



## ALGORITHMES ADAPTATIFS EN TREILLIS 2-D POUR LA RESTAURATION D'IMAGES BRUTEES

M. JANATI-I et H. YOULAL

LEESA, Faculté des Sciences, B.P. 1014, RABAT, MAROC

M. NAJIM

Equipe Signal et Image - ENSERB

351, Cours de la Libération, 33405 TALENCE-CEDEX, FRANCE

### RESUME

Dans cette publication nous décrivons une approche adaptative pour la restauration d'images dégradées par un bruit additif. Le modèle utilisé est une cascade de treillis 2-D dont les paramètres sont les coefficients de réflexion obtenus par minimisation adaptative de la somme totale ou partielle des quatre erreurs de prédiction qu'engendre la structure en treillis. Parmi les algorithmes adaptatifs que nous avons développés, nous décrivons ici l'algorithme LMS en treillis 2-D (TDAL-LMS) ainsi que sa version normalisée. Ce modèle en treillis est utilisé dans l'élaboration d'un estimateur joint 2-D, et pour la réalisation d'un annuleur adaptatif de bruit en treillis 2-D pour la restauration d'images bruitées. Les performances de ce schéma ont été testées sur des images réelles dégradées artificiellement avec différents taux du rapport signal sur bruit (SNR). La comparaison avec les méthodes de restauration récursive classiques, telles que celles qui utilisent le filtre de Kalman, montre qu'on obtient une qualité de restauration nettement supérieure. Le faible volume de calcul de la méthode que nous proposons étant un autre avantage.

### INTRODUCTION

Les algorithmes adaptatifs et les structures en treillis ont connu d'importants progrès pendant ces deux dernières décennies. La plupart des résultats concerne le développement et l'application des algorithmes adaptatifs dans divers domaines du traitement du signal 1-D, [2], [7]. Il est bien établi dans le cas 1-D que les structures et les algorithmes en treillis offrent un certain nombre d'avantages par rapport aux méthodes transversales. Ces avantages ont motivé l'extension de ces approches de modélisation au cas 2-D. La représentation en treillis 2-D par les coefficients de réflexion est une approche fondamentale pour la modélisation des signaux 2-D, [5]. Le développement des algorithmes adaptatifs pour le cas 2-D a été, cependant, beaucoup plus lent que dans le cas 1-D, [4]. Ce n'est que récemment, que certains résultats ont vu le jour. Ainsi, des extensions au cas 2-D des algorithmes LMS et RLS 1-D ont été rapportées dans [1], [6] et [8]. Dans [9] et [10], l'algorithme LMS en treillis 2-D a été développé et ses propriétés ont été étudiées et illustrées par des simulations. Il est utilisé

### ABSTRACT

*In this paper we describe an adaptive approach for the restoration of images degraded by additive noise. The model consists of a cascade of two-dimensional lattice elements which involve four prediction errors and whose parameters, i.e. the reflection coefficients are estimated adaptively through the minimisation of either one or the total prediction error of the structure. Among the algorithms we have developed, the 2-D adaptive lattice least mean squares algorithm (TDAL-LMS) and its normalized version are described. This lattice model is used in the development of the 2-D joint process lattice estimator and the realisation of a 2-D adaptive lattice noise canceller for adaptive restoration of noisy images. Performance evaluation of the scheme is undertaken using artificially degraded image data at different signal to noise ratio (SNR). The experimental results show substantial noise reduction and compare favorably to those achieved using classical recursive restoration methods, such as those based on the use of Kalman filter. Another advantage of the method we propose is its much lower computational complexity.*

pour la compression d'images dans [11]. Dans ce papier, après un rappel sur la modélisation en treillis 2-D, nous présentons l'algorithme adaptatif en treillis 2-D (TDAL-LMS), ainsi que sa version normalisée. Nous considérons à titre d'illustration l'utilisation de ces algorithmes dans un problème de restauration d'images dégradées par un bruit additif. Nous développons le concept de l'estimateur joint en treillis 2-D, que nous appliquons au problème de l'élimination adaptative du bruit par la mise en œuvre d'un annuleur adaptatif de bruit en treillis 2-D. Cette réalisation est ensuite appliquée à la restauration d'images bruitées.

