

Intégration temporelle en traitement d'antenne <sup>1</sup>

J.P. LE CADRE et O. ZUGMEYER  
IRISA/CNRS  
Campus de Beaulieu  
35042 Rennes Cedex

**Résumé.** Après avoir défini un modèle simple des fréquences spatiales d'une source en mouvement, nous étudions des méthodes d'analyse spatio-fréquentielles incluant le mouvement (inconnu) de la source dans son modèle. Cette étude se place dans le cadre du sonar passif et vise à estimer les paramètres d'évolution des sources. Les méthodes proposées reposent pour une large part sur des analyses multi-résolution de modèles d'état, elles utilisent fondamentalement les procédures d'interpolation.

## 1 Introduction

Les traitements d'antenne (T.A. pour la suite) actuels reposent sur une analyse à temps court. Qu'ils soient du type formation de voies [1] ou à haute-résolution, ils visent à optimiser le contraste spatial durant l'intervalle de temps nécessaire à l'estimation des statistiques des observations. Ce temps est évidemment limité par la non-stationnarité des signaux reçus. Cette non-stationnarité est due, pour une large part, aux mouvements respectifs des sources. Une étude statistique des effets du mouvement des sources a été effectuée en [1], [2] et a prouvé, en particulier, que ces effets sont d'autant plus importants que le nombre de capteurs de l'antenne est élevé.

Le traitement spatial est suivi de procédures d'extraction-poursuite qui analysent les sorties de T.A. et non les signaux eux-mêmes. Cette analyse n'utilise donc pas de façon cohérente le grand volume de données (sorties de capteurs) spatio-temporelles disponible dans des domaines tels que l'acoustique sous-marine. Il s'agit donc de définir des méthodes d'analyse spatio-temporelles exploitant directement les statistiques des sorties de capteurs.

Pour cela, il est nécessaire de disposer de modèles de sources en mouvement, adaptés aux traitements, de les inclure aux modèles des sources et puis d'étudier des traitements spatio-temporels utilisant ces modèles. Il est alors possible non seulement de bénéficier de temps d'intégration largement augmentés mais aussi de discriminer les sources par leurs trajectoires et non par leurs gisements à un instant donné. Nous montrons en outre qu'il est aussi possible d'inclure simplement des hypothèses a priori relatives aux mouvements des sources et ainsi de définir de nouvelles méthodes d'analyse spatiale.

Les données spatio-temporelles seront décrites par un modèle d'état 2D. Nous montrons que des estimations séparées des paramètres spatiaux et temporels des sources permettent de s'affranchir des problèmes de phases initiales et, donc, d'interférences entre sources. Ce modèle d'état peut-être à paramètres variables dans le cas de sources proches.

Ce modèle d'état 2D conduit à étudier les sorties de covariances spatiales en fonction du temps. Nous appellerons "fil  $m$ " la sortie constituée des  $m$ -ièmes covariances spatiales. L'estimation des paramètres de défilement des sources sera effec-

**Summary.** After a simplified model of the spatial frequencies of a moving source has been defined, spatio-temporal analysis methods are studied including the (unknown) motion model in the source one. This study is situated in the general context of passive sonar and deals with the estimation of the cinematic parameters of the sources. The proposed methods are based, for a large part, on multi-resolution analysis of state-space models by using basically interpolation procedures.

tuée sur ces sorties de fils. Dans ce but, nous montrons qu'il est possible d'optimiser la configuration spatio-temporelle utilisée. Puis des méthodes simples d'estimation de ces paramètres sont définies dans le cas du modèle d'état à paramètres fixes. Si les paramètres du modèle varient au cours du temps, alors ces variations peuvent être décrites par un modèle d'état à coefficients aléatoires. Les valeurs instantanées des paramètres sont alors estimées par des algorithmes de type Kalman, eux-mêmes conditionnés par le choix des hyperparamètres décrivant la variation du modèle. Ces algorithmes donnent des résultats satisfaisants pour des configurations simples.

Le problème de l'association des estimations effectuées sur ces divers fils prend la forme générale d'une estimation multi-échelles. Pour ce faire, il existe deux grands types d'approches : l'une basée sur l'association des estimations obtenues directement sur les divers fils (fusion incohérente), l'autre basée sur l'estimation d'un modèle commun aux divers fils interpolés. Dans les deux cas, la procédure d'interpolation s'avère être un outil essentiel. L'optimisation de celle-ci a donc été soigneusement considérée.

