

RESTAURATION D'IMAGES EN MULTIRÉSOLUTION

Jean-Luc STARCK - Albert BIJAOUÏ

Dpt A. Fresnel URA CNRS 1361  
O.C.A. B.P. 139 F-06003 NICE CEDEX

RÉSUMÉ

**Résumé.** La transformée en ondelettes est un outil qui nous permet d'obtenir de l'information à la fois en temps et en fréquence. Avec une ondelette isotrope et un algorithme basé sur la FFT, on obtient une description pyramidale des images. En introduisant le concept de hiérarchie de structure, nous avons développé de nouvelles techniques de filtrage. Des méthodes itératives classiques de déconvolution ont été appliquées sur les plans d'ondelettes après filtrage, conduisant à une amélioration de la résolution.

1. TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

La transformée en ondelette d'une fonction  $f(x)$  is [1]:

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx$$

où  $a (> 0)$  est paramètre de dilatation et  $b$  est un paramètre de translation. L'analyse en multirésolution [4] est caractérisée par une fonction d'interpolation  $\phi(x)$  souvent appelée fonction d'échelle. Le passage d'une résolution à une autre se fait à partir des filtres discrets  $h(n)$  et  $g(n)$  de transformée de Fourier 1-périodique et tels que:

$$\hat{h}(\nu) = \frac{\hat{\phi}(2\nu)}{\hat{\phi}(\nu)}$$

$$\hat{g}(\nu) = \frac{\hat{\psi}(2\nu)}{\hat{\phi}(\nu)}$$

Le filtre  $h$  permet de déterminer la fonction à une résolution inférieure tandis que le filtre  $g$  sert à calculer l'information perdue entre deux résolutions. Si la fonction  $\hat{\phi}(\nu)$  a une fréquence de coupure, on peut réduire le nombre d'échantillons entre deux résolutions d'un facteur deux, par réduction de la bande de fréquence. Pour la suite, on se placera dans ce contexte.

2. RECONSTRUCTION

Si  $f^{(j+1)}(x)$  est la fonction  $f(x)$  à la résolution  $j + 1$  ( $j < 0$ ), alors la transformée de Fourier de la fonction  $f(x)$  à la résolution  $j$  est:

$$\hat{f}^{(j)}(\nu) = \hat{f}^{(j+1)}(\nu) \hat{h}^*(2^{-j}\nu)$$

et les coefficients d'ondelettes dans l'espace fréquentielle sont:

$$\hat{C}^{(j)}(\nu) = \hat{f}^{(j+1)}(\nu) \hat{g}^*(2^{-j}\nu)$$

La restauration se fait par:

$$\hat{f}^{(j+1)}(\nu) = \hat{f}^{(j)}(\nu) \hat{h}(2^{-(j+1)}\nu) + \hat{C}^{(j)}(\nu) \hat{g}(2^{-(j+1)}\nu)$$

elle n'est exacte que si:

$$\hat{h}^*(\nu) \hat{h}(\nu) + \hat{g}^*(\nu) \hat{g}(\nu) = 1$$

Le calcul par les moindres carrés donnent:

$$\hat{h}(\nu) = \frac{\hat{h}(\nu)}{|\hat{h}(\nu)|^2 + |\hat{g}(\nu)|^2}$$

$$\hat{g}(\nu) = \frac{\hat{g}(\nu)}{|\hat{h}(\nu)|^2 + |\hat{g}(\nu)|^2}$$

On peut réduire le dénominateur et simplifier les filtres conjugués en prenant:

$$\hat{g}(\nu) = \sqrt{1 - |\hat{h}(\nu)|^2}$$

ABSTRACT

**Abstract.** The Wavelet Transform is a tool which allows us to get information both in time and frequency. With an isotropic wavelet and an algorithm based on the FFT, we get a pyramidal description of the pictures. From the concept of the hierarchical structure, we achieved some filtering methods. After filtering, classical iterative deconvolution techniques were applied on the wavelets plans in order to increase the resolution.

