



INTERPOLATION RATIONNELLE
EN TRAITEMENT D'ANTENNE LARGE BANDE

P. RAVAZZOLA, J.P. LE CADRE

AERO, Qu. Bassaquet, 83140 Six-Fours-Les-Plages, FRANCE
IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, FRANCE

RÉSUMÉ

Le but de cet article est de présenter une méthode de traitement d'antenne large bande originale, fondée sur le principe de la réduction d'un unique modèle spatial défini à une fréquence de référence et représentatif du champ de bruit reçu sur une antenne linéaire (à capteurs équirépartis) dans une bande de fréquences d'analyse donnée.

Cet unique modèle est lui-même obtenu par une procédure d'interpolation-fusion de modèles rationnels bande étroite estimés à partir d'une modélisation multidimensionnelle large bande des sorties des capteurs.

Le problème de la réduction de modèle est traité dans le cadre général de l'analyse fonctionnelle et conduit à l'élaboration d'une méthode robuste vis-à-vis de bruits fortement corrélés spatialement et ayant de très bonnes performances en détection de sources faibles.

ABSTRACT

The aim of this paper is to introduce an original wide band array processing method that is based on the reduction of a unique spatial model defined at a reference frequency and which represents the whole sound field impinged on a linear array (with equispaced sensors) for a given frequency band of analysis.

This unique model is itself derived from an interpolation-fusion procedure of rational narrowband models which are estimated from a multidimensional wide band modelling of the sensor outputs.

The reduction problem is considered in the general frame of functional analysis and leads to the elaboration of a method which is robust w.r.t. spatially highly correlated noises and presents very good performances for weak source detection.

1- Introduction - Contexte

L'analyse spatiale large bande a été l'objet de nombreux développements récents, motivés par le besoin d'améliorer les performances du traitement d'antenne. Il est vrai que dans le domaine de l'acoustique sous-marine par exemple, les sources émettent des signaux large bande et par conséquent, l'amélioration du gain de traitement passe par une analyse dans une bande de fréquences où le signal est présent, permettant ainsi de prendre en compte plus d'informations sur le signal.

Les méthodes temporelles d'analyse spatiale qui sont intrinsèquement large bande apparaissent alors comme des solutions "naturelles". Malheureusement, ces méthodes qui sont les seules vraies méthodes large bande nécessitent une charge de calculs élevée, et ont un faible pouvoir de résolution du fait des défauts de structure de la matrice de covariance spatio-temporelle des sorties de capteurs estimée.

Pour remédier à ces inconvénients, de nombreuses méthodes d'analyse multifréquences que l'on qualifie encore de large bande par abus, ont été élaborées en se basant sur des principes de l'analyse haute résolution bande étroite. On espère obtenir de ce type de traitement des performances identiques au traitement bande étroite à produit BT équivalent (en augmentant la largeur de la bande d'analyse B et en diminuant le temps d'intégration T). Reste à déterminer la façon d'utiliser l'information présente à chaque fréquence.

Une façon simple d'opérer, consiste à effectuer une analyse bande étroite à chaque fréquence d'analyse (bin) d'une bande B où le signal est présent et à recombinaison les résultats en sommant les réponses de toutes les analyses. Cette méthode d'intégration fréquentielle ne tient pas compte du fait que les

vecteurs sources sont produits à chaque fréquence par les mêmes sources et est en ce sens incohérente. La charge de calculs d'une telle méthode est très importante et le pouvoir de résolution est dégradé du fait de la moyenne incohérente. Cette méthode n'utilise donc pas au mieux les informations disponibles à chaque fréquence pour localiser les sources.

Il se pose donc le problème de déterminer une méthode d'analyse multifréquences fondée sur l'estimation d'un sous-espace source unique obtenu en intégrant de façon cohérente les informations disponibles à chaque fréquence. Pour une antenne rectiligne à capteurs équirépartis, plusieurs solutions utilisant des techniques de focalisation spatiale ont été proposées.