L'importante dynamique des sources conduit à utiliser ces méthodes en sorties de traitement spatial (formation de voies). Là encore, l'interpolation des sorties de fils s'avère être un outil fondamental.

Le but général de cet article est de présenter des méthodes d'analyse spatio-temporelle utilisant fondamentalement le défilement temporel des sources pour améliorer la discrimination-détection des sources.

## 2 Un modèle simplifié de source en mouvement

Considérons une source animée d'un mouvement rectiligne et uniforme et notons  $v$  sa vitesse,  $\beta$  son cap,  $\theta_n$  et  $L_n$  son gisement et sa distance à l'instant  $t_n$ . Alors, des calculs élémentaires conduisent à l'approximation ci-dessous :

$$\cos \theta_n \simeq \cos \theta_{n-1} + [\cos \beta - \cos(\theta_{n-1} - \beta)] \cdot \frac{v \Delta t}{L_{n-1}} \quad (1)$$

Il est possible d'en déduire une approximation d'ordre 1, soit :

$$\cos \theta_n \simeq \cos \theta_0 + (\cos \beta - \cos \theta_0 \cdot \cos(\theta_0 - \beta)) \frac{v \Delta t \cdot n}{L_0} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Etude effectuée dans le cadre de la convention GERDSM (DCN Toulon) - IRISA



Le facteur multiplicatif du temps (i.e.  $\Delta t \cdot n$ ) dans la formule (2) est une constante. Après division par  $\lambda$  (la longueur d'onde), l'équation 2 conduit à la formule ci-dessous ( $k \triangleq \cos \theta / \lambda$ ) :

$$k_n = k_0 + n\dot{k}_0 \quad (3)$$

Dans cette formule  $\dot{k}_0$  représente la vitesse d'évolution de la fréquence spatiale. Il s'agit d'une approximation linéaire de  $k_n$  dont la validité est limitée par le temps et les paramètres cinématiques de la source. Ainsi dans le cas d'une source relativement proche, l'équation 3 peut être remplacée par une approximation locale, i.e. :

$$k_n = k_{n-1} + \dot{k}_n \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) conduisent en fait à des méthodes d'estimation différentes. L'équation (4) est très générale et permet de modéliser tous les types de trajectoires tandis que l'équation (3) introduit un a priori sur l'évolution temporelle des fréquences spatiales.

### 3 Estimation des paramètres cinématiques des sources

Essentiellement pour des raisons de simplicité (formalisme vectoriel et linéaire), l'analyse sera effectuée en sorties de T.F., la fréquence sera omise pour la suite. Les T.A. usuels se bornent à l'estimation de  $k_0$  or le mouvement de la source induit un étalement spatial qui altère les performances des T.A. ( $P_d$ , variance, biais). Les effets statistiques de cet étalement spatial ont été étudié en détail dans [1]. Il est alors possible d'optimiser le temps d'intégration pour une source de paramètres cinématiques connus.

Le calcul de la matrice de Fisher (FIM) pour les paramètres  $k_0$  et  $\dot{k}$  conduit à des conclusions intéressantes, i.e. :

$$\begin{aligned} FIM(1,1) &= -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial^2 k_0} \right] = \frac{N \rho^2 4\pi^2 d^2 p^2 \cdot (p^2 - 1)}{6 \cdot (1 + p \cdot \rho)} \\ FIM(2,2) &= -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial^2 \dot{k}} \right] = \frac{\rho^2 4\pi^2 d^2 p^2 \cdot (p^2 - 1) N \cdot (N + 1)(2N + 1)}{36(1 + p \cdot \rho)} \\ FIM(1,2) &= -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial k_0 \partial \dot{k}} \right] = \frac{\rho^2 4\pi^2 d^2 p^2 (p^2 - 1) N \cdot N + \frac{1}{6}}{12(1 + p\rho)} \end{aligned}$$

( $\rho =$  rapport  $S/B$ ,  $N$  : nombre d'échantillons,  $p$  : nombre de capteurs,  $d$  : espacement intercapteurs).

