

**POURSUITE DES NON-STATIONNARITES RAPIDES  
PAR MODELISATION COMPLEMENTAIRE**

**M. KARMOUCHE, M. LAMOTTE, F. SMIEJ**

**Centre de Recherche en Automatique de Nancy-LEA, URA 821  
BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France**

**RÉSUMÉ**

Dans cet article une nouvelle méthode est présentée : la méthode de poursuite des non-stationnarités rapides par modélisation complémentaire. Elle consiste à traiter le signal rapidement non-stationnaire en le filtrant par deux filtres : l'un passe-bas l'autre passe-haut, ayant chacun des largeurs de bande complémentaires. Ensuite on modélise chacun des deux signaux par une version du filtre de Kalman adaptée aux situations non-stationnaires; la structure du modèle choisi est une structure AR. Le modèle du signal de départ est alors déduit des deux modèles précédents : à partir des coefficients des deux filtres d'une part et de ceux des deux modèles AR d'autre part.

**1. INTRODUCTION**

Le problème de la poursuite des variations temporelles de la dynamique ou des propriétés d'un système est un problème fondamental en traitement du signal et en théorie de la commande. Plusieurs auteurs ont essayé de résoudre ce problème soit en adaptant des techniques stationnaires aux situations non-stationnaires ([1]-[4]), soit en fabriquant de nouveaux algorithmes capables de détecter des non-stationnarités [5], soit enfin en utilisant des techniques non-paramétriques telles que les distributions et les représentations temps-fréquence [6]. Toutes ces techniques possèdent des limitations suivant le type de non-stationnarités, ainsi pour des non-stationnarités "rapides" ces algorithmes n'arrivent plus à suivre et présentent alors des failles.

Dans cet article nous présentons une méthode de poursuite des non-stationnarités rapides. Elle est basée sur la construction d'un modèle de structure complexe à partir de deux modèles simples, chacun d'entre eux tenant compte d'informations différentes et complémentaires. Ces informations sont de nature fréquentielle respectivement de basses et de hautes fréquences, ce qui nous permet de suivre de plus près les non-stationnarités contenues dans le signal.

**2. METHODE DE POURSUITE PAR MODELISATION COMPLEMENTAIRE**

Le principe de la méthode est donné par le schéma bloc de la figure 1 où apparaissent les trois étapes du traitement : dans la

**ABSTRACT**

In this paper we propose a new method for the tracking of rapidly time-varying processes with a complementary modelling. This method is based on filtering the signal with two complementary filters (high and low), both these signals are modelled with an AR-structure. AR coefficients are determined by an adaptive Kalman filter adapted to time-varying processes. AR-model of rapidly non-stationary signal is obtained by a synthesis of the two AR-models of filtered signals and the expression of the filters.

première étape nous analysons le signal de départ en deux signaux "complémentaires". La deuxième consiste à modéliser les deux signaux par des modèles AR et à calculer les coefficients de ces modèles par l'algorithme du filtre de Kalman adapté aux situations non-stationnaires. Enfin, la dernière étape procède à la synthèse du modèle final du signal de départ.

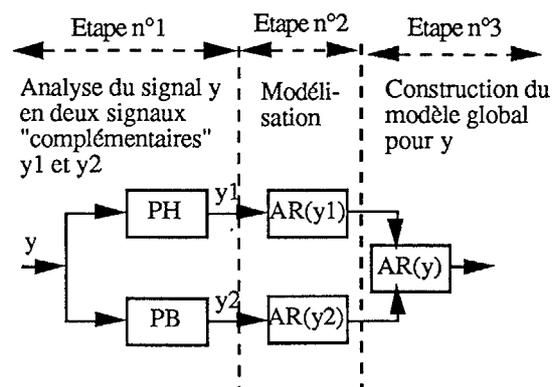


Fig.1 Principe de la méthode.

Première étape : "détermination des filtres"

La méthode est basée sur le principe de complémentarité : l'information contenue dans le signal de départ doit se retrouver séparée suivant les deux signaux y1 et y2, donc il n'y a aucune perte d'information. Cette complémentarité est obtenue en filtrant



le signal  $y$  par deux filtres, l'un passe-bas (PB) et l'autre passe-haut (PH) (figure 2).

