



## OPÉRATEURS DE RÉGULARISATION EN RESTAURATION D'IMAGE : CALCULS ET COMPARAISONS

*J.M. Bruneau, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud*

LASSY / équipe de l'IS, URA 1376 du CNRS, Université de NICE-SOPHIA ANTIPOLIS,  
Bat. 4 S.P.I., 250 Ave Albert Einstein, Sophia Antipolis, 06560 VALBONNE (FRANCE)

### RÉSUMÉ

*Pour résoudre les problèmes mal-posés en restauration d'image, on fait essentiellement appel aux techniques de régularisation. L'application de la régularisation aux problèmes mal-posés nécessite le choix d'un paramètre et d'un opérateur de régularisation. Dans cet article nous nous intéressons plus particulièrement au choix de l'opérateur. L'opérateur algébrique le plus utilisé est le Laplacien 2D. Nous proposons de définir une famille d'opérateurs de régularisation basée sur des filtres utilisés en transformée en ondelettes bi-orthogonales en quincunx. Ces opérateurs permettent de s'adapter aux caractéristiques des données du problème. Les performances de ces opérateurs sont illustrées à travers un exemple de restauration d'une image de vue aérienne.*

### ABSTRACT

*A well-known method to solve ill-posed problems in image restoration is to use regularization techniques. The application of regularization to ill-posed problems requires the choice of a regularization parameter and a regularization operator. In this paper we focus on the choice of the operator. The most commonly used algebraic operator is the 2D Laplacian. The purpose of this paper is to propose a class of regularization operators based on those used in the quincunx biorthogonal wavelet transform. These operators allow to adjust to the specifications of data. Performances of these operators are illustrated through a restoration example of an aerial photography.*

### I. INTRODUCTION

Comme beaucoup de problèmes inverses rencontrés en physique, la restauration d'image appartient à la classe des problèmes inverses mal-posés. Ces problèmes n'ont pas pour toute observation une solution unique dépendant continûment des données. Alors que les problèmes d'existence et d'unicité de la solution peuvent être aisément résolus à l'aide des notions d'inverse et d'inverse généralisé, celui de l'instabilité de la solution due aux erreurs sur l'image observée reste entier.

L'utilisation de techniques de stabilisation de la solution est nécessaire. Les méthodes de la théorie de la régularisation sont particulièrement bien adaptées à ce type de problème (10,14). Le concept de régularisation en restauration d'image est très utilisé pour (4,6,9,12,15,16) ses aptitudes à prendre en compte l'information a priori. En effet, dans le but de stabiliser la solution, il est nécessaire d'introduire une information a priori sur cette solution. Cette information peut être soit stochastique (6,12,15) (distribution de probabilité, entropie, ...) soit déterministe (6,9,15) (positivité, douceur, ...).

Dans la suite de cet article nous nous intéresserons à une approche déterministe : la régularisation algébrique de la solution.

### II. REGULARISATION DE PROBLEMES MAL-POSES

La restauration d'une image dégradée par un système linéaire invariant par translation consiste (une fois

l'équation intégrale discrétisée) à résoudre le système suivant :

$$(2.1) \quad \underline{y} = H \underline{x} + \underline{n}$$

où  $\underline{y}$ ,  $\underline{x}$  et  $\underline{n}$  sont des vecteurs représentant respectivement l'image observée, l'objet et le bruit. Ceux-ci sont formés des valeurs des échantillons ordonnés dans l'ordre lexicographique. L'opérateur  $H$  est une matrice construite à partir d'un échantillonnage de la fonction de dégradation. Nous supposons par la suite que cette dernière est connue.

La régularisation au sens de Tikhonov-Miller est analogue à une technique de minimisation de type Moindre Carré Sous Contrainte (MCSC) (1,8,14). La contrainte est choisie de façon à restreindre la solution à un ensemble convexe représentant ici une forme d'information a priori sur l'image objet : "un degré de douceur".