### MODELE EN TREILLIS 2-D ET ALGORITHMES ADAPTATIFS

Le modèle en treillis 2-D que nous considérons est une cascade de cellules, Fig. 1, dont la structure de base engendre quatre champs d'erreurs de prédiction  $e_{00}^{(n)}(i,j)$ ,  $e_{10}^{(n)}(i,j)$ ,  $e_{11}^{(n)}(i,j)$  et  $e_{01}^{(n)}(i,j)$ . Ce modèle peut s'écrire moyennant la définition du



vecteur  $\underline{e}^{(n)}(i,j)$  des erreurs de prédiction :  
 $\underline{e}^{(n)}(i,j) = [e_{00}^{(n)}(i,j), e_{10}^{(n)}(i,j), e_{11}^{(n)}(i,j), e_{01}^{(n)}(i,j)]^T$   
 sous la forme condensée suivante :

$$\underline{e}^{(n)}(i,j) = H^{(n)} \underline{e}^{(n-1)}(i,j) = K^{(n)} Z \underline{e}^{(n-1)}(i,j) \quad (1)$$

$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$  et  $n = 1, \dots, N$

avec l'initialisation :  $\underline{e}^{(0)}(i,j) = \mathbf{1} y(i,j)$   
 où,  $Z = \text{diag}[1, z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2^{-1}, z_2^{-1}]$

$$K^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{10}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} \\ -k_{10}^{(n)} & 1 & -k_{01}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} \\ -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} & 1 & -k_{10}^{(n)} \\ -k_{01}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -k_{10}^{(n)} & 1 \end{bmatrix}$$

Les quantités  $k_{\mu\nu}$  représentent les coefficients de réflexion et  $y(i,j)$  est le champ de données à l'entrée. L'indice  $(n)$  symbolise l'ordre du modèle en treillis 2-D tel que  $(n) = (n_1, n_2)$ , avec  $(n+1) = (n_1+1, n_2+1)$ . Le vecteur des coefficients de réflexion  $\underline{K}^{(n)} = [k_{10}^{(n)}, k_{11}^{(n)}, k_{01}^{(n)}]^T$ , qui caractérise l'étage  $(n)$  de la structure en treillis, peut être calculé à partir de l'équation normale suivante :

$R^{(n-1)} \underline{K}^{*(n)} = \underline{P}^{(n-1)}$  (2)  
 qui correspond à la minimisation de la moyenne quadratique des erreurs de prédiction à la sortie du même étage  $(n)$  :

$Q^{(n)} = E\{\underline{e}^{(n)}(i,j)^T \Lambda \underline{e}^{(n)}(i,j)\}$  (3)  
 $E\{\cdot\}$  désigne l'espérance mathématique sur l'ensemble des données.  $\Lambda$  étant une matrice diagonale de pondération dont le choix permet la minimisation de la somme totale ou partielle des erreurs de prédiction.

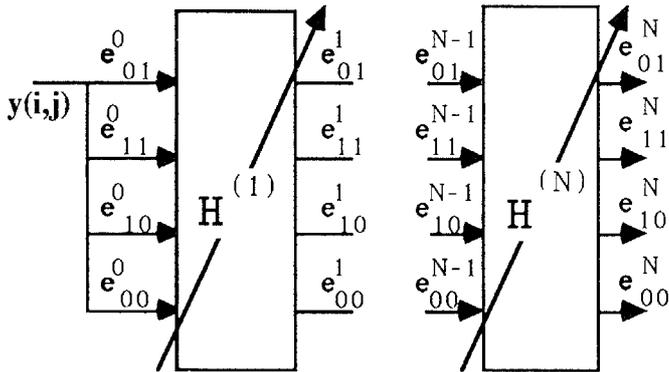


Fig. 1. Modèle en treillis 2-D

Les éléments de la matrice  $R$  et du vecteur  $\underline{P}$  dépendent entre autres, des termes d'inter et auto-corrélation des erreurs de prédiction. Dans le cas où ces quantités ne sont pas disponibles, une solution adaptative est proposée. Elle est fournie de manière récursive par l'algorithme du gradient stochastique suivant :

$$\underline{K}^{(n)}(i,j) = \underline{K}^{(n)}(i,j-1) - \Gamma^{(n)}(i,j) \nabla_{\underline{K}} Q^{(n)}(i,j) \quad (4)$$

$$\nabla_{\underline{K}} Q^{(n)}(i,j) = R^{(n-1)}(i,j) \underline{K}^{(n)}(i,j-1) - \underline{P}^{(n-1)}(i,j)$$

$R^{(n-1)}(i,j)$  et  $\underline{P}^{(n-1)}(i,j)$  sont respectivement, les réalisations à l'étage  $(n-1)$  et la position spatiale  $(i,j)$  de la matrice  $R$  et du vecteur  $\underline{P}$ .  $Q^{(n)}(i,j)$  est la réalisation du critère (3).  $\Gamma^{(n)}(i,j)$ , matrice diagonale à éléments positifs, est le pas de l'algorithme à l'étage  $(n)$ . Le cas où  $\Gamma$  est fixe correspond à l'algorithme TDAL-LMS (Two-Dimensional Adaptive Lattice LMS), dit à "gain constant", qui est une extension au cas 2-D de l'algorithme LMS en treillis 1-D. Les propriétés de convergence de cet algorithme sont établies dans [9].