Parmi celles-ci on distingue deux classes principales : celles nécessitant des informations a priori sur les positions des sources [1] et celles ne nécessitant aucune connaissance a priori [2]. L'inconvénient majeur des premières est que ces méthodes sont tributaires d'une estimation préalable de la position des sources. Les méthodes du second groupe sont fondées sur la détermination de transformations indépendantes des gisements des sources qui focalisent les vecteurs sources à une fréquence de référence. Cette focalisation entraîne une corrélation du bruit qu'il est aisé d'éliminer puisque l'on connaît les transformations agissant sur les signaux. Ces méthodes permettent d'obtenir des performances comparables à celles obtenues par l'analyse bande étroite à BT équivalent, leur principal objectif étant l'amélioration du pouvoir de résolution par rapport à la formation de voies conventionnelles.

Cependant, dans de nombreuses situations pratiques, le problème essentiel est la détection des sources faibles. Dans ce but, il a été proposé en traitement d'antenne bande étroite, d'utiliser une méthode de réduction de modèle [3]. Ce type de



méthode améliore considérablement la détection de sources faibles relativement aux autres méthodes haute résolution, et est robuste vis-à-vis de la corrélation spatiale du bruit. Il est donc intéressant d'étendre cette méthode à l'analyse large bande.

L'extension la plus simple à réaliser consiste à estimer un modèle large bande des sorties de capteurs, d'en déduire un modèle rationnel à chaque fréquence d'analyse de la bande considérée, puis d'interpoler ces modèles à une fréquence de référence pour en déduire de façon cohérente un modèle rationnel unique représentant toute la bande d'analyse. Cette fusion des modèles interpolés est justifiée par le fait qu'après interpolation, les modèles ont des facteurs rationnels communs qui correspondent aux contributions des sources dont les gisements sont bien évidemment indépendants de la fréquence. Sur ce modèle obtenu à la fréquence de fusion, on peut appliquer la méthode de réduction de modèle bande étroite pour obtenir l'estimation multifréquences des positions des sources.

Par principe, cette approche n'utilise aucune hypothèse a priori sur les modèles des sources (gisements, densités spectrales de puissance) et la charge de calculs reste raisonnable. De plus, cette extension multifréquences de la méthode de réduction de modèle bande étroite se veut d'utiliser au mieux les hypothèses fondamentales de l'acoustique sous-marine (propagation en onde plane et stationnarité spatiale), ce qui lui confère une grande robustesse en présence de bruits fortement corrélés spatialement et de très bonnes performances pour la détection de sources faibles.

2- Présentation générale de la réduction de modèle bande étroite [4]

2.1 Introduction

D'une manière générale, les méthodes haute résolution utilisent un modèle paramétrique des observations pour séparer les contributions des sources et du bruit dans l'espace des observations. Malheureusement, l'emploi de ces techniques usuelles ne permet pas de préserver la structure particulière (Toeplitz ou Hankel) liée au sous-espace et induite par les hypothèses onde plane et de stationnarité spatiale. Cette perte de structure se traduit par une perturbation du sous-espace source estimé, gênant ainsi la détection des sources faibles. Pour obtenir des performances intéressantes en détection, on doit alors considérer le problème fondamental de l'estimation d'un sous-espace de structure imposée.

La méthode proposée [3] pour résoudre ce problème consiste à identifier les observations à l'aide d'un modèle rationnel (scalaire spatial) d'ordre maximal à partir duquel on estime le sous-espace source de dimension réduite grâce à une réduction de modèle optimale (au sens de la conservation de la structure).

Le point de départ de la méthode est l'identification d'un modèle rationnel d'ordre maximal décrivant le plus finement possible les observations. En fait, le modèle AR est a priori bien adapté pour modéliser des raies spatiales, et avec un ordre élevé, il a un bon comportement vis-à-vis du bruit. L'estimation d'un modèle AR d'ordre maximum (i.e. le nombre de capteurs moins un par la méthode du maximum d'entropie rassemble toutes les propriétés demandées pour l'identification (pas de perte d'informations entre les covariances calculées et les paramètres du modèle estimé).

Le problème de la réduction de modèle peut alors se poser en termes d'approximation de la matrice de Hankel du modèle estimé par une matrice de Hankel d'ordre réduit, ou encore, en termes d'approximation du modèle rationnel de longueur maximale estimé par un modèle rationnel d'ordre réduit. La théorie de l'approximation des fonctions rationnelles dans les espaces de Hardy développée par Adamjan, Arov et Krein constitue le cadre théorique de la solution de ce problème.

