

# Rapprochement de la Méthode du Propagateur et de Music pour la Localisation de Sources

Alain Marsal et Sylvie Marcos

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE,  
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France

## RÉSUMÉ

*Le Propagateur, introduit par J. Munier en 1987, s'est avéré être un outil précieux pour le traitement d'antennes. Estimé par un simple processus de moindres carrés, il permet notamment de définir une base du sous-espace bruit sans décomposition en éléments propres de la matrice interspectrale des signaux reçus par l'antenne. Nous analysons dans cette communication l'influence, d'une part d'une estimation des moindres carrés totaux du Propagateur et d'autre part d'une orthonormalisation de la base obtenue, sur les performances de la méthode du Propagateur en localisation de sources.*

## 1 Introduction

<sup>1</sup> Le Propagateur est un opérateur linéaire qui a été introduit initialement [1] pour déterminer des paramètres de propagation de signaux issus de sources émettrices et reçus sur un réseau de capteurs ou antenne, comme par exemple la géométrie des fronts d'ondes, les gains des capteurs ou la forme de l'antenne. Cet opérateur peut être estimé par un simple processus de moindres carrés ("Least Squares" : LS), à partir de la matrice interspectrale (MI) des signaux reçus sur l'antenne.

La détermination des directions d'arrivée (DDA) des signaux sur l'antenne par la méthode du Propagateur (MP) se fait, comme pour la méthode Music [4] [5], en cherchant des vecteurs d'analyse, dépendant d'un paramètre de localisation, qui soient orthogonaux à chacun des vecteurs d'une base du sous-espace bruit fournie. La différence entre les deux méthodes se situe dans la construction de la base ; recherche des vecteurs propres pour Music, estimation du Propagateur pour la MP.

Dans un premier temps, nous présentons une solution au sens des moindres carrés totaux ("Total Least Squares" : TLS) qui donne, en présence d'un bruit spatialement et temporellement blanc, une estimation asymptotiquement non biaisée du Propagateur. Toutefois, cette solution est bien plus coûteuse en calcul que la solution LS.

Dans un deuxième temps, nous analysons l'influence du caractère non orthonormé de la base du sous-espace bruit générée à l'aide du Propagateur sur les performances de la méthode. Nous déterminons un opérateur de projection

## ABSTRACT

*The Propagator, introduced by J. Munier in 1987, has appeared to be a precious tool in array processing. Simply estimated by a least squares process, it can be used to define a noise subspace basis without any eigendecomposition of the cross-spectral matrix of the received signals. In this paper we study the effects of a total least squares estimation of the Propagator and the influence of an orthonormalization of the computed basis, on the performances of the Propagator method for source bearing estimation.*

orthogonale sur le sous-espace bruit qui ne dépend que du Propagateur et ne nécessite donc pas de décomposition en éléments propres de la MI des signaux reçus sur l'antenne. Nous montrons que la MP est plus sensible au caractère orthonormé ou non de la base du sous-espace bruit construite avec le Propagateur qu'à une meilleure estimation (TLS) de celui-ci.

Nous comparons, à l'aide de simulations, les différentes versions de la MP (LS, TLS avec ou sans orthonormalisation) aux méthodes Music, Esprit [6] et Formation de voies.

## 2 Principe des Méthodes Reposant sur la Décomposition en Sous-espace Bruit et Sous-espace Source

Soit une antenne de  $M$  capteurs éclairée par  $N$  ondes incidentes ( $M > N$ ) issues de sources émettrices ponctuelles situées à l'infini dans un plan contenant l'antenne. A une fréquence donnée, et pour une mesure particulière (correspondant à une fenêtre d'observation), le vecteur de dimension  $M$  des signaux reçus peut être écrit

$$\mathbf{r} = \mathbf{U}\alpha + \mathbf{b} \quad (1)$$

où  $\mathbf{U}$  est la matrice de dimension  $(M, N)$  des vecteurs sources  $\mathbf{u}_i$ ,  $\alpha$  est le vecteur de dimension  $N$  contenant les amplitudes complexes  $\alpha_i$  des sources et  $\mathbf{b}$  un vecteur de bruit.

