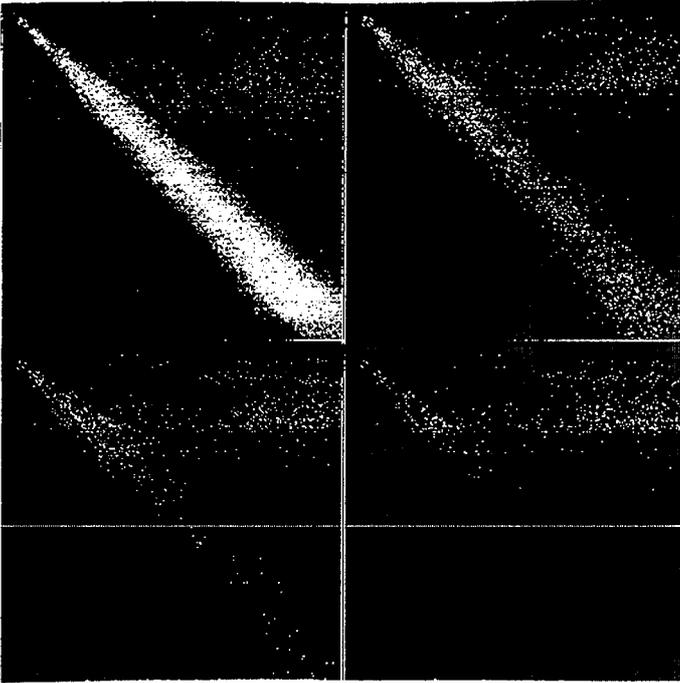


Figure 5 : Représentations de l'espérance conditionnelle pour différentes tailles de voisinage \mathcal{U}_p ($p=1,..4$).

III. APPLICATION EN RADIOGRAPHIE INDUSTRIELLE

Les deux méthodes précédemment décrites ont été appliquées dans le cadre de l'analyse de radiographies industrielles (CEA, Centre d'Etude de Vaujours-Moronvilliers).

Il s'agissait de modéliser l'état de coques métalliques hémisphériques en expansion rapide. Sous l'effet de l'explosif, la coque se dilate et s'amincit jusqu'à se fracturer [9]. La radiographie éclair (quelques nanosecondes) permet d'avoir une idée de la cartographie des épaisseurs de la coque à un instant donné. Nous avons montré que de telles macro-textures (éclats uniformément répartis) peuvent être simulées [8], [9], par modélisation booléenne, les sous-structures physiques de la coque étant appréhendées à partir d'une fonction primaire gaussienne tronquée à son point d'inflexion.

Les méthodes d'analyse précédemment décrites ont permis de quantifier la densité d'éclats ainsi que leur fonction de répartition. Elles ont conduit à une valeur de densité du processus ponctuel de Poisson sous-jacent de 36, donc une surface moyenne d'éclat de $0,027 \text{ cm}^2$ et une masse moyenne de l'ordre de 0,02 g avec une précision de 5% dans ce cas particulier [9]. Ces valeurs sont étroitement corrélées aux résultats des mesures réelles ce qui établit l'efficacité de la démarche d'analyse développée.

CONCLUSION

En résumé, notre contribution à l'analyse de textures booléennes a porté sur l'établissement des résultats suivants :

- calcul automatique de la portée à partir d'une méthode de différences finies, pour garantir la stationnarité et définir le nombre de mesures significatives à effectuer sur les images,

- mise en évidence de la non-robustesse des techniques classiques d'approximation (polynôme Min-Max, moindres carrés) pour estimer des coefficients polynomiaux,
- introduction du concept de probabilité conditionnelle associée à l'image initiale, et représentation sous forme d'images numériques à partir desquelles les statistiques du modèle sont calculées et les paramètres géométriques retrouvés.

La coopération des deux approches par modélisation probabiliste et analyse statistique a montré son efficacité lors de l'analyse quantitative de radiographies industrielles. Toutefois, l'obtention de valeurs numériques fiables à partir d'expressions algébriques reste tributaire des méthodes d'approximation employées. La définition objective d'un "bon" critère à partir du maximum de vraisemblance fait l'objet de nos actuelles recherches.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. HARALICK, *Statistical and Structural Approaches to Texture*, Proc. IEEE 67, 786-804, 1979.
- [2] A. GAGALOWICZ, *Vers un modèle de textures*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI, 1983.
- [3] B. JULESZ, *Visual Pattern Discrimination*, IRE Trans. Inform. Theory, IT-8, 1962, 84-96.
- [4] F. PRETEUX, *Description et interprétation des images par la morphologie mathématique. Applications à l'imagerie médicale*, Thèse d'Etat, Université Paris VI, Oct. 1987.
- [5] G. CHOQUET, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, 5, 131-295, 1953.
- [6] L. A. SANTALO, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, 1976.
- [7] G. MATHERON, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New-York, 1975.
- [8] F. PRETEUX, J.-C. CHAPPELIER, *Modélisation de texture et fonctions booléennes : nouveaux développements*, in Actes du 8ème Congrès R.F.I.A., 25-29 Novembre 1991, Lyon Villeurbanne, France.
- [9] F. PRETEUX, J.-N. OECONOMOS, J.-C. CHAPPELIER, *Caractérisation de la fracturation d'une demi-sphère métallique en expansion par analyse d'image.*, in Actes du 3ème Congrès Int. sur le Comportement mécanique et physique des Matériaux sous sollicitations dynamiques, 14-18 Octobre 1991, Strasbourg, France.