



GENERALISATION DU FILTRAGE DE KALMAN AU CAS DE LA LOCALISATION DE SOURCES MOBILES PAR UNE METHODE HAUTE RESOLUTION

H.Clergeot\*, O.Michel\*†

\* L.E.S.I.R  
ENS Cachan, 61 av. du Psdt. Wilson  
94230 Cachan, France

† Laboratoire de Physique  
ENS Lyon, 46 allée d'Italie  
69364 Lyon Cedex 07, France

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Cet article vient prolonger l'étude présentée dans [4] sur la poursuite de sources mobiles par une antenne linéaire. Une nouvelle formulation du filtrage de Kalman, en terme de fonctions de densité de probabilité, permet d'établir les liens existant entre l'algorithme de poursuite proposé et le filtre de Kalman généralisé, dans le cas où les paramètres cherchés ont une distribution "quasi-gaussienne". Nous montrons l'équivalence entre l'existence d'une équation d'observation explicite linéaire dans le filtre de Kalman d'une part, et la forme quadratique exacte prise par la fonction de Log-vraisemblance des observations d'autre part. La linéarisation de l'équation d'observation dans le filtre de Kalman généralisé se traduit ici par une troncature du développement de Taylor de la fonction de Log-Vraisemblance au second ordre. L'intérêt et les performances de l'algorithme final proposé sont présentés à travers des résultats de simulations.

This paper extends a previous study which was presented in [4]. In that last paper, we proposed a Kalman-like algorithm for multiple sources tracking with a linear array. A new interpretation of the Kalman filter in terms of relations between the probability density functions is proposed in the case where the state vector has a "quasi-gaussian" distribution. The equivalency between the linear approximation of the observation equation in extended Kalman filtering and a second order expansion of the Log-likelihood function of the observation, is shown. The problem of multiple source tracking is then revisited and a new interpretation of the algorithm presented in [4] is proposed. The performances and the interest of these results are presented through simulation results.

De très nombreuses études ont porté sur le problème de localisation de sources (localisation sera ici entendu dans le sens détection d'azimut), par une antenne multi-capteurs, ce problème ayant des implications importantes dans des domaines aussi variés que la géophysique, l'acoustique sous-marine ou aérienne, les télécommunications, etc... Généralement, ce problème est abordé dans l'hypothèse où les sources à localiser demeurent à des positions fixes pendant la durée de l'observation. L'exploitation ou l'extension des solutions proposées au cas de sources mobiles est en général délicate. L'utilisation de méthode de maximum de vraisemblance approché (MVA), récemment présentée par H.Clergeot et S.Tressens [1] permet cependant une implémentation simple, récursive dans le temps, d'un algorithme de localisation.

Après avoir reformulé l'expression du filtre de Kalman [2] en terme de fonctions de densité de probabilité (fdp) conditionnelle (fdpc) des différentes grandeurs utilisées, et discuté la forme prise par le filtre de Kalman généralisé, nous présentons dans une deuxième partie l'application de ce filtre au problème de localisation de sources mobiles en traitement d'antenne. La solution proposée s'appuie largement sur la méthode de localisation MVA. Les résultats de simulations obtenus avec l'algorithme de poursuite proposé sont proposés et discutés dans la dernière partie.

**I. Estimation récursive du vecteur  $\Theta$  des positions. Cadre général.**

Dans la suite de l'article, nous supposons toujours que le nombre M de sources à localiser est parfaitement connu. L'ensemble des M positions  $\Theta_i$  cherchées est noté sous la forme du vecteur  $\Theta$ . Soit  $\underline{X}(t)$  le vecteur des observations sur l'antenne à l'instant t. La connaissance du modèle de l'antenne et des propriétés statistiques des perturbations sur  $\underline{X}$  est résumé dans la loi de probabilité de  $\underline{X}$  sachant  $\Theta$ , soit  $p_t(\underline{X}/\Theta)$ , qui sera précisée ultérieurement.

Si l'on introduit des hypothèses sur la loi d'évolution de  $\Theta$ , le problème s'intègre dans un cadre de type Markovien, où  $\Theta$  joue le rôle du vecteur d'état. Ceci nous permettra d'obtenir une solution récursive au problème de localisation.