L'idée principale pour obtenir une solution stable à partir de l'équation (2.1) est de modifier celle-ci. La solution régularisée peut alors être trouvée en minimisant par rapport à  $\underline{x}$  le Lagrangien suivant :

$$(2.2) \quad J(\underline{x}, \alpha) = \|\underline{y} - H \underline{x}\|^2 + \alpha \|\underline{G} \underline{x}\|^2$$

où  $\underline{G}$  un opérateur défini non-négatif de régularisation et  $\alpha$  un scalaire positif tel que  $\alpha \rightarrow 0$  lorsque  $\|\underline{n}\|^2 \rightarrow 0$ .

La minimisation du critère  $J(\underline{x}, \alpha)$ , donne la solution suivante (en supposant que  $(H^T H + \alpha G^T G)$  soit inversible) :

$$(2.3) \quad \hat{\underline{x}}_{(\alpha, G)} = (H^T H + \alpha G^T G)^{-1} H^T \underline{y}$$



La relation (2.3) montre comment l'équation initiale  $y = Hx + n$  a été modifiée pour donner une équation qui est un problème bien-posé.

L'observation de (2.3) montre aussi que, lorsque le multiplicateur de Lagrange  $\alpha$ , ou paramètre de régularisation, tend vers 0, le filtre de type MCSC tend vers un filtre pseudo-inverse  $(H^T H)^{-1} H^T$ . Dans ce cas précis, s'il y a du bruit sur l'image observée, la solution  $\hat{x}_{(\alpha, G)}$  devient instable à cause du mauvais conditionnement de  $H$  et, par là même, de celui de  $H^T H$ .

Pour un opérateur  $G$  fixé, le paramètre  $\alpha$  est choisi de telle façon que le "degré de douceur" sur la solution soit satisfait : celui-ci permet d'avoir un compromis entre précision et stabilité de la solution  $\hat{x}_{(\alpha, G)}$ .

Si l'on suppose que  $H$  et  $G$  ont une structure bloc-circulante à bloc-circulants, une diagonalisation de ces matrices par transformée de Fourier 2D (1), permet une représentation fréquentielle du filtre inverse.

Cette décomposition en valeurs propres donne une idée du rôle de l'opérateur de régularisation. On remarque ainsi que si  $H$  agit comme un filtre passe-bas,  $G$  doit alors se comporter comme un passe-haut.

Pour cette raison, parmi les opérateurs algébriques les plus couramment utilisés en restauration d'image (9,15) se trouve le Laplacien 2D.

L'opérateur de régularisation doit prendre en compte au mieux les informations dont on dispose sur les données (fonction de flou, image, ...).

Dans cette optique, nous avons généré à partir de filtres utilisés en transformée en ondelettes bi-orthogonales en quinconce, une famille d'opérateurs de régularisation dont le Laplacien 2D fait partie. Ces filtres sont associés à des fonctions d'ondelettes ayant des degrés de régularité différents.

### III. TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

Nous présentons ci-après les données nécessaires au calcul des différents filtres de la transformée en ondelettes bi-orthogonales.

Les bases d'ondelettes bi-orthogonales introduites par Cohen, Daubechies et Feauveau (5) permettent de représenter une fonction  $f$  de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  sous la forme d'une combinaison linéaire d'ondelettes  $\tilde{\psi}_n^j(x) = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - n)$  où  $j$  est un indice de résolution et  $n$  un indice de translation. On a alors :

$$(3.1) \quad f = \sum_{j,n} c_n^j(f) \tilde{\psi}_n^j \quad \text{avec} \quad c_n^j(f) = \langle f, \psi_n^j \rangle = \int f(x) \psi_n^{j*}(x) dx$$

où  $\psi_n^j$  est la base duale de  $\tilde{\psi}_n^j$ .

De façon à construire une analyse multirésolution (5,11), il est nécessaire d'introduire d'autres fonctions

$\phi_n^j(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - n)$  et leurs duales  $\tilde{\phi}_n^j$ , appelées fonctions d'échelle. Pour un indice de résolution  $j$  donné, la projection de  $f$  sur les  $\phi_n^j$  donne une approximation de la

fonction  $f$  à la résolution  $2^j$ . Les coefficients d'ondelettes  $c_n^j$  représentent l'information perdue entre l'approximation de  $f$  à la résolution  $2^{j+1}$  et celle à  $2^j$ .