Sous les hypothèses classiques en traitement d'antenne que les amplitudes complexes et les composantes du bruit  $\mathbf{b}$  sont des variables aléatoires stationnaires, centrées et

<sup>1</sup> Etude financée par le GERDSM



mutuellement décorréées, la MI des signaux reçus sur l'antenne est définie par la matrice de dimension  $(M, M)$

$$\Gamma \stackrel{def}{=} \mathbf{E}[\mathbf{r}\mathbf{r}^\dagger] = \mathbf{U}\Gamma_\alpha\mathbf{U}^\dagger + \Gamma_b \quad (2)$$

où  $\Gamma_\alpha$  et  $\Gamma_b$  sont les MI des sources et du bruit, de dimensions respectives  $(N, N)$  et  $(M, M)$  et où  $\dagger$  représente la transposition hermitienne.

Considérons un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $M$  et noté  $\mathcal{V}$ . Sous l'hypothèse

$\mathcal{H}_1$  : les  $N$  vecteurs sources  $\mathbf{u}_i$  sont linéairement indépendants dans  $\mathcal{V}$ ,

on désigne par  $\mathcal{V}_S$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{V}$  engendré par les vecteurs  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . En absence de bruit, le vecteur des signaux reçus sur l'antenne ne dépend que des sources et appartient, d'après le modèle (1) où  $\mathbf{b}$  est identiquement nul, à  $\mathcal{V}_S$ . C'est pourquoi  $\mathcal{V}_S$  est appelé le sous-espace source. On appelle sous-espace bruit (même en l'absence de bruit), le sous-espace complémentaire de  $\mathcal{V}_S$  dans  $\mathcal{V}$ ; on le notera  $\mathcal{V}_B$ .

Les méthodes dites à haute résolution reposent sur cette décomposition de l'espace des observations en sous-espaces source et bruit. La détermination de ces sous-espaces à partir des signaux reçus requiert en plus de  $\mathcal{H}_1$ , les hypothèses suivantes :

$\mathcal{H}_2$  : la matrice  $(N, N)$   $\Gamma_\alpha$  n'est pas singulière,

$\mathcal{H}_3$  :  $\Gamma_b = \sigma^2\mathbf{I}_M$ .

Tandis que  $\mathcal{H}_1$  n'est pas contraignante, les hypothèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$  sont restrictives en pratique.

Sous ces hypothèses, les résultats suivants ont été démontrés [4] [5]. La plus petite valeur propre de la MI est la variance du bruit  $\sigma^2$ . Le nombre de valeurs propres de la MI égales à  $\sigma^2$  est  $M - N$ . Les  $M - N$  vecteurs propres associés à la valeur propre  $\sigma^2$  sont orthogonaux aux vecteurs sources. Soit  $\mathbf{V}_B$  la matrice de dimension  $(M, M - N)$  dont les colonnes sont les vecteurs propres orthonormés de  $\Gamma$  associés à la valeur propre  $\sigma^2$ . Il vient

$$\mathbf{V}_B^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3)$$

où  $\mathbf{0}$  est la matrice nulle de dimension  $(M - N, M)$ .

Il s'ensuit que l'espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{V}_B$  et que l'on note  $\mathcal{C}(\mathbf{V}_B)$ , est le sous-espace bruit, c'est à dire

$$\mathcal{V}_B = \mathcal{C}(\mathbf{V}_B). \quad (4)$$

La résolution de l'équation (3) ne suffit pas à déterminer les vecteurs sources de manière unique. En effet toute combinaison linéaire des vecteurs sources appartient au noyau de l'opérateur  $\mathbf{V}_B$ . La méthode Music consiste à trouver les DDA des fronts d'ondes sur l'antenne comme arguments des minima de la fonction

$$F_{Mus}(\theta) = \|\mathbf{V}_B^\dagger \mathbf{u}(\theta)\|^2 \quad \theta \in ]-\pi, \pi] \quad (5)$$

où  $\theta$  est un paramètre de localisation,  $\mathbf{u}(\theta)$  un vecteur d'analyse modélisant la propagation.  $\mathbf{V}_B$  étant une matrice unitaire, (5) représente la norme au carré de la projection orthogonale du vecteur d'analyse  $\mathbf{u}(\theta)$  sur le sous-espace bruit. L'opérateur de projection est en fait  $\mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^\dagger$ .