2.2 Cadre théorique

Le problème de la réduction de modèle peut se poser de la façon suivante: étant donnée une fonction rationnelle initiale f_n d'ordre élevé n , stable et à minimum de phase, déterminer la fonction rationnelle f_p , stable, d'ordre réduit $p < n$, qui ne retienne de la fonction initiale que l'information "utile". Cette expression souligne la volonté de conserver la structure du problème (approximation d'une fonction rationnelle par une autre fonction rationnelle) et soulève les questions de mesure d'erreur d'approximation, de sensibilité et de complexité de la solution. Dans notre contexte, on est naturellement amené à considérer une fonction d'erreur sur les réponses impulsionnelles associées aux fonctions rationnelles $f_n(z)$ et $f_p(z)$, ou encore, sur les matrices infinies de Hankel des réponses impulsionnelles. On définit alors la norme de Hankel de l'erreur d'approximation ($f_n(z) - f_p(z)$) comme la norme spectrale de la différence des matrices de Hankel infinies correspondantes ($H_{f_n} - H_{f_p}$):

$$\|f_n(z) - f_p(z)\|_H = \|H_{f_n} - H_{f_p}\|_S \quad (1)$$

L'utilisation de la norme de Hankel présente de nombreux avantages, tant du point de vue de la sensibilité puisqu'elle est liée aux valeurs singulières d'une matrice de Hankel, que du point de vue de la complexité puisqu'elle conduit à une solution explicite non itérative que nous allons présenter maintenant.

En utilisant le théorème de Nehari, le problème d'approximation (1) peut être immergé dans un problème d'approximation selon la norme L_∞ [4]:

$$\inf_{\varphi \in H_{\infty,p}} \|f_n - \varphi\|_\infty \quad (2)$$

où $H_{\infty,p}$ est l'ensemble des fonctions méromorphes de L_∞ qui peuvent s'écrire sous la forme:

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_p)}$$

avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathcal{D}(0,1)$ et $g \in H_\infty$ (sous-ensemble de L_∞ des fonctions qui sont analytiques dans $\mathcal{D}(0,1)$).

La solution de ce difficile problème est donnée par le théorème d'Adamjan et al (AAK).

Théorème AAK: étant donné $f_n \in L_\infty$ ayant n pôles dans $\mathcal{D}(0,1)$ et un entier p compris entre 0 et n , on a:

$$\inf_{\varphi \in H_{\infty,p}} \|f_n - \varphi\|_\infty = \sigma_{p+1} \quad (3)$$

où σ_{p+1} est la $(p+1)$ -ème valeur singulière de H_{f_n} .

De plus, cette borne est atteinte pour une unique fonction $\varphi_p \in H_{\infty,p}$:

$$\varphi_p(z) = f_n(z) - \sigma_{p+1} \frac{u_{p+1}(z)}{v_{p+1}(z)} \quad (4)$$

où (u_{p+1}, v_{p+1}) est la paire de Schmidt de H_{f_n} correspondant à σ_{p+1} : $H_{f_n} v_{p+1} = \sigma_{p+1} u_{p+1}$

$$\text{ct } u_{p+1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{p+1} z^{-i}, \quad v_{p+1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{p+1} z^{i-1}$$

u_i^{p+1} et v_i^{p+1} étant respectivement la i -ème composante de u_{p+1} et v_{p+1} .

De la solution du problème (2), on déduit alors la solution du problème initial en ne retenant que la partie strictement propre et stable : $f_p(z) = [\varphi_p(z)]_-$.

Ce résultat très intéressant n'est cependant pas directement applicable du fait de la nécessité de calculer les éléments singuliers d'une matrice de Hankel de dimension infinie.

En utilisant les propriétés des systèmes linéaires, notamment les transformations équilibrées, une mise en oeuvre pratique de cette solution peut être réalisée.