Lorsque  $f$  est donnée sous forme d'échantillons  $\{x_n\}$  on prend ceux-ci comme une approximation de  $f$  à la résolution  $2^j$  soit  $\{x_n^j\}$ . L'analyse multirésolution s'exprime alors sous la forme d'un algorithme pyramidal de décomposition en sous-bandes :

$$(3.2) \quad x_n^{j+1} = \sum_k h_{2n-k} x_k^j \quad \text{et} \quad c_n^{j+1} = \sum_k g_{2n-k} x_k^j$$

où  $h$  est un filtre passe-bas et  $g$  un passe-haut. Il faut noter que le filtre  $h$  ne correspond pas au filtre de dégradation défini en (2.1).

La synthèse du signal est donnée par :

$$(3.3) \quad x_n^j = \sum_n [\tilde{h}_{2n-1} x_n^{j+1} + \tilde{g}_{2n-1} c_n^{j+1}]$$

La reconstruction est exacte si les relations suivantes entre les différents filtres sont vérifiées :

$$(3.4) \quad \tilde{g}_n = (-1)^n h_{-n+1} \quad \text{et} \quad g_n = (-1)^n \tilde{h}_{-n+1}$$

$$\sum_n h_n \tilde{h}_{n+2k} = \delta_{k,0}$$

A partir des conditions (3.4), si l'on veut calculer des filtres  $h$  et  $\tilde{h}$  qui soient symétriques (2,5), il faut résoudre l'équation polynômiale suivante :

$$(3.5) \quad H(\omega) \tilde{H}(\omega) + H(\omega+\pi) \tilde{H}(\omega+\pi) = 1$$

où  $H(\omega)$  et  $\tilde{H}(\omega)$  sont des polynômes trigonométriques.

De plus, des conditions de régularité sur  $\tilde{\psi}_n^j$  et  $\psi_n^j$

impliquent que  $H(\omega)$  et  $\tilde{H}(\omega)$  soient respectivement divisibles par  $(1+e^{j\omega})^k$  et  $(1+e^{j\omega})^{\tilde{k}}$ . Cela conduit à la classe de solutions (2,5) suivante :

$$(3.6) \quad H(\omega) \tilde{H}(\omega) = \cos(\omega/2)^{2l} \left[ \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1+p}{p} \sin(\omega/2)^{2p} + \sin(\omega/2)^{2l} \right] R(\omega)$$

où  $R(\omega)$  est un polynôme impair en  $\cos(\omega)$ .

Parmi les extensions de la transformée 1D au cas 2D une des plus usitées consiste à faire une transformée sous forme séparable (11). Cette transformée est dyadique car son facteur d'échelle d'une résolution à une autre est de 2.

Un autre type d'extension au cas 2D (3,7), utilisant des filtres non-séparables, décompose le signal avec un facteur d'échelle  $\sqrt{2}$ . Les filtres 1D définis en (3.6) peuvent être étendus au cas 2D non-séparable en appliquant la transformation suivante

$$(3.7) \quad \cos(\omega) \mapsto \frac{1}{2} [\cos(\omega_x) + \cos(\omega_y)]$$

aux polynômes définis en (3.6).

Cette transformation assure aux filtres 2D les mêmes propriétés que celles des filtres 1D (support, régularité, ...).



#### IV. CALCUL DES OPERATEURS

Le problème du choix de l'opérateur de régularisation  $G$  est ouvert. Un des choix les plus courants pour l'opérateur de régularisation  $G$  est celui de l'opérateur de dérivée seconde : le Laplacien 2D.

Nous proposons ici une famille d'opérateurs de régularisation qui sont susceptibles d'être une alternative au choix conventionnel du Laplacien.