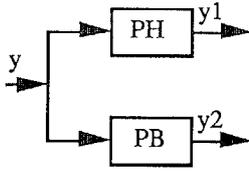


Fig.2 Choix des filtres

Considérant la figure 2, on a :

$y1(t) = PH*y(t)$  et  $y2(t) = PB*y(t)$  et on veut :  $y(t) = y1(t) + y2(t)$   
alors  $y1(t) + y2(t) = (PH + PB)*y(t)$ , cette somme doit donner  $y$   
d'où :

$$PH + PB = \delta(t) \quad (1)$$

autrement dit les bandes de PH et de PB sont complémentaires. Suivant le problème à traiter, ou les informations que l'on dispose sur le signal, on fixe un filtre, l'autre est déterminé en fonction du premier par la relation (1) et on a :

$$y(t) = y1(t) + y2(t) \quad (2)$$

Dans cette étape nous avons partagé l'information contenue dans le signal  $y$  suivant les deux signaux  $y1$  et  $y2$  que nous allons traiter séparément par la suite.

#### Deuxième étape : "calcul des coefficients AR de $y1$ et $y2$ "

On commence par modéliser les deux signaux  $y1$  et  $y2$  par deux modèles AR respectivement d'ordre  $p1$  et  $p2$  et dont les coefficients dépendent du temps, donc on peut écrire :

$$y1(t) = - \sum_{i=1}^{p1} a_i(t)y1(t-i) + e1(t) \quad (3)$$

$$y2(t) = - \sum_{i=1}^{p2} b_i(t)y2(t-i) + e2(t) \quad (4)$$

$e1$  et  $e2$  sont les résidus des deux modèles AR. Le calcul des coefficients se fait à l'aide d'une version du filtre de Kalman qui tient compte des non-stationnarités [7], et dont l'algorithme utilise le modèle choisi sous la forme d'équations d'état :

$$\begin{cases} x(t) = \varphi^T(t)\theta(t) + v(t) \\ \theta(t) = \theta(t-1) + w(t) \end{cases} \text{ où } x(t) = y1(t) \text{ ou } y2(t) \quad (5-a)$$

La première expression est l'équation aux différences du

signal étudié  $x(t)$  avec  $\varphi(t)$  le vecteur des observations et  $v(t)$  le bruit de mesure, la deuxième exprime les variations du vecteur des paramètres  $\theta(t)$  suivant une loi gaussienne, car pour se placer dans les hypothèses du filtre de Kalman linéaire on doit considérer  $w(t)$  comme bruit gaussien [5].

On suppose, dans ce qui suit, que  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien, et on introduit la matrice  $R_1(t)$  [4] telle que :

$$\begin{cases} E(w(t)w^T(t)) = R_1(t) \\ E(v(t)v^T(t)) = R_2(t) \end{cases} \quad (5-b)$$

On obtient la forme générale de l'algorithme du filtre de Kalman [8] :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t)\varepsilon(t) \quad (6-a)$$

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (6-b)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{R_2(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (6-c)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{R_2(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} + R_1(t) \quad (6-d)$$

où  $L(t)$  est le gain de l'algorithme,  $\varepsilon(t)$  est l'erreur d'estimation et  $P(t)$  est l'estimée de la variance des erreurs des paramètres.

L'avantage de cet algorithme est que la matrice  $P(t)$  tient compte des variations du système "propre" (N.B : l'ajout de  $R_1(t)$  dans  $P(t)$  empêche  $L(t)$  de tendre vers zéro, et prend en compte les variations qui sont supposées être dues à  $w(t)$ ).

#### Troisième étape : "synthèse du modèle AR du signal $y$ "

Ayant les coefficients des deux modèles de  $y1$  et  $y2$ , nous allons construire le modèle AR du signal  $y$  en utilisant la relation (2) et l'expression des deux filtres PH et PB. Pour cela on suppose que le signal  $y$  est généré par un modèle AR d'ordre  $p$  :

$$y(t) = - \sum_{i=1}^p \mu_i(t)y(t-i) + e(t) \quad (7)$$

Soit  $q$  l'opérateur retard i.e.  $y(t)q^{-1} = y(t-1)$ , et prenons un premier ordre pour les deux filtres PB et PH :  $\frac{1-q^{-1}}{2}$  la réponse

du filtre PB et  $\frac{1+q^{-1}}{2}$  la réponse du filtre PH. Pour une simplification des calculs nous avons choisi un premier ordre pour les deux filtres, toutefois nous donnerons la forme générale par la suite. Calculons les coefficients du modèle AR de  $y$  :

$$\begin{aligned} y(t) = y1(t) + y2(t) &= - \sum_{i=1}^{p1} a_i(t)y1(t-i) - \sum_{i=1}^{p2} b_i(t)y2(t-i) \\ &\quad + e1(t) + e2(t) \\ y(t) &= - \sum_{i=1}^{p1} a_i(t)y1(t-i) - \sum_{i=p1+1}^{p2+p1} b_{i-p1}(t)y2(t-i+p1) \\ &\quad + e1(t) + e2(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = - \sum_{i=1}^{p1} a_i(t) \frac{y(t-i) + y(t-i-1)}{2} -$$

$$\sum_{i=p1+1}^{p2+p1} b_{i-p1}(t) \frac{y(t-i+p1) - y(t-i+p1-1)}{2} + e1(t) + e2(t)$$