2.3 Mise en oeuvre pratique

La solution du problème de réduction de modèle proposée par Adamjan et al. est explicite mais difficilement réalisable du fait de son expression en termes de quotient de séries infinies. En utilisant certaines propriétés des systèmes linéaires, on peut construire une solution en tenant compte de la structure finie du problème.

Pour cela, on considère une fonction rationnelle stable initiale pouvant s'écrire sous la forme :

$$f_n(z) = 1 + \frac{n(z)}{d(z)} \quad (5)$$

où $\frac{n(z)}{d(z)}$ est la partie strictement propre de $f_n(z)$, $d(z)$ étant de degré égal à n et $n(z)$ de degré strictement inférieur à n .

En notant $\varphi_p(z) = \frac{p(z)}{\tilde{m}(z)}$, avec $\tilde{m}(z) = z^{n-1} m^*(z^{-1})$, la meilleure approximation de rang p selon la norme L_∞ de $\frac{n(z)}{d(z)}$, on obtient à partir de l'équation (4) [3] :

$$p(z) d(z) = n(z) \tilde{m}(z) - \lambda \tilde{d}(z) m(z) \quad (6)$$

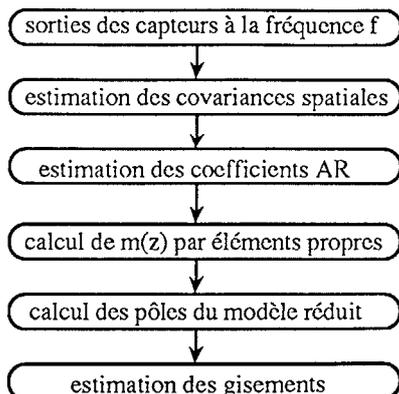
$$\text{avec } |\lambda| = \sigma_{p+1}$$

Cette équation polynomiale qui est à la base de la procédure de réduction de modèle peut être résolue en utilisant un formalisme matriciel, lequel conduit après décomplexification à un problème d'éléments propres généralisés de dimension $2n$ dont le vecteur propre correspondant à la $(p+1)$ -ème plus grande valeur propre contient les coefficients du polynôme $m(z)$.

On obtient alors aisément l'estimation des gisements des sources en calculant les p racines de $\tilde{m}(z)$ qui sont dans $\mathcal{D}(0,1)$.

Noter qu'il est inutile ici de calculer le numérateur de la fonction d'approximation puisque l'information sur la position des sources est contenue dans les pôles "stables" du dénominateur de celle-ci.

Par ailleurs, l'utilisation d'un modèle AR initial permet de simplifier la procédure ($n(z)=1$) en remplaçant le calcul d'éléments propres généralisés par un problème d'éléments propres simples.



Synoptique de la méthode de réduction de modèle

Remarque : le choix de l'ordre du modèle réduit (=nombre de sources) est déterminé par le choix de la valeur propre dans le calcul de $m(z)$.

3- Lien avec l'analyse large bande

Dans le but de bénéficier du bon comportement de la méthode de réduction de modèle (en détection de sources faibles et en robustesse contre un bruit de corrélation spatiale inconnue), et d'améliorer encore les performances en détection, il est intéressant d'étudier l'extension de la méthode précédente à l'analyse large bande.

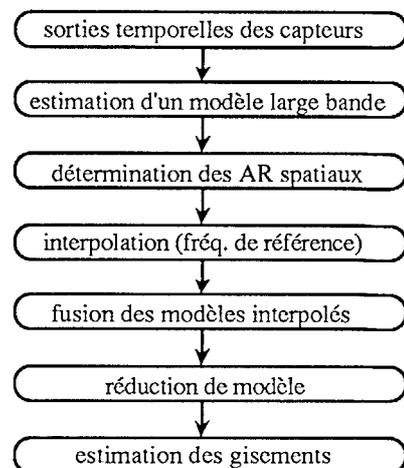
Dans le cas bande étroite, un modèle AR spatial d'ordre maximum est estimé à partir de la matrice interspectrale des observations et est ensuite réduit au moyen de la méthode de réduction de modèle optimale. Dans le cas large bande, la donnée des sorties temporelles des capteurs permet d'estimer un modèle AR vectoriel à partir duquel on désire estimer un unique modèle AR spatial scalaire d'ordre maximum, résumant l'ensemble des informations disponibles dans la bande d'analyse, puis réduire celui-ci comme dans le cas bande étroite.