La formule ci-dessus prouve que la variance d'un estimateur optimal de  $\dot{k}$  est proportionnelle à  $N^{-3}$  tandis que celle de  $k$  est proportionnelle à  $N^{-1}$ . L'analyse en  $\dot{k}$  apparaît donc comme une méthode efficace de détermination entre sources. Toutefois ce résultat doit être tempéré par la valeur de  $\dot{k}$  qui est usuellement très faible (e.g. de l'ordre de  $10^{-4}$  rd/sec. pour des sources à distance moyenne).

Les méthodes "classiques" reposent sur une estimation simultanée des paramètres  $k_0$  et  $\dot{k}$ . Ce sont des méthodes de focalisation mono-sources connues sous le nom de "formations de voies défilantes" ou "ICDD" [1], [3]. Elles consistent à calculer la densité  $P(k, \dot{k})$  définie ci-dessous :

$$P(k, \dot{k}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X_n^* \cdot D_{k_0, \dot{k}, n}|^2 \quad (6)$$

avec :

$$D_{k_0, \dot{k}, n} \triangleq D_{k_0 + n\dot{k}}$$

Les extrema de cette fonction estiment les paramètres  $k_0$  et  $\dot{k}$  de la source. En dépit de sa simplicité conceptuelle, cette méthode souffre de défauts rédhibitoires dans le cas de sources multiples : coût de calcul et surtout pics parasites. Ces pics

parasites sont dues à l'ambiguïté du modèle (équation 3) et de l'analyse (équation 6) qui ne séparent pas les paramètres  $k_0$  et  $\dot{k}$ . Il est évidemment possible d'étendre les modèles de focalisations multiples [4] à ce cas mais ceci requiert une connaissance suffisamment précise des paramètres  $k_0$  et  $\dot{k}$  des sources que l'on cherche à détecter (poursuivre), ce qui est guère convainquant).

En fait, le problème de la phase initiale (liée à  $k_0$ ) apparaît fondamental. Pour remédier à ce problème, la méthode générale consiste à ne plus estimer que les déphasages successifs entre sorties de fils. C'est donc ce type de modèle que nous allons maintenant présenter.

### 4 Modélisation d'état des données et applications

Les données sont constituées d'un tableau 2D  $\{y(t, m)\}$  indexé par le temps  $t$  et l'espace  $m$ . Les données  $y(t, m)$  représentent les covariances spatiales (écartement  $md$ ) estimées à l'instant  $t$ . Cette estimation est obtenue par la méthode du périodogramme après filtrage en  $\dot{k}$ , puis rectification spatiale [5]. Ce tableau peut être représenté par le modèle d'état 2D ci-dessous :

$$\begin{cases} X(t+1, m) = F_1^m \cdot X(t, m) & 1 \leq m \leq p \\ X(t, m+1) = F_0 \cdot F_1^t X(t, m) & 0 \leq t \\ y(t, m) = h^* \cdot X(t, m) + w(t, m) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} F_1 = \text{diag} \left( \exp(2i\pi d k_1), \dots, \exp(2i\pi d k_s) \right) \\ F_0 = \text{diag} \left( \exp(2i\pi d k_{1,0}), \dots, \exp(2i\pi d k_{s,0}) \right) \\ h^* = (1, 1, \dots, 1) \end{cases} \quad (7)$$

Ce modèle correspond à l'équation (3). Du fait des propriétés classiques de la T.F. le bruit (d'estimation)  $w(t, m)$  est décorrélé en temps, sa covariance spatiale est donnée par la formule ci-dessous [5] :

$$\begin{aligned} \text{cov}(w(t, m_1), w(t, m_2)) &= \frac{\text{tr}(\Gamma_t^{m_1} \Gamma_t^{m_2})}{(p - m_1) \cdot (p - m_2)} \\ \Gamma_t &\triangleq \text{cov}(\mathcal{Y}_t) \text{ et } \mathcal{Y} \triangleq (y(t, 1), \dots, y(t, p))^t \\ \Gamma_t^{\text{uparrowarrow}} &= \text{shift}(\Gamma_t) \end{aligned} \quad (8)$$

Le modèle (7) peut être simplement étendu en un modèle vectoriel du vecteur  $\mathcal{Y}_t$  par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}(t+1) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{X}(t) \\ \mathcal{Y}_t = \mathcal{H}^* \cdot \mathcal{X}(t) + W(t) \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{F} = \text{bloc-diag} [F_1, \dots, F_1^p] ; \mathcal{H} = \begin{bmatrix} h^* & 0 \\ & h^* \\ & & 0 & h^* \end{bmatrix} \quad (9)$$

Le problème d'estimation des paramètres  $k_0$  et  $\dot{k}$ , dans le cas multisources, se ramène à celui de l'estimation des matrices de transition  $F_0$  et  $F_1(\dot{k})$ .