### 3 Définition du Propagateur

La définition du Propagateur repose sur la partition de la matrice des vecteurs sources suivant

$$\mathbf{U} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \dots \\ \mathbf{Y} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} N \\ \\ M - N \end{array} \right\} \quad (6)$$

où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont des matrices de dimensions respectives  $(N, N)$  et  $(M - N, N)$ .

**Définition :** [2] [3] Sous l'hypothèse

$\mathcal{H}_4$  : la matrice de dimension  $(N, N)$  est non singulière,

le Propagateur est l'opérateur linéaire unique  $\mathbf{P}$  de  $\mathbb{C}^{M-N}$  dans  $\mathbb{C}^N$ , défini de façon équivalente par les deux propositions suivantes :

$$\mathbf{P}^\dagger \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (7)$$

$$\text{ou } \left[ \mathbf{P}^\dagger, -\mathbf{I}_{M-N} \right] \mathbf{U} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (8)$$

où  $\mathbf{I}_{M-N}$  est la matrice identité de dimension  $(M - N)$  et  $\mathbf{Q}$  une matrice de dimension  $(M, M - N)$ . L'hypothèse  $\mathcal{H}_4$  n'est pas contraignante, les sorties de capteurs pouvant être ordonnés de n'importe quelle façon.

Une première conséquence de la définition du Propagateur est que l'équation (8) est semblable à l'équation (3). C'est à dire que le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ , est inclus dans  $\mathcal{C}(\mathbf{V}_B)$ . De plus, comme  $\mathbf{Q}$  contient le bloc  $\mathbf{I}_{M-N}$ , ses  $M - N$  colonnes sont linéairement indépendantes. Il vient donc

$$\mathcal{C}(\mathbf{Q}) = \mathcal{C}(\mathbf{V}_B). \quad (9)$$

Il est important de noter que la définition du sous-espace bruit à l'aide du Propagateur (8) ne nécessite pas les hypothèses  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$  contrairement à sa définition à partir des vecteurs propres de la MI. Ainsi le Propagateur permet de construire une base du sous-espace bruit différente de celle formée par les vecteurs propres orthonormés que sont les colonnes de  $\mathbf{V}_B$ . Notons en effet que les colonnes de  $\mathbf{Q}$  sont aussi vecteurs propres de la MI associés à la valeur propre  $\sigma^2$ .

Une fois le sous-espace bruit déterminé à l'aide du Propagateur, l'estimation des DDA est réalisée de façon analogue à Music : étant donné un modèle de vecteur source  $\mathbf{u}(\theta)$  dépendant d'un paramètre angulaire de localisation  $\theta$ , les DDA sont estimés comme les arguments des minima de

$$F_{Pro}(\theta) = \|\mathbf{Q}^\dagger \mathbf{u}(\theta)\|^2 \quad \theta \in ]-\pi, \pi] \quad (10)$$

Contrairement à  $\mathbf{V}_B$ , la matrice  $\mathbf{Q}$  n'est pas unitaire. Ainsi, l'application linéaire de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{V}_B$  associée à la matrice  $\mathbf{Q}^\dagger$  n'est pas une projection orthogonale sur le sous-espace bruit.

### 4 Projection Orthogonale sur le Sous-espace Bruit

La base des colonnes de  $\mathbf{Q}$  étant une base du sous-espace bruit, on peut construire le projecteur orthogonal sur ce

sous-espace en fonction de la matrice  $\mathbf{Q}$  :

$$\Pi_{\mathbf{Q}} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^\dagger \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^\dagger \quad (11)$$

D'autre part, la relation (9) nous invite à rechercher une relation entre les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{V}_B$  dont les colonnes respectives engendrent le même sous-espace bruit. Pour cela, on fractionne  $\mathbf{V}_B$  suivant :

$$\mathbf{V}_B = \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{B_1} \\ \dots \\ \mathbf{V}_{B_2} \end{array} \right]}^{M-N} \\ \left. \begin{array}{l} N \\ M-N \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (12)$$

On déduit de (3), (6), (7), (12) et  $\mathcal{H}_4$ , si l'on suppose  $\mathbf{V}_{B_2}$  inversible, que

$$\mathbf{P} = -\mathbf{V}_{B_1} \mathbf{V}_{B_2}^{-1} \quad (13)$$

soit encore

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{V}_B \mathbf{V}_{B_2}^{-1} \quad (14)$$