**Reformulation du modèle Markovien.**

L'hypothèse fondamentale est que l'observation  $\underline{X}(t)$  à l'instant t ne dépend du passé que par la valeur d'un "vecteur d'état"  $\Theta$ .

Au lieu de chercher à décrire cette dépendance sous forme d'une "équation d'observation" explicite, d'une façon très générale, elle peut être décrite par la fdpc  $p_t(\underline{X}/\Theta)$ .

Le deuxième élément pour obtenir une estimation récursive est la connaissance d'une loi d'évolution de  $\Theta(t)$ . Ici encore, au lieu d'une "équation d'évolution" explicite de  $\Theta$ , nous supposons connue la loi d'évolution de la fdp de  $\Theta$  entre deux observations :

$$(1) \quad p_{t/t-1}(\Theta) = F_t(p_{t-1}(\Theta))$$

où

$$(2) \quad p_{t/t-1}(\Theta) = p_t(\Theta / \underline{X}(t-1), \underline{X}(t-2), \dots, \underline{X}(t=0))$$

$$p_{t-1}(\Theta) = p_{t-1/t-1}(\Theta)$$

Le modèle linéaire de Kalman correspond au cas où les densités de probabilités sont gaussiennes. Ce modèle est décrit par le système :

$$(3) \quad \begin{cases} \Theta(t+1) = M(t) \cdot \Theta(t) + \underline{u}(t+1) + \underline{\epsilon}(t+1) & (1) \\ \underline{X}(t+1) = G^+ \cdot \Theta(t+1) + \underline{B}(t+1) & (2) \end{cases}$$

où  $\underline{\epsilon}(t)$  est le bruit de modèle et  $\underline{u}(t)$  une entrée connue.  $\underline{B}$  est un vecteur de bruit d'observation, additif, blanc, circulaire gaussien, de matrice de covariance  $\Gamma_B$ .

La première équation n'exprime rien d'autre que le fait que  $p_{t/t}(\Theta) = \mathcal{N}(\hat{\Theta}_{t/t}, \Gamma_t)$  entraîne  $p_{t+1/t}(\Theta) = \mathcal{N}(\hat{\Theta}_{t+1/t}, \Gamma_{t+1/t})$  avec :

$$(4) \quad \begin{cases} \hat{\Theta}_{t+1/t} = M(t) \cdot \hat{\Theta}_{t/t} + \underline{u}(t+1) \\ \Gamma_{t+1/t} = \Gamma_t + R_{\epsilon}(t+1) \end{cases}$$

La deuxième équation de (3) équivaut à la donnée de  $p_t(\underline{X}/\Theta)$  sous la forme de la loi normale :

$$(5) \quad p_t(\underline{X}/\Theta) = \mathcal{N}(G^+ \cdot \Theta, G^+ \cdot \Gamma_{\Theta} \cdot G + \Gamma_B)$$



### Estimation récurrente de l'état.

L'idée fondamentale est de chercher une récursion non pas sur  $\Theta$  mais sur sa fdp  $p_{t/t}(\Theta)$ .

Pour la prédiction (ou le filtrage) de  $t$  à  $t+1$ , le modèle d'évolution tel qu'il est reformulé décrit directement l'évolution de la fdp. Pour la partie mise à jour, elle se fait par application de la règle de Bayes sur les probabilités conditionnelles :

$$(5) \quad \text{proba. a posteriori} = \frac{\text{proba. a priori} \cdot \text{proba. conditionnelle}}{\text{proba. de l'observation}}$$

Appliquée aux fdp précédemment définies, cette règle conduit à l'équation :

$$(6) \quad p_t(\Theta) = \frac{p_{t/t-1}(\Theta) \cdot p_t(\mathbf{X}(t)/\Theta)}{p_t(\mathbf{X}(t))}$$

(Il est important de noter que dans cette expression, la quantité  $p_t(\mathbf{X}(t))$  n'intervient que comme un facteur de normalisation).

Dans le cas où les densités de probabilité sont gaussiennes, elles sont caractérisées par leur moyenne et leur variance : la récurrence sur les fdp se ramène donc à une récurrence sur ces deux quantités. On retrouve alors les équations de Kalman classique.