### Algorithme Normalisé

Afin d'uniformiser le comportement asymptotique de l'algorithme pour les différents étages, c-à-d pour avoir la même constante de temps et la même erreur résiduelle à chaque étage, le pas de l'algorithme doit être normalisé par l'énergie des erreurs de prédiction correspondantes aux mêmes étages. On obtient alors l'algorithme adaptatif en treillis 2-D normalisé (TDAL-NLMS), décrit par la récursion suivante :

$$K^{(n)}(i,j) = K^{(n)}(i,j-1) - \frac{\Gamma^{(n)}}{\hat{Q}^{(n)}(i,j)} \nabla_{\underline{K}} Q^{(n)}(i,j) \quad (5)$$

où  $\Gamma^{(n)}$  est le pas normalisé de l'algorithme, et  $\hat{Q}^{(n)}(i,j)$  l'estimation de la puissance des erreurs de prédiction. Elle est calculée à partir de l'équation récursive suivante :

$$\hat{Q}^{(n)}(i,j) = (1-\eta) \hat{Q}^{(n)}(i,j-1) + Q^{(n)}(i,j) \quad (6)$$

où  $\eta$  est une constante positive inférieure à un et  $Q^{(n)}(i,j)$  représente la réalisation de  $Q^{(n)}$ . Les résultats de simulations numériques, [3], montrent que l'algorithme TDAL-NLMS présente de meilleures propriétés de convergence par rapport à l'algorithme TDAL-LMS. Ces avantages sont obtenus au prix d'un surplus de calcul.

### ESTIMATEUR JOINT EN TREILLIS 2-D ET ANNULEUR ADAPTATIF DE BRUIT (TDALNC)

D'une manière générale on parle de l'estimateur joint lorsque l'estimation d'un processus quelconque est basée sur l'observation d'un autre processus associé au premier. Comme dans le cas 1-D, les deux processus 2-D impliqués dans un schéma d'estimateur joint 2-D sont désignés par entrée primaire  $d(i,j)$  et entrée référence  $y(i,j)$ . Dans la forme treillis de l'estimateur joint 2-D, Fig. 2., l'entrée référence est reliée à la structure en treillis, les trois erreurs de prédiction rétrogrades de chaque étage sont multipliées par des coefficients de pondération. Ces coefficients définissent les paramètres du filtre joint dont la sortie sera retranchée de l'entrée primaire pour obtenir

l'erreur d'estimation d'ordre N.

### Equations du Filtre Joint

Soient  $\underline{e}_b^{(n)}(i,j)$ , le vecteur des erreurs de prédiction rétrogrades, et  $\underline{G}^{(n)}$  le vecteur des coefficients de pondération du filtre joint, à l'étage (n) :

$$\underline{e}_b^{(n)}(i,j) = [e_{10}^{(n)}(i,j), e_{11}^{(n)}(i,j), e_{01}^{(n)}(i,j)]^T$$

$$\underline{G}^{(n)} = [g_{10}^{(n)}, g_{11}^{(n)}, g_{01}^{(n)}]^T$$

L'erreur d'estimation peut être ajustée d'un étage à l'autre par la relation:

$$\varepsilon^{(n)}(i,j) = \varepsilon^{(n-1)}(i,j) - \underline{G}^{(n)T} \underline{e}_b^{(n)}(i,j) \quad (7)$$

$$\varepsilon^{(0)}(i,j) = d(i,j) - \underline{G}^{(0)T} \underline{e}_b^{(0)}(i,j)$$