3. FILTRAGE

Le filtre de Wiener [5] repose sur l'hypothèse que le bruit et le signal sont des processus stationnaires gaussiens indépendants. Le filtre s'écrit:

$$\hat{W}(\nu) = \frac{\hat{\sigma}_s^2(\nu)}{\hat{\sigma}_s^2(\nu) + \hat{\sigma}_b^2(\nu)}$$

où  $\sigma_s$  et  $\sigma_b$  sont les écarts types du signal et du bruit. En calculant ce filtre en chaque plan d'ondelettes, on construit un filtre de Wiener en multirésolution. Les données sont lissées sans que l'on tienne compte localement du signal.

Les coefficients d'ondelettes sont statistiquement significatifs si:

$$|C^{(i)}(x)| > k\sigma_b(i)$$

On peut ne restaurer la fonction qu'à partir de ces coefficients significatifs. Afin que la transformée en ondelettes de la fonction reconstruite donne les mêmes coefficients dans les domaines significatifs, on utilise la redondance de l'information dans un algorithme itératif. La contrainte de positivité peut être introduite dans ce processus itératif.

Il est possible d'utiliser la corrélation entre deux plans d'ondelettes due à la hiérarchie des structures. En effet, si on trouve de l'information à une résolution à une position donnée, la probabilité de trouver de l'information à une autre échelle à la même position est importante. On admet que l'on a une distribution gaussienne d'écart type  $\sigma_i(i)$  entre les coefficients d'ondelettes de deux résolutions. Si  $x_1$  est le coefficient à l'échelle  $i$  et  $x_2$  l'estimation de ce coefficient à partir de l'échelle précédente, on obtient en utilisant le théorème de Baye la valeur filtrée  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_b^2 + \sigma_i^2 + \sigma_q^2} x_1 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_i^2 + \sigma_q^2} x_2$$

avec:

$$\sigma_q = \frac{\sigma_i \sigma_b}{\sigma_s}$$

S'il existe une hiérarchie de structure,  $\sigma_i$  est petit et  $y_1$  tend vers  $x_1$ . En changeant à chaque échelle toutes les coefficients mesurés  $x_1$  par les valeurs estimées  $y_1$ , on obtient un filtre de Wiener Hiérarchique. L'algorithme n'est pas itératif, conduisant à des calculs rapides, et les résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec les méthodes décrites auparavant.

L'estimation précédente s'écrit:

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes dépendant des caractéristiques de l'image. On peut adapter à chaque échelle le filtre localement en faisant varier  $a$  et  $b$  en fonction du coefficient d'ondelette  $x_1$ . Par de simples lois linéaires ( $a(x_1) = \frac{|x_1|}{|x_{1max}|}$  et  $b(x_1) = 1 - a(x_1)$ ), nous avons pu améliorer les résultats. En choisissant des lois tenant compte de la statistique du bruit, il doit être possible d'affiner encore le filtrage. C'est cette voie que nous explorons actuellement.