En vue de notre problème nous nous intéresserons au cas de fdp "quasi-gaussienne" pour lequel on retrouvera également une récurrence sur la valeur moyenne et la variance, généralisation des équations de Kalman.

#### 1<sup>er</sup> cas : fdp gaussiennes.

On suppose dans ce cas que la fdp de  $\Theta$  à la date  $t$ ,  $p_t(\Theta)$ , est une fonction de densité de probabilité gaussienne  $\mathcal{N}(\hat{\Theta}(t), \Gamma_t)$ . L'application aux Log-probabilités de la règle de Bayes exprimée dans (6) conduit à :

$$(7) \quad Lp_t(\Theta) = Lp_{t/t-1}(\Theta) + Lp_t(\mathbf{X}/\Theta) + \text{cste.}$$

D'autre part, l'équation d'évolution linéaire dans (4) permet de montrer que la fdp a priori,  $p_{t/t-1}(\Theta)$  est une loi normale :

$$(8) \quad p_{t/t-1}(\Theta) = \mathcal{N}(M(t), \Theta(t), M(t)^\dagger \cdot \Gamma_t \cdot M(t)).$$

En utilisant cette expression de  $p_{t/t-1}(\Theta)$ , ainsi que la valeur de la covariance de la fdp de  $p_t(\mathbf{X}/\Theta)$  (équ.(5)), dans l'équation (7), il vient, en omettant la constante additionnelle :

$$(9) \quad Lp_{t+1}(\Theta) = -\frac{1}{2}(\Theta - M \cdot \hat{\Theta})^\dagger \cdot (M^\dagger \cdot \Gamma_t \cdot M + R_E)^{-1} \cdot (\Theta - M \cdot \hat{\Theta}) \\ - \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{X} - G \cdot \Theta)^\dagger \cdot F \cdot (\mathbf{X} - G \cdot \Theta)$$

$M$  et  $\hat{\Theta}$  sont les valeurs de  $M(t)$  et  $\hat{\Theta}(t)$  à la date  $t$ , et

$$(10) \quad F^{-1} = G^\dagger \cdot \Gamma_\theta \cdot G + \Gamma_B$$

$Lp_{t+1}(\Theta)$  est donc une forme quadratique exacte en  $\Theta$  : La fdp de  $\Theta$  à la date  $t+1$  est une loi normale dont la matrice de covariance est calculée d'après l'équation (9) :

$$(11) \quad \Gamma_{t+1}^{-1} = F + \Gamma_{t+1/t}^{-1}$$

$F$  est aussi la valeur du hessien de la fonction  $Lp_t(\mathbf{X}/\Theta)$  de la variable  $\Theta$ .  $Lp_t(\mathbf{X}/\Theta)$  étant quadratique exactement en  $\Theta$ , la valeur de  $F$  est indépendante de la valeur de  $\Theta$  en laquelle elle est calculée.

Les équations (10) et (11) constituent respectivement les équations de prédiction et de remise à jour du filtre de Kalman.

La valeur "filtrée"  $\hat{\Theta}(t+1/t+1)$  de  $\Theta$  peut être calculée directement d'après (9). Cependant, le gradient de la Log-fdp résultante (eq. (9)) calculé en  $\hat{\Theta}(t+1/t)$  est égal au gradient ( $\text{grad}$ ) en ce point de la fonction  $Lp_t(\mathbf{X}/\Theta)$ ; La Log-fdp résultante étant quadratique,  $\hat{\Theta}(t+1)$  peut être directement calculée par :

$$(12) \quad \hat{\Theta}(t+1/t+1) = \hat{\Theta}(t+1/t) - F^{-1} \cdot \text{grad.}$$

#### 2<sup>ème</sup> cas : fdp "quasi-gaussienne".

On s'intéresse cette fois au cas où la fdp  $p_t(\Theta)$  n'est que "quasi-gaussienne" : la Log-fdp  $Lp_t(\Theta)$  n'est pas quadratique exactement. Nous ferons cependant l'hypothèse que  $Lp_t(\Theta)$  est convenablement approximée par un développement limité au deuxième ordre en  $(\Theta - \hat{\Theta}(t))$  autour de  $\hat{\Theta}(t)$ .