Une méthode de base consiste à utiliser les décompositions

de la matrice de Hankel  $\mathcal{H}_m \triangleq \text{Hank}(y(t, m))$  ( $m$  fixé), soit [5] :

$$\mathcal{H}_m = \theta_m \cdot \mathcal{X}_m$$

où  $\theta_m$  est la matrice d'observabilité partielle et  $\mathcal{X}_m$  la matrice de l'état initial, i.e. :

$$\begin{aligned} \theta_m^t &= (h^*, h^* F_1^m, \dots, h^* F_1^{m \cdot t}) \\ \mathcal{X}_m^t &= (X(1, m), \dots, X(c, m)) \end{aligned} \quad (10)$$

Par conséquent :  $rg(\mathcal{H}_m) = rg(\theta_m) = \dim X$ , ce qui suggère une estimation de  $\theta_m$  par analyse en composantes principales. En fait,  $\hat{\theta}_m$  est estimée à partir de  $\mathcal{H}_m$  par SVD et une matrice  $\hat{F}_1$  en est immédiatement déduite. Cette analyse s'étend aisément au cas multidimensionnel.

Un autre point important est l'optimisation de la configuration spatio-temporelle. La variance des estimées des  $\hat{k}$  peut être approximée par :

$$\text{var}(\hat{k}_j) \cong \sigma_w^2(m) \cdot \left\| \frac{\partial \hat{k}}{\partial \hat{h}} \right\|^2 \quad (11)$$

Or dans (11),  $\sigma_w^2(m)$  a été calculée par (8) et l'autre terme du produit est un terme purement géométrique obtenu par analyse des perturbations des vecteurs singuliers [5] et la méthode de Leverrier.

A faible rapport  $S/B$  le terme  $\sigma_w^2(m)$  croit en  $(p-m)^{-1}$  tandis que le terme géométrique décroît en  $m^{-2}$ . Il y a donc des choix optimaux de  $m$  et plus généralement, il est possible [5] à partir des seules données d'optimiser la configuration spatio-temporelle.

Il est aussi possible d'utiliser à la place de l'analyse par SVD une analyse par modèle AR. Dans ce cas, un modèle AR est défini sur chaque fil. Une méthode d'interpolation incohérente est dénie comme suit :

1. Définissons le polynôme interpolé (de  $m_k$  à  $m_1$ ) par :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{m_k}^{M_1}(z) &= \prod_{j=1}^s \left( z - \hat{z}(j, m_k) \frac{m_1}{m_k} \right) \\ &\triangleq z^s - \hat{a}_{m_k}^{m_1}(1) \cdot z^{s-1} \dots - \hat{a}_{m_k}^{m_1}(s) \end{aligned} \quad (12)$$

2. A partir des coefficients  $\hat{a}_{m_k}^{m_1}$  définis en (12) on calcule la matrice de covariance de Toeplitz interpolée par la formule de Gohberg ;, i.e. :

$$\hat{T}_{m_k}^{m_1} = \left( \hat{\sigma}_{m_k}^{m_1} \right)^2 \left( \hat{A}_{m_k}^{m_1} \hat{A}_{m_k}^{*m_1} - \hat{B}_{m_k}^{m_1} \hat{B}_{m_k}^{*m_1} \right)^{-1} \quad (13)$$

3. On estime le modèle AR unique correspondant au sens des moindres carrés aux matrices  $\left\{ \hat{T}_{m_k}^{m_1} \right\}_k$ .

Cette méthode conduit à des résultats satisfaisants pour des sources lointaines pour lesquelles l'équation (3) est valide. Pour des sources relativement proches, les résultats peuvent se dégrader, c'est pourquoi on considère un modèle AR non-stationnaire des sorties des fils.