Pour chaque étage, les coefficients du filtre joint seront calculés en minimisant l'erreur quadratique moyenne d'estimation:  $Q_e^{(n)}(i,j) = E\{\varepsilon^{(n)}(i,j)^2\}$ . Le vecteur  $\underline{G}$  peut être calculé en utilisant l'algorithme normalisé :

$$\underline{G}^{(n)}(i,j) = \underline{G}^{(n)}(i,j-1) - \frac{\Gamma^{(n)}}{\hat{Q}_{e_b}^{(n)}(i,j)} \nabla_{\underline{G}} Q_e^{(n)}(i,j)$$

$$\nabla_{\underline{G}} Q_e^{(n)}(i,j) = \varepsilon^{(n)}(i,j) \underline{e}_b^{(n)}(i,j) \quad (8)$$

$$\hat{Q}_{e_b}^{(n)}(i,j) = (1-\eta) \hat{Q}_{e_b}^{(n)}(i,j-1) + \underline{e}_b^{(n)}(i,j) T_{\underline{e}_b}^{(n)}(i,j)$$

où  $\hat{Q}_{e_b}^{(n)}(i,j)$  est l'estimation de la puissance de l'entrée du filtre joint, donc celle des erreurs de prédiction rétrogrades à l'étage (n).

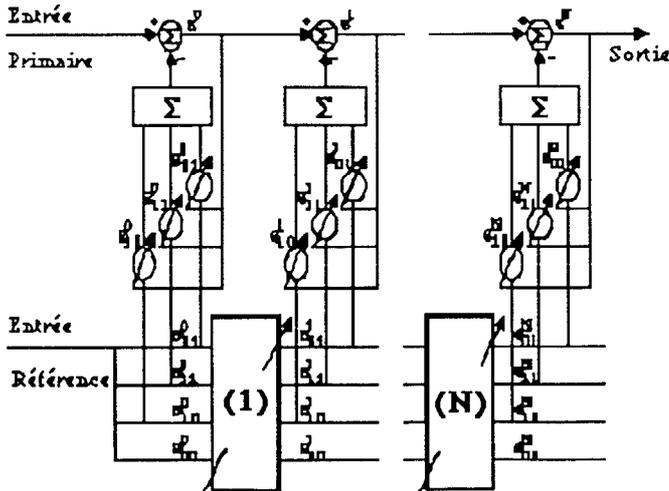


Fig. 2. Estimateur joint en treillis 2-D

### Annuleur Adaptatif de Bruit en Treillis 2-D (TDALNC)

L'annuleur adaptatif de bruit en treillis 2-D (TDALNC) correspond au schéma de la Fig. 2, avec les définitions données ci-après des processus d'entrée dans le cas de la restauration d'images. L'entrée primaire  $d(i,j) = s(i,j) + v(i,j)$  consiste en une image  $s(i,j)$  dégradée par un bruit additif  $v(i,j)$  supposé non corrélé avec  $s(i,j)$ . L'entrée référence  $y(i,j)$  est

constituée par un champ aléatoire supposé corrélé avec le bruit de dégradation  $v(i,j)$ , et dont le moyen de corrélation est inconnu. Le filtre joint 2-D engendre une estimation du bruit de dégradation  $v(i,j)$  qui sera soustrait de  $d(i,j)$  pour obtenir l'image restaurée à la sortie du système. Cette sortie est donnée par :

$$\hat{s}(i,j) = \hat{e}^N(i,j) = d(i,j) - \sum_{n=0}^N \hat{\underline{G}}^{(n)T} \underline{e}_b^{(n)}(i,j) \quad (9)$$

### APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES

Dans une première expérience, l'entrée primaire consiste en une image test de taille 256 x 256 pixels codée sur huit bits (256 niveaux de gris) et dégradée par un champ de bruit additif Gaussien de moyenne nulle et de variance finie. L'entrée référence est constituée par un champ de données aléatoires engendrées à partir du bruit de dégradation de l'entrée primaire et d'un modèle AR stable. Comme mesure de performance on utilisera le taux d'amélioration du rapport signal sur bruit (SNR) exprimé en (dB), défini par :

$$\eta_{MQE}(\text{dB}) = \text{SNR}_{(\text{sortie})} - \text{SNR}_{(\text{entrée})}$$

$$\text{SNR}_{(\text{dB})} = 10 \log_{10} \frac{\text{Variance de l'image originale}}{\text{Variance du bruit}}$$

Quelques résultats sur les performances de la restauration sont récapitulés dans le tableau 1, à partir duquel on voit que l'amélioration est de l'ordre de 12dB même pour des rapports signal sur bruit très faibles. Ces résultats sont meilleurs que ceux que donnent la plupart des méthodes de restauration récursives [4]. Un exemple est illustré sur la Fig. 3. Notons que dans ce cas, la modélisation est faite par un modèle en treillis 2-D à trois étages.