La généralisation classique du filtrage de Kalman s'exprime par la linéarisation de l'équation d'observation autour de la valeur courante du vecteur d'état. La généralisation proposée ici consiste, dans le cas où  $Lp_t(\Theta)$  n'est qu'approximativement gaussienne, en l'utilisation d'un développement limité au second ordre de l'équation d'observation décrite par la Log-fdp  $Lp_t(\mathbf{X}/\Theta)$ .

Dans l'hypothèse où la validité de ce développement s'étend sur un intervalle incluant  $[\hat{\Theta}(t+1/t), \hat{\Theta}(t+1)]$ , l'identification des termes de second ordre des Log-fdp dans l'équation (7) permet de calculer la matrice de covariance de la distribution  $p_{t+1}(\Theta)$  "quasi-gaussienne" attendue :

$$(13) \quad \Gamma_{t+1}^{-1} = H + \Gamma_{t+1/t}^{-1}$$

$F$  étant le hessien de la fonction  $Lp_t(\mathbf{X}/\Theta)$ , calculé en  $\hat{\Theta}(t+1/t)$ .

Dans l'approximation quadratique proposée, la valeur filtrée de l'estimation du vecteur d'état à la date  $t+1$  est obtenue par (12), en remplaçant  $F$  par  $H$ .

Il est important de noter que, comme dans le filtrage de Kalman généralisé, les erreurs introduites par la linéarisation de l'équation d'observation manifestée ici par le développement au deuxième ordre de  $Lp_t(\mathbf{X}/\Theta)$ , peuvent être prises en compte dans la valeur de  $R_E$ .

## II. Application au problème de poursuite de sources mobiles par une antenne linéaire.

### Notation, méthode du maximum de vraisemblance et MVA.

Les observations sont menées sur une antenne linéaire à  $N$  capteurs équidistants de  $d$ . Le bruit additif d'observation est, pour des raisons de simplicité, supposé blanc gaussien circulaire, décorrélié entre capteurs et décorrélié du signal. Le vecteur  $\underline{B}$  de bruit est donc une variable aléatoire à  $N$  dimensions, de distribution normale et de covariance  $\sigma^2 \cdot I_N$ ;  $\sigma^2$  est ici la puissance du bruit. Une observation  $\underline{X}(q)$  peut alors s'écrire :

$$(14) \quad \underline{X}(q) = \underline{Y}(q) + \underline{B}(q)$$

Le vecteur de propagation  $\underline{S}$  associé à une source d'azimut  $\varphi$  s'exprime :

$$(15) \quad \underline{S}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j \frac{N-1}{2} \theta} \cdot [1, e^{j \cdot \theta}, \dots, e^{j(N-1) \cdot \theta}]^t \\ \theta = \frac{2\pi d \cdot \sin \varphi}{\lambda}$$

$\lambda$  est la longueur d'onde du signal émis par la source vers l'antenne. L'équation (14) peut alors se réécrire :

$$(16) \quad \underline{X}(q) = \sum_{m=1}^M g_m(q) \cdot \underline{S}(\varphi_m) + \underline{B}(q)$$

$$\text{soit } \underline{X}(t) = \underline{S} \cdot \underline{G}(t) + \underline{B}(t)$$

$$\text{où } \underline{G}(t) \triangleq [g_1(t), g_2(t), \dots, g_M(t)]^t$$

$$\underline{S}(\theta) \triangleq [\underline{S}(\theta_1), \underline{S}(\theta_2), \dots, \underline{S}(\theta_M)]^t$$

L'ensemble des observations faites à la date  $t$  (plus précisément sur un intervalle de temps  $\Delta t$  autour de  $t$ ) seront supposées associées à des valeurs identiques des vecteurs directionnels  $\underline{S}(\theta_m)$  : nous formulons l'hypothèse que les sources peuvent être considérées comme fixes pendant le temps d'acquisition  $\Delta t$  ; Le nombre  $Q$  d'observations considérées à une date donnée sera suffisamment faible pour que cette dernière hypothèse soit vérifiée. Les amplitudes complexes  $g_m$  sont des paramètres inconnus déterministes. Le nombre  $M$  de sources est supposé toujours inférieur à  $N$ .