Ces opérateurs sont calculés à partir de l'équation (3.6) qui permet le calcul des filtres correspondant à l'analyse multirésolution par transformée en ondelettes bi-orthogonales. Une des factorisations possibles du membre de droite de (3.6) conduit aux filtres suivants :

$$(4.1) \quad \tilde{H}_l(\omega) = \cos(\omega/2)^{2l} = ((1+\cos(\omega))/2)^l$$

Ce cas correspond à des "filtres splines" ou "binomiaux" car les fonctions d'échelle associées  $\tilde{\phi}_n^j$  sont

des B-splines et les coefficients des filtres  $\tilde{h}$  sont simplement les coefficients normalisés du binôme.

Nous proposons la famille de filtres suivante comme opérateurs de régularisation :

$$(4.2) \quad G_l(\omega) = \tilde{H}_l(\omega+\pi) \quad \text{si } l = 1, 2, \dots \\ = 1 - \tilde{H}_l(\omega) \quad \text{si } l = -1, -2, \dots$$

On remarquera que les filtres  $G_l$  pour  $l > 0$  correspondent (à un coefficient de normalisation près) à des différences finies centrées. Celles-ci correspondent à une approximation à l'ordre 2 des dérivées paires.

La figure (IV.1) représente  $G_l(\omega)$  pour  $l = -5, \dots, 5$ . On constate que  $G_{-1}$  et  $G_1$  sont confondus : c'est le cas de la dérivée seconde.

Le passage en deux dimensions se fait à l'aide de la relation (3.7). Pour  $l > 0$  on obtient (à une constante près) successivement les opérateurs bidimensionnels de dérivée paire. Notons que pour  $l = -1/1$  on obtient le Laplacien 2D.

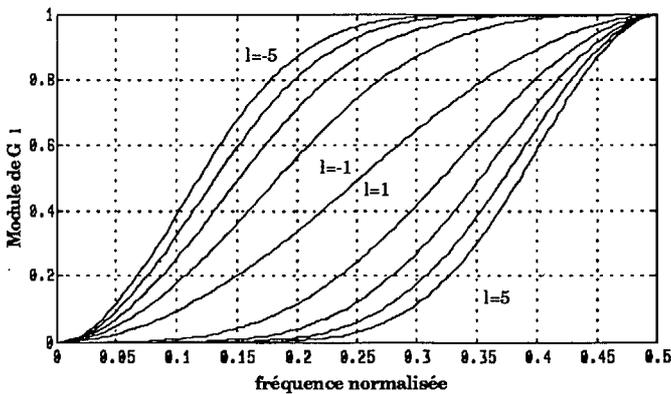


Figure (IV.1)

Pour une représentation en fréquence normalisée  $v$ , les propriétés aux limites de la famille  $G_l$  sont les suivantes :

$$(4.3) \quad \forall v \in ]0, \frac{1}{2}[ \quad \lim_{l \rightarrow -\infty} G_l(v) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} G_l(v) = 0 \\ \forall l \in \mathbb{Z} \quad G_l(0) = 0 \quad \text{et} \quad G_l(\frac{1}{2}) = 1$$

Lorsque  $l$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , l'intégrale de la densité spectrale sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  des opérateurs de régularisation  $G_l$ , varie de  $1^-$  à  $0^+$ . La contrainte sur la solution  $\underline{x}$  imposée dans le critère (2.2) par  $\|G_l \underline{x}\|^2$  évolue alors de  $\|\underline{x}\|^2$  par valeur négative à  $0^+$ . Les opérateurs de régularisation  $G_l$  permettent donc à la solution d'avoir des fréquences non nulles sur une plus ou moins grande partie de son spectre. On peut alors faire un ajustement de l'opérateur en fonction des DSP de l'image dégradée  $\underline{y}$  et de la fonction de flou  $H$ . Une illustration de cette propriété est donnée sur la figure (IV.2) avec  $l=4$  par rapport à  $l=-1/1$  (Laplacien).

La figure (IV.2) représente les modules  $\alpha$  la fonction de flou utilisée dans la partie expérimentale ainsi que ceux du Laplacien et de l'opérateur donnant le PSNR maximum.