La matrice  $\mathbf{V}_{B_2}^{-1}$ , supposée non singulière, de dimension  $(M-N, M-N)$  est la matrice de passage de la base orthonormée des colonnes de  $\mathbf{Q}$  vers la base des colonnes de la matrice  $\mathbf{V}_B$ . Il est alors facile de vérifier que d'une part

$$\Pi_{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}_B \mathbf{V}_B^\dagger \quad (15)$$

et que d'autre part les colonnes de

$$\mathbf{Q}_{ON} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^\dagger \mathbf{Q})^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

forment une base orthonormée du sous-espace bruit qui ne fait intervenir que le Propagateur. Inversement, la relation (13) montre que le Propagateur peut être estimé à partir des vecteurs propres de la MI ; ainsi, ses propriétés d'interpolateur de modèle (7) [3] peuvent être utilisées directement à partir des vecteurs propres.

Par analogie à (10) on peut chercher les DDA indifféremment comme arguments des minima de

$$F_{ProON}(\theta) = \|\mathbf{Q}_{ON}^\dagger \mathbf{u}(\theta)\|^2 \quad (17)$$

$$\text{ou } F_{Pro\Pi} = \|\Pi_{\mathbf{Q}} \mathbf{u}(\theta)\|^2 \quad \forall \theta \in ]-\pi, \pi] \quad (18)$$

Contrairement à  $F_{Pro}$  défini en (10),  $F_{ProON}$  (comme  $F_{Pro\Pi}$ ) représente bien la norme au carré de la projection orthogonale du vecteur d'analyse  $\mathbf{u}(\theta)$  sur le sous-espace bruit.

Ainsi, sous réserve d'une estimation exacte du Propagateur  $\mathbf{P}$ , les trois estimateurs des DDA définis respectivement par les relations (5), (18) et (17) sont équivalents.

## 5 Estimation du Propagateur à partir des Données

### 5.1 Estimation LS du Propagateur

L'estimation du Propagateur repose sur la partition de la MI des signaux reçus sur l'antenne (2) suivant

$$\Gamma = \left[ \mathbf{G} : \mathbf{H} \right] \quad (19)$$

où  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  sont des matrices de dimensions respectives  $(M, N)$  et  $(M, M-N)$ . En l'absence de bruit, on a la relation

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{P} \quad (20)$$

En présence de bruit, la décomposition de  $\Gamma$  suivant (19) reste valable. Cependant, la relation, éventuellement existante, qui lie les colonnes de  $\mathbf{H}$  aux colonnes de  $\mathbf{G}$  ne définit plus le Propagateur  $\mathbf{P}$ . On peut chercher une estimation  $\mathbf{P}_{LS}$  de  $\mathbf{P}$  qui minimise la fonction

$$\mathcal{T}(\mathbf{P}) = \|\mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{P}\|_{\mathbb{F}}^2 \quad (21)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$  représente la norme de Frobenius. La solution optimale [3] est

$$\mathbf{P}_{LS} = (\mathbf{G}^\dagger \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^\dagger \mathbf{H} \quad (22)$$

L'estimation de  $\mathbf{P}$  est perturbée par le bruit, mais l'influence de celui-ci est affaiblie par le processus des moindres carrés.

### 5.2 Estimation du Propagateur par la Technique des Moindres Carrés Totaux (TLS)

Dans la pratique, on ne possède qu'une estimée de la MI, et donc  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  sont perturbés par rapport à leur valeur théorique (2), (19). Soient  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  les perturbations respectives sur  $\mathbf{G}$  et sur  $\mathbf{H}$ , dues au bruit, et aux erreurs d'estimation de  $\Gamma$ . La technique LS cherche à minimiser  $\|\tilde{\mathbf{H}}\|_{\mathbb{F}}^2$  sous la contrainte

$$\mathcal{C}(\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}) \subset \mathcal{I}m(\mathbf{G}) \quad (23)$$

où  $\mathcal{C}(\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}})$  et  $\mathcal{I}m(\mathbf{G})$  représentent respectivement l'espace colonne de la matrice  $\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}$  et l'espace image de l'opérateur  $\mathbf{G}$ .