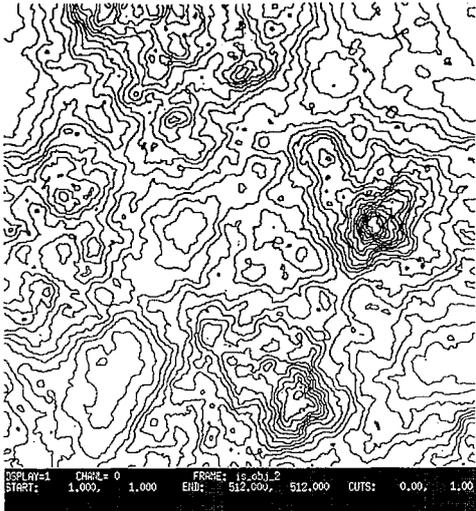


Figure 1: L'objet simulé

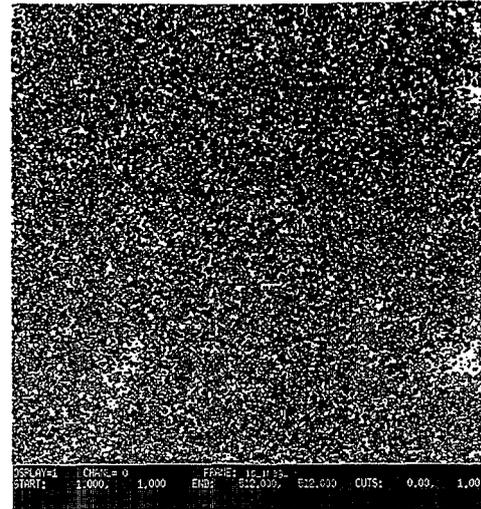


Figure 2: L'image simulée. Le rapport signal sur bruit est de 4

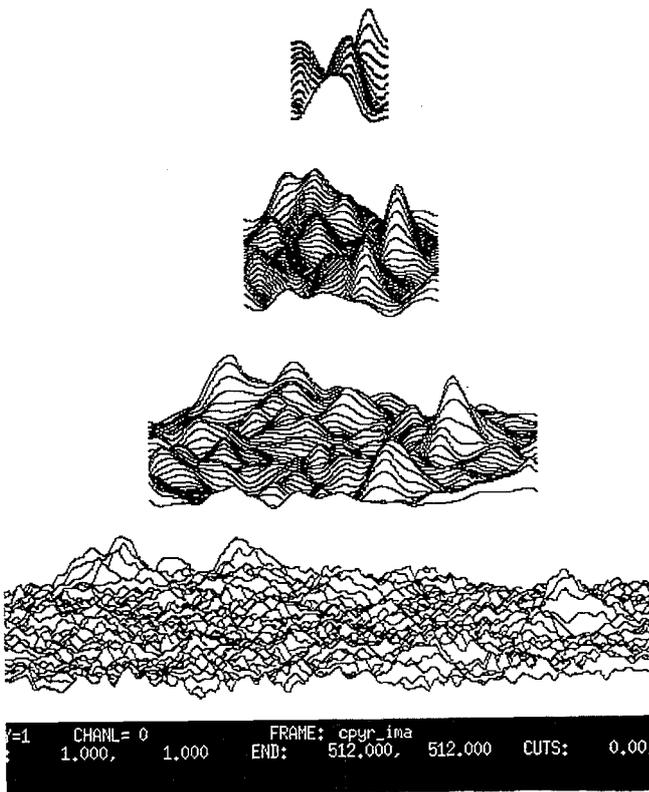


Figure 3: Transformée en ondelettes de l'image bruitée

Sur la figure 1, on peut voir un objet généré par un algorithme hiérarchique aléatoire. Un bruit est ajouté de telle sorte que l'on ait un rapport signal sur bruit de 4 (figure 2). Sur la figure 3, la transformée en ondelettes est représentée (trois plans d'ondelettes et le plan de l'image à basse résolution).

En comparant l'image obtenue avec le filtre de Wiener Hiérarchique (figure 5) à l'originale (figure 4), on voit que les différences sont très faibles.