### Méthode de MV.

Pour un ensemble de  $Q$  observations indépendantes, la Log-vraisemblance des observations associée au modèle décrit ci-dessus est aisément calculable. La maximisation séparée de cette fonction en  $\Theta$  et  $\underline{G}$  est équivalente à la minimisation de la forme réduite :

$$(17) \quad L_O(\Theta) = \frac{Q}{\sigma^2} \cdot \text{Tr}(\hat{\Pi} \hat{B} \cdot \hat{R}_x)$$

où le symbole  $(\Delta)$  désigne les valeurs candidates.  $\hat{R}_x$  est la matrice de covariance des observations estimées à la date  $t$ , à partir de  $Q$

vecteurs,  $\hat{\Pi}_B$  représente le projecteur candidat :

$$(18) \quad \hat{\Pi}_B = I - \hat{S} \cdot [\hat{S}^+ \cdot \hat{S}]^{-1} \cdot \hat{S}^+ = I - \hat{\Pi}_s$$

On peut alors montrer que l'équation (17) s'exprime en fonction de la matrice P de covariance des vecteurs amplitude  $\hat{Q}$ , sous la forme :

$$(20) \quad L_0(\hat{\theta}) = \frac{Q}{\sigma^2} \text{Tr}(\hat{S}^+ \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{S} \cdot P)$$

### Méthode MVA.

Dans [1], les auteurs proposent une forme approchée de (20), établie à partir du développement limité au troisième ordre en  $(\hat{\theta} - \theta)$ ,

de la quantité  $\text{Tr}(\hat{S}^+ \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{S} \cdot P)$ . Ceci conduit à la forme approchée de la fonction à minimiser :

$$(21) \quad L(\hat{\theta}) = \frac{Q}{\sigma^2} \text{Tr}(\hat{S}^+ \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{S} \cdot P)$$

Il s'avère que le calcul de  $\hat{\Pi}_B$  par décomposition en éléments propres de  $\hat{R}_x$  confère à l'algorithme de localisation une robustesse d'estimation à faible rapport signal sur bruit, y compris dans le cas de sources totalement corrélées entre elles [1]. En pratique, la matrice P est remplacée dans l'équation (21) par sa valeur estimée à

partir des Q vecteurs d'observation et de  $\hat{S}$  :

$$(22) \quad \begin{cases} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(N-M)} \cdot \text{Tr}(\hat{\Pi}_B \cdot \hat{R}_x) \\ \hat{\Pi}_s = \hat{S} \cdot [\hat{S}^+ \cdot \hat{S}]^{-1} \cdot \hat{S}^+ \\ \hat{S} \cdot \hat{P} \cdot \hat{S}^+ = \hat{\Pi}_s \cdot (\hat{R}_x - \hat{\sigma}^2 I) \cdot \hat{\Pi}_s \end{cases}$$

### Minimisation de la fonction de MVA :

La forme explicite de (21) en  $\hat{S}$ , donc en  $\hat{Q}$  d'une part, et le fait que  $L(\hat{Q})$  puisse être considérée comme une fonction quadratique de

$\hat{Q}$  en première approximation, conduit à utiliser un algorithme récursif de minimisation classique, du type Newton-Gauss, permettant une convergence rapide vers la valeur minimisant  $L(\hat{Q})$ . Le calcul du gradient et du hessien de la fonction à minimiser, conduit, toute réduction faite, à :

$$(23) \quad \begin{aligned} \text{grad} &= \frac{2 \cdot Q}{\sigma^2} \cdot \text{Re}\{\text{Diag}(\hat{S}^+ \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{S} \cdot \hat{P})\} \\ \hat{S} &= \left[ \frac{d\hat{S}_1}{d\theta_1}, \frac{d\hat{S}_2}{d\theta_2}, \dots, \frac{d\hat{S}_M}{d\theta_M} \right] = [\hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_M] \\ H &= \frac{2 \cdot Q}{\sigma^2} \cdot \text{Re}\{\text{Diag}(\hat{S}^+ \cdot \hat{P}_B \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{\Pi}_B \cdot \hat{S} \cdot \hat{P}^*)\} \end{aligned}$$

Le symbole  $\hat{\otimes}$  désigne ici le produit matriciel terme à terme. L'équation de remise à jour de l'estimation dans l'algorithme de minimisation est donnée par :

$$(24) \quad \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - H^{-1} \cdot \text{grad}$$

le hessien H et le gradient étant calculés en  $\hat{\theta}(k)$ .