On identifie alors cette forme avec l'expression du modèle AR du signal  $y$ , donné par l'équation (7), et on trouve :

$$\begin{cases} \mu_1(t) = \frac{a_1(t)}{2} \\ \mu_i(t) = \frac{a_i(t) - a_{i-1}(t)}{2} \text{ pour } 2 \leq i \leq p1 \\ \mu_i(t) = \frac{b_{i-p1}(t) + b_{i-p1-1}(t)}{2} \text{ pour } p1+1 \leq i \leq p1+p2 \\ \mu_{p1+p2+1}(t) = \frac{b_{p2}(t)}{2} \end{cases} \quad (8)$$

Donc l'équation (8) donne la forme des coefficients AR du signal  $y$  en fonction de ceux de  $y1$  et  $y2$  pour des filtres du premier ordre. Pour des filtres d'ordre 2 :

$$PH(q) = \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2} \quad (9)$$

et d'après la relation (1) on peut déterminer l'expression de PB :

$$PB(q) = 1 - PH(q)$$

$$PB(q) = 1 - \beta_0 - \beta_1 q^{-1} - \beta_2 q^{-2} \quad (10)$$

En supposant que les ordres des deux modèles AR sont égaux à  $p$ , la forme générale des coefficients AR du signal  $y$  est donnée par les relations suivantes :

$$\mu_1(t) = \beta_0 a_1(t) + (1 - \beta_0) b_1(t) \quad (11-a)$$

$$\mu_2(t) = \beta_0 a_2(t) + \beta_1 a_1(t) + (1 - \beta_0) b_2(t) - \beta_1 b_1(t) \quad (11-b)$$

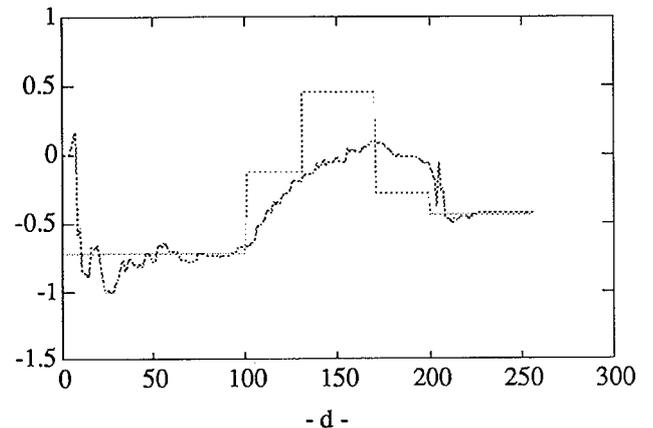
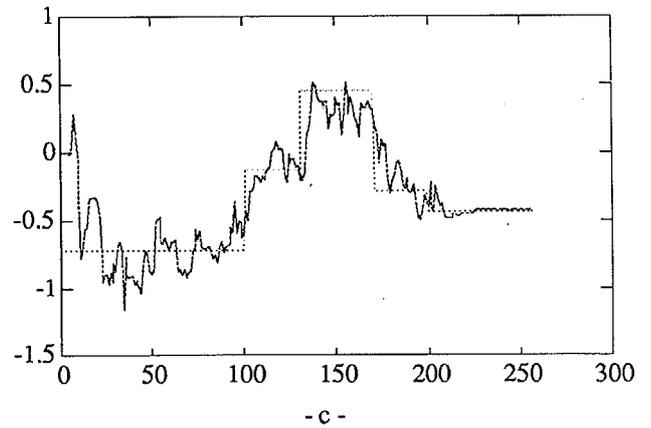
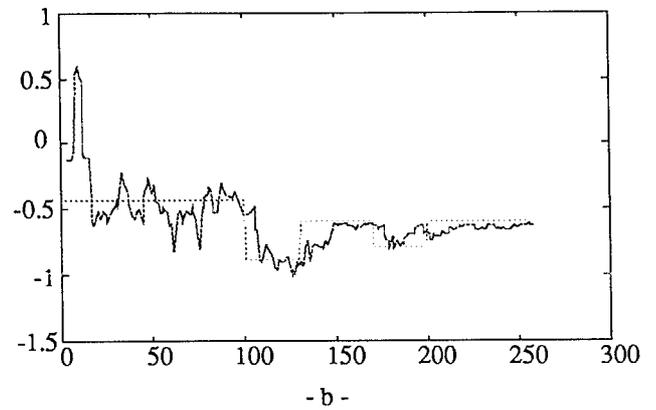
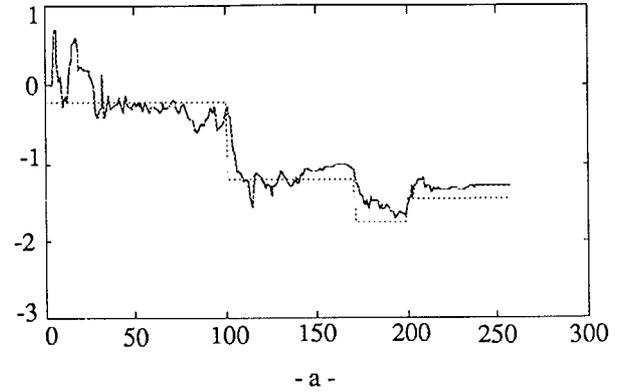
$$\mu_i(t) = \beta_0 a_i(t) + \beta_1 a_{i-1}(t) + \beta_2 a_{i-2}(t) - (1 - \beta_0) b_i(t) - \beta_1 b_{i-1}(t) - \beta_2 b_{i-2}(t) \text{ pour } 3 \leq i \leq p \quad (11-c)$$