4- Présentation générale de l'analyse large bande

L'étape initiale de l'analyse spatiale large bande proposée ici consiste en une modélisation rationnelle multidimensionnelle des sorties temporelles de capteurs décrivant finement le champ de bruit reçu sur l'antenne.

A partir de ce modèle, il s'agit alors de déterminer les modèles AR spatiaux à chaque fréquence d'analyse f_1 de la bande considérée $B=[f_1, f_2]$, d'interpoler à une fréquence de référence f_0 les modèles précédemment déterminés, d'effectuer l'agrégation (fusion) des modèles interpolés pour en déduire un modèle Spatial unique à la fréquence de référence, représentant toute la bande d'analyse. L'application de la méthode de réduction à ce modèle interpolé et fusionné permet ensuite d'obtenir une estimation multifréquences des gisements des sources présentes dans le champ de bruit reçu sur l'antenne.

Cette procédure utilise des opérations élémentaires (modélisation vectorielle, interpolation, fusion) dont la mise en oeuvre peut s'effectuer de plusieurs façons.



Synoptique de l'analyse multifréquences

5- Description des opérations élémentaires

5.1 Estimation d'un modèle vectoriel large bande

La modélisation AR vectorielle des sorties de capteurs constitue l'étape d'initialisation de la procédure :



$$\mathbf{X}_t = \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \mathbf{X}_{t-i} + \mathbf{N}_t \quad (7)$$

où \mathbf{N}_t est un bruit blanc et $\{\mathbf{A}_i\}$ sont les paramètres du modèle AR temporel, multidimensionnel.

Les coefficients matriciels $\{\mathbf{A}_i\}$ peuvent être estimés par l'algorithme de Levinson-Wiggins par exemple en choisissant q , l'ordre du modèle, arbitrairement grand afin que la matrice de covariance de l'erreur de prédiction Σ_q soit diagonale.

De ce modèle, on déduit alors aisément la matrice interspectrale à chaque fréquence Γ_{f_i} (rendue de Toeplitz positive) et les modèles AR spatiaux correspondants.

5.2 Interpolation

Afin de réaliser une intégration cohérente en fréquence, il est maintenant nécessaire d'interpoler à une fréquence de référence f_0 tous les modèles obtenus (focalisation). Cette opération est justifiée par le fait qu'à chaque fréquence, les pôles du modèle relatifs aux sources sont produits par les mêmes sources; l'interpolation consiste donc à aligner ces pôles.

- interpolation des covariances spatiales estimées à la fréquence f_i .

Etant donné la correspondance entre coefficients AR et covariances spatiales, l'interpolation peut s'effectuer sur les covariances :

$$r(f_0, kd) = r(f_i, \frac{f_0}{f_i} kd) \quad (8)$$

où $r(f, \alpha d)$ est la covariance à la fréquence f de deux capteurs éventuellement fictifs, distants de α fois d (d étant la distance intercapteurs de l'antenne réelle). On montre alors que fonction de covariance spatiale $\{r(f_0, kd), k=0,1,\dots,n\}$ peut être estimée par transformée de Fourier de la densité spatiale du modèle AR obtenu à chaque fréquence d'analyse [4].

- interpolation du polynôme AR estimé à la fréquence f_i .

A la fréquence f_i , on a obtenu la fonction de transfert d'un modèle AR définie comme l'inverse du polynôme suivant :

$$AR_{f_i}(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_{i,k}) \quad (9)$$

avec $|z_{i,k}| < 1$, l'indice i décrivant les fréquences et k les pôles du modèle (zéros du polynôme $AR_{f_i}(z)$).

Entre une fréquence courante f_i et la fréquence de référence f_0 , il existe pour les pôles relatifs aux sources la relation simple suivante :

$$z_{i,k} = (z_k)^{f_i/f_0} \quad (10)$$

A partir du polynôme $AR_{f_i}(z)$, on peut donc définir un polynôme $AR_{f_i \rightarrow f_0}(z)$ à la fréquence de référence :

$$AR_{f_i \rightarrow f_0}(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) \quad (11)$$

avec z_k vérifiant (10).