Tableau 1: Résultats de restauration d'images bruitées par l'algorithme TDALNC

SNR à l'entrée (dB)	12.	3.	0.	-7.5
SNR à la sortie (dB)	24.	15.	12.	3.8
Amélioration (dB)	12.	12.	12.	11.3

**Cas d'un bruit composé:** Dans ce cas le bruit de dégradation est composé d'un bruit Gaussien et d'un bruit spatialement périodique. Pour un rapport signal sur bruit à l'entrée de 0dB le taux d'amélioration est de l'ordre de 17dB. Ce résultat est illustré sur la Fig. 4. Par comparaison au cas précédent, on voit que l'annuleur adaptatif de bruit TDALNC réalise pour cette catégorie de dégradation un taux d'amélioration sensiblement plus élevé.

### CONCLUSION

Ce papier présente une classe d'algorithmes adaptatifs pour les modèles en treillis 2-D. Il comporte l'une des



premières formulations de l'algorithme LMS en treillis 2-D ainsi que sa version normalisée. Il introduit la notion de l'estimateur joint 2-D et sa mise en œuvre par les structures en treillis 2-D. Un annuleur adaptatif de bruit est ensuite obtenu comme réalisation de l'estimateur joint en treillis 2-D. Ce schéma a été utilisé pour la restauration adaptative d'images dégradées par un bruit additif, et s'est avéré particulièrement efficace pour ce type de traitement. La comparaison des résultats de cette méthode à ceux qui sont publiés dans la littérature et obtenus avec d'autres méthodes de restauration telles que le filtre de Kalman 2-D ou le filtre de Kalman avec nombre réduit d'itérations (RUKF), montre un avantage net en taux d'amélioration à valeurs égales du SNR à l'entrée. Par ailleurs, le volume de calcul de la méthode que nous proposons est beaucoup plus faible.

### REFERENCES

- [1] M. Hadhoud and D. Thomas, "The two-dimensional adaptive LMS (TDLMS) algorithm", *IEEE Trans. Circ. Syst.*, vol. CAS-35, pp. 485-494, May 1988.
- [2] M.L. Honig and D.G. Messerschmitt, *Adaptive Filters: Structures, Algorithms and Applications*, Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers, 1984.
- [3] M. Janati-I, "Modélisation des signaux 2-D et algorithmes adaptatifs en treillis - Applications en traitement d'images", Thèse d'Etat, Faculté des Sciences, Rabat, 1991.
- [4] H. Kaufman and A.M. Tekalp, "Survey of estimation techniques in image restoration", *IEEE Control Systems*, vol. 11, pp.16-24, Jan. 1991.
- [5] S.R. Parker and A.H. Kayran, "Lattice parameter autoregressive modeling of two-dimensional fields - part I: the quarter-plane case", *IEEE Trans. ASSP*, vol. ASSP-32, pp. 872-885, Aug. 1984.
- [6] A.M. Sequeira and C.W. Therrien, "A new 2-D fast RLS algorithm", *Proc. IEEE ICASSP*, Albuquerque, 1990, pp. 1401-1404.
- [7] B. Widrow and S.D. Stearn, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [8] L. Xiang, M. Najim and H. Youlal, "A new 2-D fast lattice RLS algorithm for restoration of images", accepté pour présentation au GRETSI 91.
- [9] H. Youlal, M. Janati-I. and M. Najim, "On 2-D adaptive gradient lattice algorithms", *Signal Processing III: Theories and Applications*, I.T. Young et al. Eds., Amsterdam: Elsevier North Holland, 1986, pp. 705-708.
- [10] H. Youlal, M. Janati-I. and M. Najim, "Convergence properties of 2-D adaptive gradient lattice algorithms", *APII-AFCET*, vol. 22, pp. 83-98, Jan. 1988.
- [11] H. Youlal, M. Janati-I. and M. Najim, "A two-dimensional adaptive lattice predictor for image compression", *Proc. Int. Conf. on Digital Signal Processing*, Florence, 1991. (à paraître)

Fig. 3. Expérience avec l'algorithme TDALNC (cas d'un bruit Gaussien)

(a) Image dégradée (SNR = 0 dB)
(b) Image restaurée (SNR = 12 dB)

Fig. 4. Expérience avec l'algorithme TDALNC (cas d'un bruit composé)

(a) Image dégradée (SNR = 0 dB)
(b) Image restaurée (SNR = 17 dB)

Fig. 5. Image originale



(Fig. 3.)

(Fig. 4.)