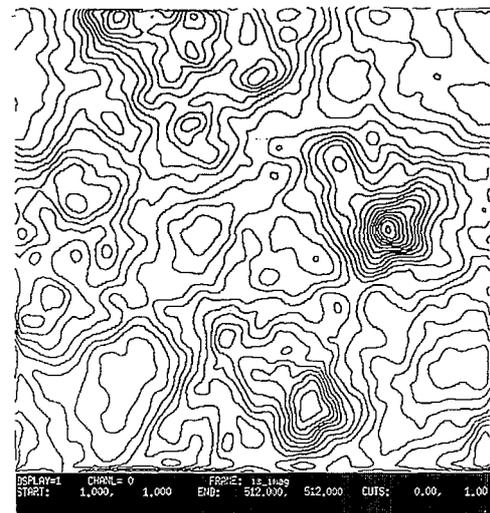


Figure 4: Image sans bruit

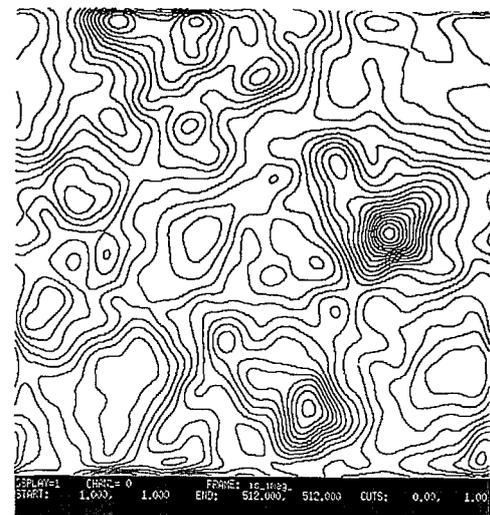


Figure 5: Image filtrée par le filtre de Wiener Hiérarchique

#### 4. DECONVOLUTION

La relation objet-image est donné par la relation:

$$I(x) = P(x) * O(x) + N(x)$$

Après avoir réduit le bruit, on peut utiliser des techniques classiques de déconvolution telles que celle de Van Cittert [2] ou celle de Landweber [3]. Dans l'espace de Fourier, l'algorithme de Van Cittert donne:

$$\hat{O}^{(n)}(\nu) = \hat{O}^{(n-1)}(\nu) + \hat{I}(\nu) - \hat{P}(\nu)\hat{O}^{(n-1)}(\nu)$$

avec:

$$\hat{O}^{(0)}(\nu) = \hat{I}(\nu)$$

La contrainte de positivité peut être introduite dans l'algorithme. La méthode de Landweber est semblable à celle de Van Cittert, mais est plus robuste. Elle s'écrit:

$$O^{(n)}(x) = O^{(n-1)}(x) + \beta P_s(x) * [I(x) - P(x) * O^{(n-1)}(x)]$$

où

$$P_s(x) = \hat{P}(-x)$$

Dans l'espace de Fourier:

$$\hat{O}^{(n)}(\nu) = \hat{O}^{(n-1)}(\nu) + \beta \hat{P}_s(\nu) [\hat{I}(\nu) - \hat{P}(\nu)\hat{O}^{(n-1)}(\nu)]$$

En prenant pour fonction d'interpolation la réponse impulsionnelle ( $\phi(x) = P(x)$ ), il est possible d'effectuer une déconvolution directement à partir des  $(n-1)$  plans d'ondelettes et du plan de plus basse résolution. Si on a réduit le bruit, on peut alors écrire:

$$\hat{I}(\nu) = \hat{\phi}(\nu)\hat{O}(\nu)$$

L' image  $I$  à la résolution  $n$  est:

$$\hat{I}^{(-n)}(\nu) = \hat{O}(\nu)\hat{\phi}(2^n\nu)$$

et les coefficients d'ondelettes sont:

$$\hat{C}^{(-n)}(\nu) = \hat{O}(\nu)\hat{\psi}(2^n\nu)$$

Toute l'information est contenue dans les plans  $I^{(-n)}$ ,  $C^{(-1)}$ , ...,  $C^{(-n)}$ . Une estimation par les moindres carrés donnent:

$$\hat{\phi}^2(2^n\nu)\hat{O}(\nu) = \hat{\phi}(2^n\nu)\hat{I}^{(-n)}(\nu)$$

et pour chaque plan  $i$ :

$$\hat{\psi}^2(2^i\nu)\hat{O}(\nu) = \hat{\psi}(2^i\nu)\hat{C}^{(-n)}(\nu)$$

En sommant toutes ces équations, on obtient:

$$\hat{D}(\nu)\hat{O}(\nu) = \hat{N}(\nu)$$

où:

$$\hat{N}(\nu) = \sum_i \hat{C}^{(-i)}(\nu)\hat{\psi}(2^i\nu) + \hat{I}^{(-n)}(\nu)\hat{\phi}(2^n\nu)$$

et:

$$\hat{D}(\nu) = \sum_i \hat{\psi}^2(2^i\nu) + \hat{\phi}^2(2^{n-1}\nu)$$

C'est un problème inverse qui peut être résolu par la méthode de Van Cittert ou celle de Landweber. On peut voir sur la figure 6, l'objet déconvolué.