### Poursuite de sources mobiles.

Ce problème peut être envisagé sous la forme la plus générale : aucune hypothèse n'est avancée sur l'évolution temporelle des trajectoires des sources. Cette approche, non paramétrique, ne peut cependant donner de très bons résultats : la variance de l'estimation varie au mieux comme  $\frac{1}{T}$ , T étant la durée totale de l'observation.

Une bonne estimation nécessite alors un temps d'observation trop long pour postuler que les sources restent fixes pendant T.

Nous proposons d'adopter une modélisation paramétrique des trajectoires des sources, sur une base de p fonctions :

$$(25) \quad \begin{cases} \theta_1(t) = \theta_1 + u_1 \cdot t \\ \theta_2(t) = \theta_2 + u_2 \cdot t \end{cases}$$

Le vecteur de M.p paramètres constants

$$P = [\theta_1 \ \theta_2 \ u_1 \ u_2]^T$$

peut être identifié par une méthode de MV utilisant des observations conduites sur un intervalle de temps  $T' > T$ . T' est le domaine de temps sur lequel le modèle exprimé dans l'équation (26) est valide.

La mise sous forme récursive d'un tel modèle est immédiate : on considère le vecteur de position étendu

$$\hat{Q}(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_1(t-1) \ \theta_2(t-1)]^T$$

Le système (25) s'écrit :

$$(26) \quad \hat{Q}(t+1/t) = M(t) \cdot \hat{Q}(t), \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 2I & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

cette équation est à rapprocher des équations (7.1) et (14).

On peut montrer que si le modèle paramétrique choisi utilise une base de p fonctions exponentielles ou polynômiales, la matrice M est constante dans le temps.

### Estimation récursive de $\hat{Q}$ .

Si une estimée du vecteur de position étendu  $\hat{Q}$  est connue à la date t, sous la forme "quasi-gaussienne"  $(\hat{Q}(t), \Gamma_t)$ , la connaissance de l'équation (26) permet de calculer une nouvelle estimation  $\hat{Q}(t+1)$ , intégrant une nouvelle observation  $X(t+1)$ , par application directe des équations (10) à (12); Le problème d'estimation récursive du vecteur de position  $\hat{Q}$  est totalement identique au problème décrit dans le 2ème cas de filtrage de Kalman présenté au §I. Les erreurs de modélisation, ainsi que dans notre cas, les erreurs introduites dans l'opération de filtrage par la troncature au second ordre des fonctions de Log-vraisemblance, peuvent être prises en compte de façon classique par l'adjonction dans l'équation d'état du système, d'un bruit d'état de covariance  $R_E$  [3]. L'estimation récursive s'exprime alors par le système d'équations suivant :

$$(27) \quad \begin{cases} \hat{Q}(t+1) = M(t) \cdot \hat{Q}(t) + \xi(t) \\ \Gamma_{t+1/t} = M^T \cdot \Gamma_t \cdot M + R_E \\ \Gamma_{t+1}^{-1} = H + \Gamma_{t+1/t}^{-1} \end{cases}$$

H, étant la valeur du hessien de la fonction  $L_{p_t}(X/\hat{Q})$  de la variable  $\hat{Q}$  en  $\hat{Q}(t+1/t)$ , peut être calculée directement par l'équation (23). Il est très important de noter que nous n'avons fait aucune hypothèse sur le nombre Q d'observations menées à chaque date t. L'expression du filtre décrit par (27) reste par conséquent valable dans le cas où Q=1. Le filtre de prédiction-estimation proposé permet donc d'estimer la valeur du vecteur de positions en t+1, à partir d'un ensemble d'observations qui considéré seul, ne permet pas de calculer un estimateur.