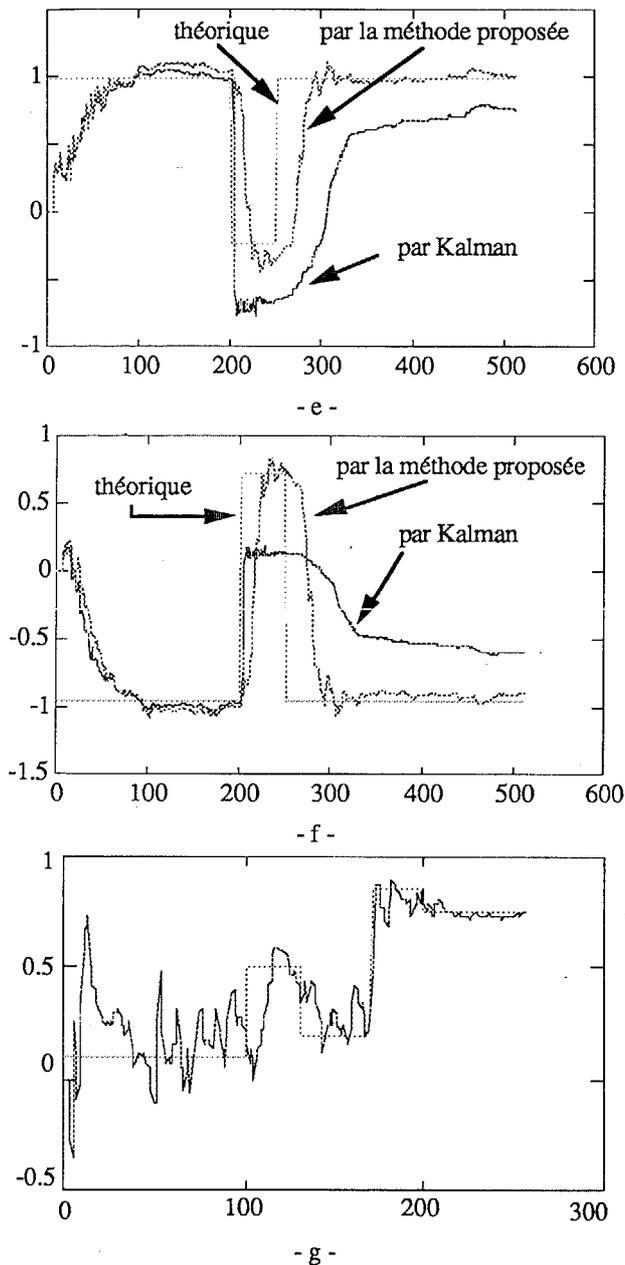
On remarque que l'expression des coefficients AR du signal  $y$  devient déjà complexe à l'ordre 2. Pour un ordre  $n$  des filtres PH et PB l'expression du modèle AR obtenu est très complexe; ainsi nous devons choisir  $n$  inférieur à l'ordre des deux modèles AR des signaux  $y1$  et  $y2$  pour pouvoir exprimer tous les coefficients du modèle AR en fonction des coefficients des deux filtres (exemple : (11-c)).