#### 5. REFERENCES

- [1] A. Grossmann and J. Morlet, "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 15, pp 723-736, 1984.
- [2] A. K. Katsaggelos, "Iterative image restoration algorithms," *Opt. En.* Vol. 28 No. 7 Jul 89.
- [3] L. Landweber, "An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind," *Am. J. Math.* (1951), Vol. 73, pp 615-624
- [4] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans on Pattern Anal. and Math. intel.* Vol. 11 N 7, Jul 89.
- [5] Papoulis, "Probability, random Variables, and Stochastic Processes"

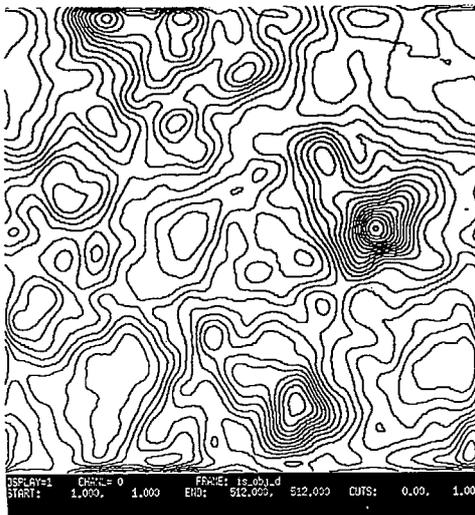


Figure 6 Objet déconvolué

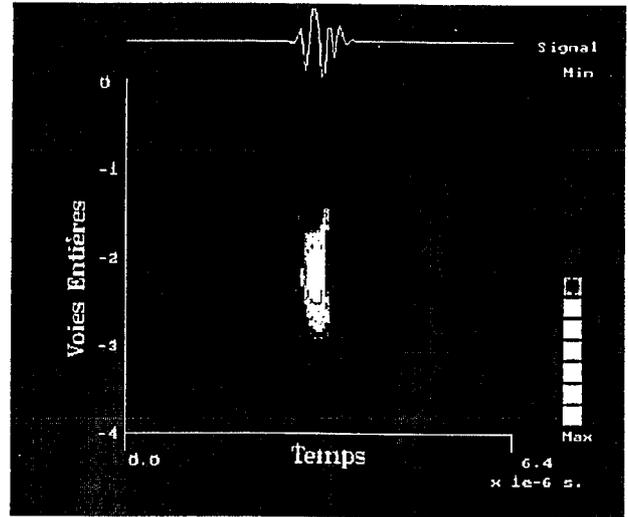
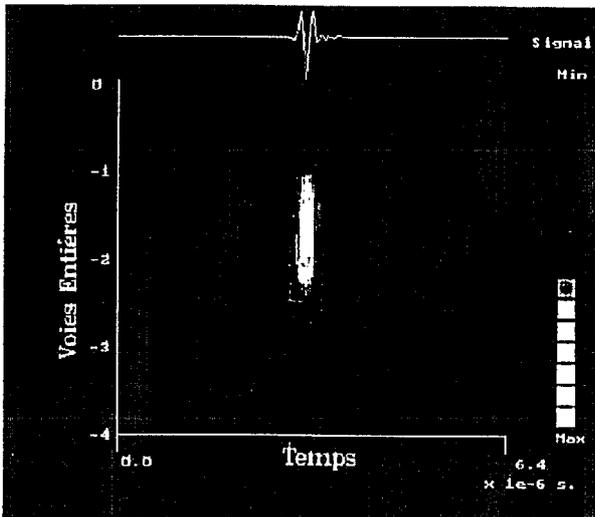
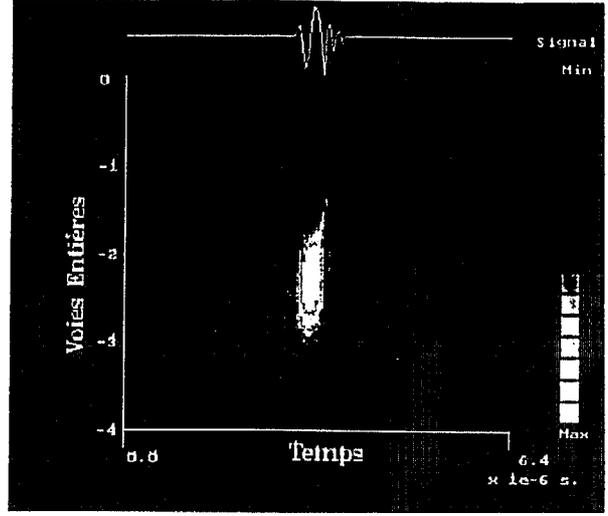
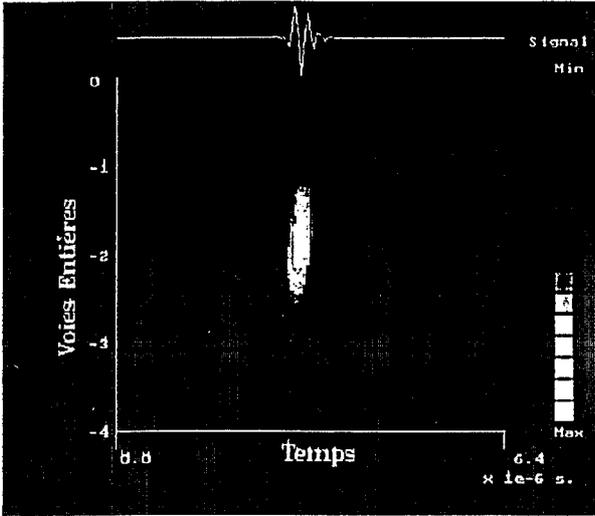