### Discussion et résultats de simulations.

Dans un premier temps, on considère la formulation équivalente du filtre (27), dans laquelle l'équation (27.1) est remplacée par l'ensemble des deux équations :

$$(28) \quad \begin{aligned} \hat{Q}(t) &= \hat{Q}(t-1) + [\hat{Q}(t-1) - \hat{Q}(t-2)] + \xi(t); \\ [\hat{Q}(t) - \hat{Q}(t-1)] &= u(t) = u(t-1); \end{aligned}$$

Dans une seconde approche, nous proposons d'appliquer les équations de filtrage non plus sur les vecteurs de positions étendus, de dimension M.p, mais directement sur les vecteurs de positions, de dimension M. La quantité  $u(t)$  est dans ce cas considéré comme une commande, estimée séparément. L'estimation de cette dernière peut être conduite par d'autres capteurs, ou estimée à partir des trajectoires, par lissage de  $[\hat{Q}(t) - \hat{Q}(t-1)]$  sur un horizon de taille variable, contrôlé par les valeurs prises par la matrice de covariance de l'estimation  $\Gamma_t$  [4]. Le choix d'une valeur "arbitraire" de  $R_E$  dans un premier temps, puis une estimation adaptative de cette matrice, sur un horizon de longueur fixe, à partir de l'innovation, sont discutés dans [4] et [5].

Afin d'illustrer le comportement de l'algorithme de poursuite proposé, nous présentons 3 simulations. Toutes sont menées pour une antenne de 8 capteurs équidistants,  $\lambda/d=2.5$ . A chaque fois, deux sources sont simulées, totalement corrélées entre elles. Le RSB est de 10dB. Sur la figure-1, les sources ont une marche aléatoire



gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma=0.05)$ . Le nombre d'observations faites à chaque date est  $Q=4$ . Le modèle des trajectoires est un modèle de sources fixes ( $\underline{u}(t)=0$ ). Les graphiques de la première colonne sont obtenus pour  $R_E=0$ . Comme dans le cas du filtrage de Kalman usuel, on constate que l'algorithme "explose" par perte d'adaptativité. Par contre, si  $R_E=(0.05)^2$ , le filtre obtenu permet de suivre les sources

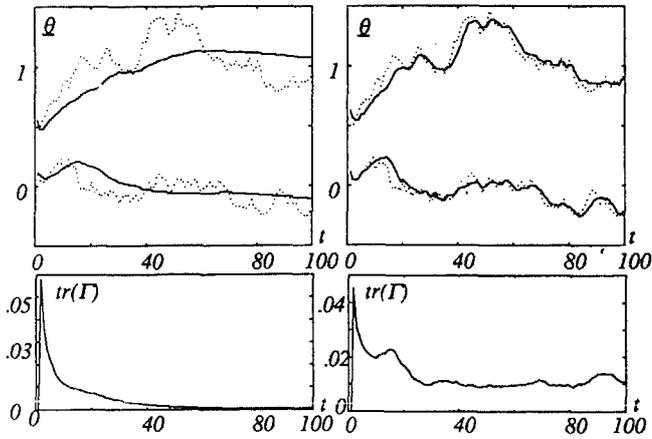


figure-1- : Poursuite de sources ayant une marche aléatoire. 1ere colonne : filtre non adapté ( $R_E=0$ ); 2ème colonne : filtre adapté : la trace de  $\Gamma$  ne tend plus vers zero; le filtre conserve son adaptativité.

La seconde simulation porte sur la poursuite de deux sources de vitesses (en  $\varphi$ ) constantes, parallèle à l'antenne. Cette fois, 1 seule observation est faite à chaque date. (Les résultats sont portés en fonctions de  $\Theta$  et non de  $\varphi$ ). On observe qu'au croisement des sources, le signal perçu par l'antenne semble issu d'une seule source; le modèle postulant l'existence de deux sources, la trace de la matrice de covariance d'erreur d'estimation croît. La quantité  $\xi$  est inversement proportionnelle à la longueur de l'horizon de lissage pour l'estimation de la vitesse [4]: on constate effectivement que  $\xi$  décroît lorsque  $Tr(\Gamma)$  augmente.