### 3. APPLICATION

Dans cette partie nous allons procéder à la validation de la méthode proposée sur des signaux simulés. Cette simulation consiste en la création d'un signal ayant la structure d'un modèle

AR dont les fréquences, donc les coefficients, changent rapidement dans le temps. Ces signaux sont par la suite traités par l'algorithme du filtre de Kalman tenant compte des non-stationnarités, nous remarquons une meilleure poursuite des variations par la méthode proposée.





Les figures a) et b) montrent les variations simulées (trait pointillé) et la poursuite de ces variations par la méthode proposée (trait plein). Pendant une durée de 100 échantillons, il y a trois variations pour la figure a) et quatre variations pour la figure b) avec une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz. La figure c) présente également quatre variations alors que la figure d) montre la poursuite du même coefficient avec l'algorithme du filtre de Kalman; on voit bien les capacités de la méthode proposée pour des variations assez rapides. Les figures e) et f) montrent une comparaison, pour deux variations, entre la méthode proposée et celle de Kalman. Enfin la figure g) est une simulation quand les changements des fréquences se trouvent dans une bande transitoire entre le PH et le PB.

#### 4. CONCLUSION

La méthode présentée dans cet article nous permet, dans une première étape, d'avoir deux modèles AR, le premier prend en

compte les variations (ou les non-stationnarités) qui ont lieu dans les basses fréquences tandis que le deuxième prend celles des hautes fréquences. Le modèle du signal de départ est alors déduit des deux modèles AR des signaux filtrés : à partir des coefficients des deux filtres d'une part et de ceux des deux modèles AR d'autre part. La complexité de la relation qui lie les différents coefficients AR dépend du choix des filtres PB et PH. Le modèle obtenu est plus complexe que le modèle AR déduit directement du signal, car il a reçu une information supplémentaire : celle de traiter différemment et donc de discriminer les hautes et les basses fréquences.

L'utilisation de cette méthode demande un bon choix des ordres des modèles AR et des ordres des deux filtres. Mais toutefois, si l'on possède des informations *a priori* sur le signal (ou le processus) à étudier, on fixe alors l'un des filtres, l'autre est déterminé par la relation (1).

D'après les simulations effectuées ci-dessus, on remarque des capacités de poursuite qui sont nettement meilleures que celles d'un algorithme adaptatif, car la pondération des changements est bien prise en compte sur des bandes de fréquence complémentaires, mais au dépend d'une augmentation du nombre d'opérations. Si les changements ont lieu dans une bande transitoire entre le PH et le PB, on remarque une baisse des capacités de poursuite de la méthode.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] : T. S. Rao (1970) "The fitting of non-stationary time-series models with time-dependant parameters" *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, Vol. 32, pages : 312-322.
- [2] : Y. Grenier (1984) "Modélisation des signaux non-stationnaires" Thèse d'Etat, centre d'Orsay, Paris.
- [3] : L.Guo (1990) "Estimating time-varying parameters by the Kalman filter based algorithm : stability and convergence" *IEEE, Trans. Autom. Control*, vol. 35, n°2, pages : 141-147.
- [4] : A. Benveniste (1987) "Design of adaptive algorithms for tracking of time-varying systems" *Int. Adap. Cont. and Signal Processing*, vol. 1, pages : 3-29.
- [5] : P. Andersson (1985) "Adaptive forgetting in recursive identification through multiple models." *I.J.C.*, vol. 42, pages : 1175-94.
- [6] : B. Boashash (1989) "Time-frequency signal analysis and synthesis. The choice of a method and its application" *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng. (USA)* vol. 975, pages : 164-185.
- [7] : L. Ljung, S. Gunnarsson (1990) "Adaptive and Tracking in System Identification - A Survey". *Automatica*, Vol. 26, No. 1, pages : 7-21.
- [8] : S. Gunnarsson, L. Ljung (1989) "Frequency Domain Tracking Characteristics of adaptive Algorithms" *IEEE*, vol. 37, n° 7, pages : 1072-89.