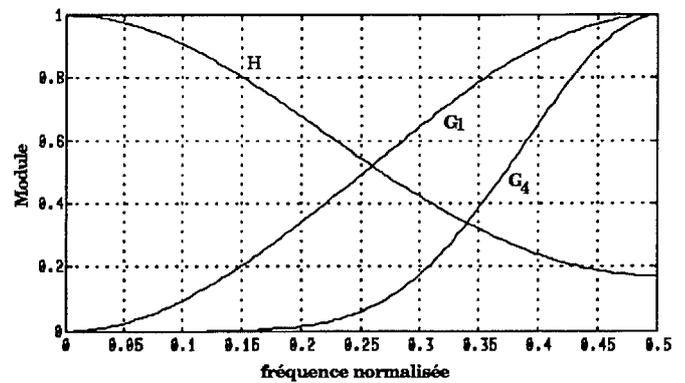


Figure (IV.2)

Pour un paramètre fixé  $\alpha$  non nul, lorsque  $l$  tend vers  $-\infty$  le filtre inverse (2.3) se rapproche d'un filtre inverse à norme minimale  $(H^T H + \alpha I)^{-1} H^T$ . D'autre part, si  $l$  tend vers  $+\infty$ , le filtre (2.3) se comporte comme un filtre pseudo-inverse  $(H^T H)^{-1} H^T$ .

#### V. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Pour illustrer les propriétés des opérateurs  $G_l$  nous présentons la restauration d'une image de vue aérienne d'une zone urbaine.

Cette image contient beaucoup de détails : son spectre aux fréquences moyennes est assez important. L'image est dégradée par convolution avec une Gaussienne de variance  $\frac{1}{2}$  ; du bruit blanc  $y$  est ajouté. Le rapport des variances du signal et du bruit (BSNR) est de 40 dB. Ce niveau correspond ici, à un peu plus que le bruit de quantification.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure (V.1). Cette courbe représente le Pic SNR maximum (obtenu pour un  $\alpha$  optimal expérimental) en fonction de  $l$ . Cette courbe est obtenue pour un extrait d'un quart de l'image d'origine. On constate qu'autour de  $l = -1/1$  la courbe est croissante avec un maximum pour  $l = 4$ . Pour  $||l||$  grand, la courbe tend vers les PSNR des deux solutions aux limites.

On peut justifier l'allure de cette courbe car l'image a beaucoup de détails et le rapport signal à bruit est relativement important. En effet pour  $l = 4$  l'opérateur de régularisation a un spectre négligeable pour les fréquences comprises entre 0 et 0.25 ce qui n'est pas le cas pour le



Laplacien (C.f. fig.(IV.2)). Par contre, dans cette bande de fréquence, le SNR est important et comme l'opérateur  $G_4$  est moins régularisant que  $G_1$  la restauration en est d'autant meilleure.

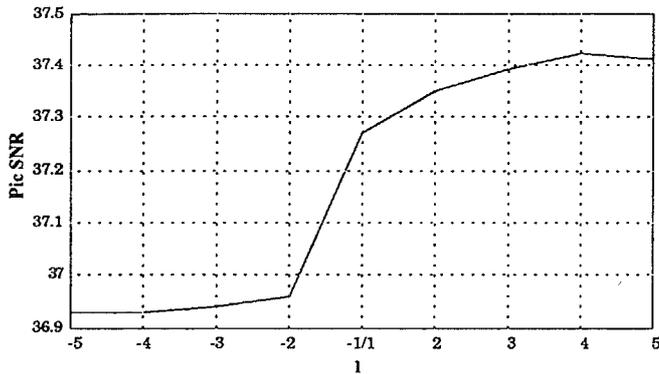


Figure (V.1)

L'image complète floue et bruitée ainsi que l'image restaurée sont présentées sur les Figures (V.2 et .3).