L'intérêt fondamental de cette approche est qu'elle ne fait pas référence à un état unique comme dans l'équation (10) et est donc adaptée à des sources de niveaux variables durant le temps d'intégration.

## 5 Modélisations non-stationnaires

On modélise la sortie d'un fil  $\{Y(t, m)\}$  ( $m$  fixé) par un modèle AR non-stationnaire défini comme ci-dessous :

$$\begin{cases} X_{t+1} = F \cdot X_t + w_t \\ Y_t = h_t^* \cdot X_t + n_t \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} Y_t &\triangleq y(t, m); h_t^* = (y(t-1, m), \dots, y(t-q, m)) \\ X_t &= (a_1(t), \dots, a_q(t))^t \end{aligned} \quad (14)$$

Dans l'équation (14) le vecteur  $X_t$  représente les coefficients (variables) du modèle AR.

L'équation de l'état de l'équation (14) est déduite de l'équation d'évolution des  $\hat{k}_j$ , soit :

$$\nabla^i \hat{k}_t = w_t$$

( $\nabla^i$  : différences à l'ordre  $i$ )

ainsi à l'ordre 2 :

$$\nabla^2 \hat{k}_t = w_t \iff \hat{k}_{t+1} = 2\hat{k}_t - \hat{k}_{t-1} + w_t, w_t : \mathcal{N}(0, \tau^2) \quad (15)$$

Les paramètres  $\tau^2$  dans l'équation (15) sont appelés des hyperparamètres et représentent les contraintes de "lenteur" sur l'évolution temporelle des  $\hat{k}_t$ . On en déduit la forme générale de l'équation d'état, i.e. [6] :

$$\begin{cases} \mathcal{X}(t+1) = \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{X}(t) + G(t) \cdot W_t \\ Y_t = H_t^* \cdot \mathcal{X}(t) + n_t \end{cases}$$

avec (à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \begin{bmatrix} A(t) \\ A(t-1) \end{bmatrix}; A(t) = [a_1(t), \dots, a_s(t)]^t \\ H^*(t) &= [\hat{f}(t-1), \dots, \hat{f}(t-s) | 0 \dots 0] \\ \mathcal{F}(t) &= \begin{pmatrix} Id + J_t \cdot J_{t-1}^{-1} & -J_t \cdot J_{t-1}^{-1} \\ Id & 0 \end{pmatrix}; G(t) = \begin{pmatrix} J_t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Dans l'équation (16) la matrice  $J_t$  est la matrice jacobienne de terme général :

$$J_t(i, j) = \left( \frac{\partial a_i(t)}{\partial \hat{k}_j(t)} \right)_{1 \leq i, j \leq s} \quad (17)$$

Celle-ci peut être calculée par l'algorithme de Leverrier. Le bruit (vectoriel)  $W_t$  est à composantes décorrélées puisque les évolutions des  $\hat{k}_j(t)$  sont indépendantes,  $W_t$  est  $\mathcal{N}(0, B)$  avec :

$$B = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_s^2)$$

Le vecteur d'état  $X_t$  de l'équation (14) est estimé par une méthode de filtrage de Kalman, suivi d'un lissage [6]. Cette approche donne de bons résultats pour des sources à faible ou moyenne distance [6], elle est cependant affectée par la variance d'estimation des observations  $y(t)$  ( $\hat{f}_m(t)$ ) donnée par (8) et qui dépend fortement des rapports  $S/B$  relatifs des sources. On se préoccupe donc d'étendre cette analyse à toutes les corrélations spatiales.

## 6 Analyse multi-résolution

Sur un intervalle élémentaire, l'équation (7) est valide. On note qu'elle correspond à "voir" le même processus mais à des échelles différentes puisque l'exposant de  $F_1$  varie avec  $m$ . On peut donc se ramener à une matrice de transition unique en interpolant temporellement l'état, i.e. :

$$X \left( t + 1 \cdot \frac{m_0}{m}, m \right) = F_1^{m_0} \cdot X(t, m) \quad (18)$$

Par conséquent, sur chaque fil  $m$  il est possible de modéliser les données interpolées par un modèle AR (local) unique, soit :

$$Y(t, m) = \sum_{j=1}^s a_j(t, m_0) \cdot \hat{Y} \left( t - \frac{m_0}{m} \cdot j, m \right) \quad (19)$$