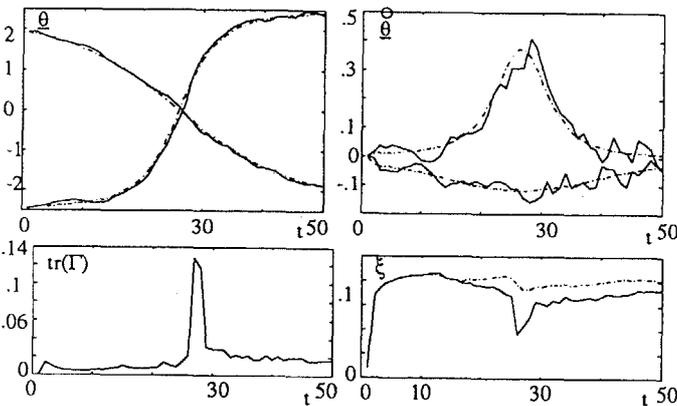


figure-2- : Poursuite de deux sources dans le cas où une seule observation est utilisée à chaque t. Dans les deux premiers quadrants, les traits discontinus représentent les valeurs théoriques de position et de vitesse des deux sources. Les deux quadrants inférieurs représentent respectivement l'évolution de la matrice de covariance d'erreur d'estimation et l'évolution du paramètre  $\xi$  contrôlant la taille de l'horizon de lissage pour l'estimation de la vitesse.

Pour la dernière simulation, nous observons la réponse de l'algorithme de poursuite dans le cas où une source change de position de façon discontinue (échelon de position). Cette simulation illustre la robustesse du filtre, ainsi que l'intérêt de l'estimation adaptative de  $R_E$  : dès que le modèle ne semble plus valable,  $R_E$  augmente, de façon à conférer au filtre une adaptativité accrue.

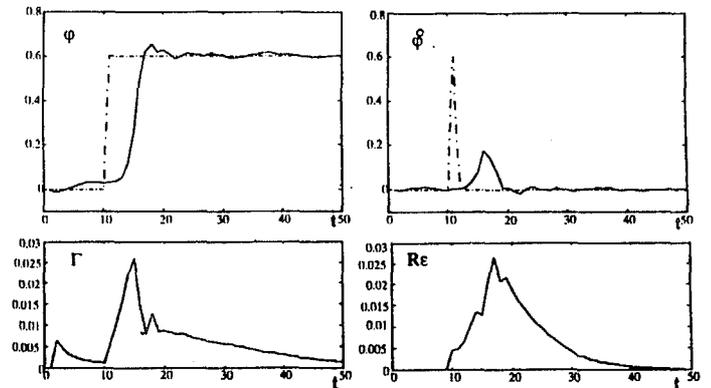


figure-3- : réponse du filtre à un échelon de position, ( $Q=4$ ).

**Conclusion :**

Nous avons montré dans cet article comment le filtre proposé dans [4,5] pour la poursuite de sources mobiles par une méthode à haute résolution peut être reconstruit à partir d'une généralisation du filtrage de Kalman exprimé en fonction des fonctions de densité de probabilité des différentes grandeurs. Les simulations attestent de l'intérêt que peut représenter ce type d'approche. L'étude plus précise de la stabilité d'un tel filtre devrait faire l'objet d'études futures. Enfin, l'exploitation de ces résultats est actuellement en cours sur site réel, dans le cadre de la localisation de sources acoustiques audibles, à l'Etablissement Technique Central de l'Armement à Arcueil (division Systèmes de Perception)(ETCA/SP).

Une grande partie de ce travail a été réalisée en collaboration avec l'ETCA/SP, sous le contrat n°20311/89/ETCA/CREA/SP.

**Bibliographie.**

- [1] H.Clergeot, S. Tressens : Comparison of two efficient algorithms for high resolution sources tracking; time recursive implementation. IEEE ICASSP'90, Albuquerque.
- [2] B. Anderson, J.B.Moore : Optimal Filtering. Prentice Hall 1979.
- [3] M.Labarrere, J.P.Krief, B.Gimonet : "Le filtrage et ses applications.", Cepadues Ed. 1988.
- [4] O.Michel, H.Clergeot : "Multiple source tracking using a high resolution method." ICASSP'91, Toronto, Canada.
- [5] O.Michel : "Application des méthodes haute résolution a la localisation et la poursuite de sources sonores." Thèse de doctorat, UPS, janvier 91.