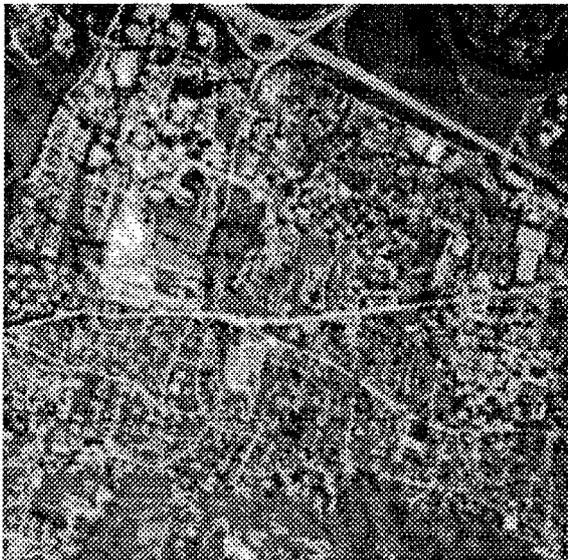


Image dégradée PSNR=20,6dB (BSNR=40dB)

Figure (V.2)



Image restaurée PSNR=36,9dB

Figure (V.3)

## VI. CONCLUSION

Dans cet article nous avons proposé une famille d'opérateurs de régularisation algébriques basés sur des filtres utilisés en transformée en ondelettes bi-orthogonales avec un facteur d'échelle  $\sqrt{2}$ . Ces opérateurs permettent de s'adapter aux caractéristiques des données du problème.

Nous avons montré, que connaissant *a priori* les caractéristiques du problème de restauration d'image à résoudre, il est intéressant d'orienter le choix de l'opérateur de régularisation vers l'un des opérateurs proposés plutôt que de faire celui, conventionnel, du Laplacien bidimensionnel.

## VII. REFERENCES

- (1) H. C. Andrews, B. R. Hunt, "Digital Image Restoration", Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (2) M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, "Image Coding Using Vector Quantization in the Wavelet Transform Domain" IEEE ICASSP 90, Albuquerque, USA, pp. 2297-2300.
- (3) M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, "Image Coding Using Lattice Vector Quantization of Wavelet Coefficients" IEEE ICASSP 91, Toronto, CANADA, pp. 2273-2276.
- (4) J.M. Bruneau, M. Barlaud, P. Mathieu, "Image Restoration using Biorthogonal Wavelet Transform", SPIE Vol. 1360, VC&IP 90, Lausanne, Suisse, pp. 1404-1415.
- (5) A. Cohen, I. Daubechies and J.C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets", AT&T Bell Laboratories, Technical Report, N° TM 11217-900529-07.
- (6) G. Demoment, "Image Reconstruction and Restoration: Overview of common estimation structures and problems", IEEE Trans. on ASSP, December 1990.
- (7) J.C. Feauveau "Analyse Multirésolution pour les Images avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$ ", Traitement du Signal, Vol. 7, N°2, pp. 117-128, 1990.
- (8) A. Jain, "Fundamentals of Digital Image Processing", Prentice-Hall Information and System Sciences Series, Thomas Kailath, Series Editor.
- (9) R. Legendijk, R. Mersereau and J. Biemond, "On Increasing the Convergence Rate of Regularized Iterative Image Restoration Algorithms", IEEE ICASSP 1987, pp. 1183-1186.
- (10) A. Lannes, M.J. Casanove and S. Roques, "Stabilized Reconstruction in Signal and Image Processing", Journal of Modern Optics, 1987, Vol. 34, N° 2, pp. 161-226, N°3, pp. 321-370.
- (11) S. Mallat "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans on Pattern Anal. and Mach. intel. Vol. 11 N°7, Jul 89.
- (12) A. Mohammad-Djafari, G. Demoment, "Utilisation de l'entropie dans les problèmes de restauration et de reconstruction d'image", TIPI Aussoi, Savoie 1988.
- (13) D. L. Phillips, "A technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind", J. Ass. Comput. Mach., Vol. 9, 1962.
- (14) W. K. Prat, "Digital Image Processing", A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Son, New York, Chichester, Brisbane, Toronto.
- (15) S. J. Reeves and R. M. Mersereau, "Optimal Estimation of the Regularization Parameter and Stabilizing Functional for Regularized Image Restoration", Optical Engineering, May 1990, Vol. 29 N°5, pp. 446-454.
- (16) M. Ibrahim Sezan and A. Murat Tekalp, "Tutorial Review of Recent Developments in Digital Image Restoration", SPIE Vol. 1360, VC&IP 90, Lausanne, Suisse, pp. 1346-1359.