On voit qu'il est alors possible d'utiliser la formule d'interpolation de Lagrange (sur le cercle unité) pour déterminer la fonction AR interpolée :

$$AR_{f_i \rightarrow f_0}(z) = P(z) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{AR_{f_i \rightarrow f_0}(z_k)}{P_k(z_k) (1 - z_k z^{-1})} \quad (12)$$

$$\text{avec } P(z) = \prod_{i=1}^n (1 - z_i z^{-1}) \text{ et } P_k(z_k) = \prod_{i=1, i \neq k}^n (1 - z_i z_k^{-1})$$

5.3 Fusion des modèles

L'étape précédente a permis d'interpoler à une fréquence de référence, les modèles estimés en divers bins de fréquence.

Il s'agit maintenant d'effectuer la fusion des modèles interpolés pour obtenir un modèle AR spatial unique.

La méthode de fusion dépend de la procédure d'interpolation .

- fusion des modèles interpolés à partir des covariances spatiales

La procédure d'interpolation ayant fourni un ensemble de fonctions de covariance spatiale estimées à la fréquence de référence, on en déduit aisément un unique modèle AR spatial au sens des moindres carrés [4].

- fusion des modèles interpolés à partir des fonctions polynomiales

A partir des polynômes interpolés $AR_{f_i \rightarrow f_0}(z)$, on peut déterminer un modèle AR représentatif de la bande d'analyse comme solution d'un problème de minimisation suivant la norme L_2 d'un critère d'erreur :

$$\text{Min}_{AR(z)_{f_i \in B}} \sum \left\| \frac{1}{AR(z)} - \frac{1}{AR_{f_i \rightarrow f_0}(z)} \right\|_{L_2}^2 \quad (13)$$

En supposant que les fonctions estimées sont indépendantes, la solution de ce problème s'obtient comme extension simple de résultats bien connus [5-6].

Il est donc clair maintenant que, quel que soit la procédure d'interpolation-fusion utilisée, il est possible de déterminer un modèle AR spatial représentatif de la bande d'analyse sur lequel on peut appliquer la méthode de réduction pour obtenir une estimation multifréquences des gisements des sources.

6- Résultats de simulations - Conclusion

On propose ici de modifier l'exemple utilisé dans [7] en abaissant de 3 dB le niveau de la source faible et en prenant un BT de 210 au lieu de 400. L'antenne considérée est composée de 16 capteurs ($d=c/(2f_e)$).

On simule 5 sources de gisements et niveaux par bin de fréquence : (85°, 0 dB), (78°, 0 dB), (65°, -13 dB), (37°, 0 dB) et (26°, 0 dB), le travers de l'antenne correspondant à 90°, et on compare les performances en détection de la méthode proposée à celles du goniomètre bande étroite à BT équivalent.

Sur 10 réalisations indépendantes, le goniomètre appliqué à $f = 0,44 f_e$ détecte 3 fois la source de gisement 65 degrés, alors que la méthode proposée appliquée à partir de 7 bins de fréquence dans la bande [0,38 ; 0,44] et fusion à la fréquence normalisée 0,38 détecte 10 fois la source faible.

L'extension multifréquences proposée de la méthode de réduction de modèle permet donc de conserver l'avantage acquis en performances de détection bande étroite, ceci pour une charge de calculs qui reste raisonnable.

- [1] H. Wang et al, IEEE Trans ASSP, 1985, Vol 33 (4), pp 823-831
- [2] G. Vezzosi et al, XII Colloque GRETSI, 1989, pp 449-452
- [3] J.P. Le Cadre et al, XII Colloque GRETSI, 1989, pp 485-488
- [4] P. Ravazzola, thèse de doctorat de l'INP Grenoble, 1990
- [5] B. Porat et al, Int J. Control, 1984, Vol 39 (1), pp 95-113
- [6] Y. Inouye et al, Proc Int Symp MTNS 89 vol 1 Birkhäuser 1990
- [7] D. N. Swingler et al, Proc ICASSP 1988, pp 2658-2661