La technique TLS [7] cherche à minimiser  $\left\| \left[ \tilde{\mathbf{G}} : \tilde{\mathbf{H}} \right] \right\|_{\mathbb{F}}^2$  sous la contrainte

$$\mathcal{C}(\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}) \subset \mathcal{I}m(\mathbf{G} + \tilde{\mathbf{G}}) \quad (24)$$

Soit  $\left[ \tilde{\mathbf{G}}' : \tilde{\mathbf{H}}' \right]$  la matrice vérifiant ces conditions, alors

$$(\mathbf{G} + \tilde{\mathbf{G}}') \mathbf{P}_{TLS} = \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}' \quad (25)$$

soit encore

$$\left\{ \left[ \mathbf{G} : \mathbf{H} \right] + \left[ \tilde{\mathbf{G}}' : \tilde{\mathbf{H}}' \right] \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{TLS} \\ \dots \\ -\mathbf{I}_{M-N} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (26)$$

On pose  $\Delta = \left[ \tilde{\mathbf{G}}' : \tilde{\mathbf{H}}' \right]$

Il s'agit alors de trouver  $\Delta$  de dimension  $(M, M)$ , de norme minimale et telle que  $\Gamma + \Delta$  soit de rang inférieur à  $N+1$ . Ce problème a été résolu dans [7] et passe par la recherche des vecteurs propres de la matrice  $\Gamma^\dagger \Gamma$ . Ces derniers sont les mêmes que ceux de  $\Gamma$  car celle-ci est hermitienne. On montre ici que  $\Delta$  de norme minimale vaut

$$\Delta_{min} = -\Gamma \mathbf{V}_B \mathbf{V}_B^\dagger \quad (27)$$

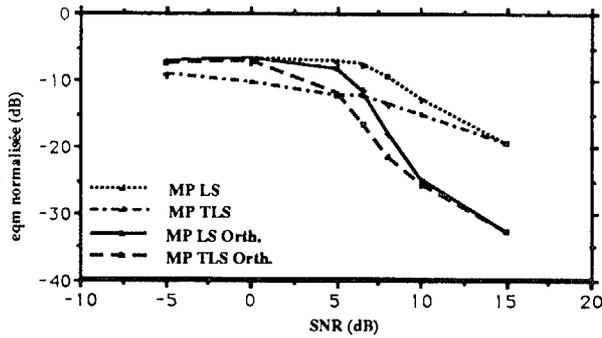


Figure 1: Comparaisons de différentes versions de la MP : 10 capteurs, 100 mesures par essai,  $\Delta\theta = 4$  deg.

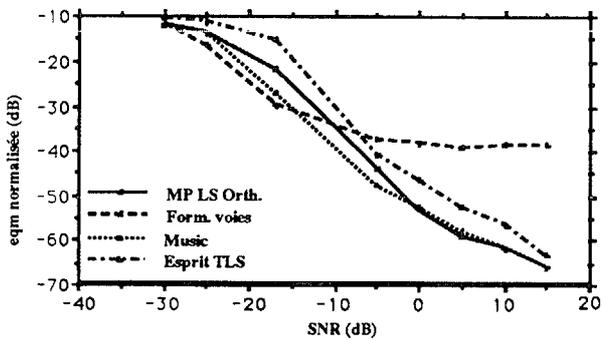


Figure 2: Comparaison de la MPLSO à d'autres méthodes : 20 capteurs, 500 mesures par essai,  $\Delta\theta = 10$  deg.

où  $\mathbf{V}_B$  est définie dans la section 2 et que

$$\mathbf{P}_{TLS} = -\mathbf{V}_{B_1} \mathbf{V}_{B_2}^{-1} \quad (28)$$

Cette dernière équation est identique à (13). On conclut que l'estimateur TLS donne asymptotiquement une solution non biaisée pour le Propagateur ou encore que le processus TLS élimine complètement le bruit pourvu qu'il soit spatialement et temporellement blanc.