Figure 1. Echogramme de fissure et son analyse en ondelettes en haut: expérience en bas: modélisation

Figure 2. Echogramme d'interface fissuré et son analyse en ondelettes en haut: expérience en bas: modélisation

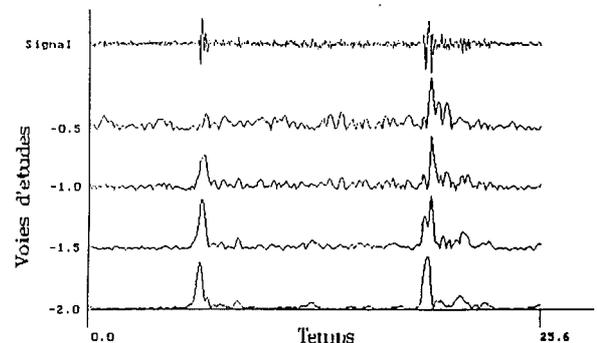
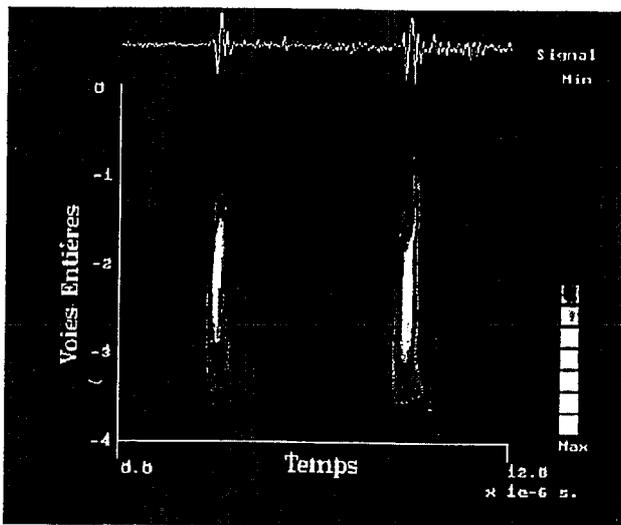


Figure 4. Détection de fissure par analyse en ondelettes  $\times 10^{-6}$  s. (analyse discrète) à gauche: interface sain à droite: interface fissuré (sur la voie -1/2 le premier signal a disparu et le second non; sur la voie -3/2 le second est dédoublé et le premier non)

Figure 3. Détection de fissure par analyse en ondelettes (analyse pseudo-continue) à gauche: interface sain à droite: interface fissuré (on remarque la fourche, caractéristique de l'interface fissuré)