## 6 Comparaison des Différentes Versions de la Méthode du Propagateur

Dans cette section nous analysons l'influence d'une part de l'estimation TLS du Propagateur et d'autre part du caractère orthonormé de la base du sous-espace bruit utilisée, sur les performances de la MP pour l'estimation des DDA. Nous comparons les performances de ces différentes versions de la MP à celles des méthodes Music, Esprit et Formation de voies.

Les figures 1 et 2 représentent l'influence du rapport signal sur bruit (SNR) sur l'erreur quadratique moyenne (eqm) des estimateurs étudiés, normalisée par rapport à l'écart angulaire intersource. Les simulations ont été établies à partir de 300 essais sur un modèle ondes planes avec une antenne rectiligne à capteurs équidistants et en présence de 2 sources.

Sur la figure 1 on compare les différentes versions de la MP, sous les conditions suivantes : 10 capteurs, DDA séparées

de 4 degrés ( $\Delta\theta$ ) et  $\Gamma$  estimée à l'aide de 100 échantillons. On constate que pour des SNR élevés, l'orthonormalisation améliore de façon significative l'eqm des estimateurs ; l'utilisation d'une technique TLS se révèle alors inutile. En revanche, pour des SNR faibles l'orthonormalisation est moins robuste que l'estimation TLS. Ceci s'explique par le fait que la recherche des éléments propres (nécessaire à l'estimation TLS du Propagateur) d'une matrice est plus robuste aux perturbations sur les éléments de cette matrice [8] que des opérations telles que l'inversion matricielle (nécessaire à l'orthogonalisation).

Sur la figure 2 on compare la MP LS avec orthonormalisation (MPLSO) aux méthodes de Formation de voies, Music et Esprit TLS sous les conditions suivantes : 20 capteurs, DDA séparées de 10 degrés et  $\Gamma$  estimée à l'aide de 500 échantillons. On constate que la MPLSO est comparable du point de vue des simulations à la méthode Music.

## 7 Conclusion

Le Propagateur permet la construction d'une base du sous-espace bruit, dont le coût en calcul réside (pour la MP LS) dans l'inversion d'une matrice ( $N, N$ ). Ce coût s'avère moins important que celui nécessaire à la recherche des éléments propres de la MI de dimension ( $M, M$ ) (technique utilisée par Music). Cependant, dans les conditions de simulation choisies, les performances de la MP LS sont inférieures à celles de Music.

Notre étude a montré que ces différences provenaient moins de la qualité de l'estimation de la base du sous-espace bruit et du type de calcul mis en œuvre pour cette estimation que du caractère orthonormé ou non de cette base.

Par ailleurs nous avons construit à l'aide du Propagateur une base orthonormée et il semble aisé de rendre adaptative cette orthonormalisation, alors qu'on ne peut adapter simplement la recherche des vecteurs propres d'une matrice.

Il est important de noter que dans d'autres cas (sources corrélées, de puissances différentes, bruit coloré, dont les échantillons sont corrélés, autres modèles pour le vecteur source) le choix d'une base orthonormée peut ne pas être le plus appropriée.

## Références

- [1] J. Munier, "L'Identification de Fronts d'Onde Corrélés et Distordus," *Revue du Traitement du Signal*, vol. 4, 4, 1987.
- [2] J. Munier, G.Y. Delisle, "Spatial Analysis Using New Properties of the Cross-spectral Matrix," *I. E. E. Trans. on A. S. S. P.*, vol. 39, March 1991.
- [3] S. Marcos, M. Benidir, "Source Bearing Estimation and Sensor Positioning with the Propagator Method," *Proc. of S. P. I. E.*, July 1990.
- [4] G. Bienvu, L. Kopp, "Optimality of High Resolution Array Processing Using Eigenstructure Approach," *I. E. E. Trans. on A. S. S. P.*, vol. 31, Oct. 1983.
- [5] R.O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameters Estimation," *Proc. of R. A. D. C. Spectrum Estimation Workshop*, Oct. 1979.
- [6] R. Roy, T. Kailath, "Esprit : Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques," *I. E. E. Trans. on A. S. S. P.*, vol. 37, July 1989.
- [7] G.H. Golub, C.F. Van Loan, "An Analysis of the Total Least Squares Problem," *S. I. A. M. Journal of Numerical Analysis*, vol. 17, 6, Dec 1980.
- [8] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Carendon Press Oxford, 1965.