



UN ALGORITHME DE MOINDRES CARRÉS RAPIDE  
POUR  
FILTRAGE ADAPTATIF AVEC CONTRAINTES

L. S. Resende<sup>(1)</sup>, J. M. T. Romano<sup>(1)</sup> et M. G. Bellanger<sup>(2)</sup>

(1) DECOM/FEE - Universidade de Campinas - BRÉSIL

(2) TRT - Centre Technique du Plessis, FRANCE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous proposons un algorithme rapide, basé sur le critère des moindres carrés, pour le filtrage adaptatif avec contraintes linéaires. L'approche consiste à calculer le gain d'adaptation par les techniques de moindres carrés rapides et, ensuite, l'utiliser dans l'obtention récursive des variables contenant les contraintes. Ces récursions sont effectuées à l'aide du lemme d'inversion de matrices. L'algorithme proposé est exact et possède une complexité proportionnelle à  $(NK + K^2 N + K)$ , où  $N$  est le nombre de coefficients et  $K$  est le nombre de contraintes.

Les résultats des simulations illustrent les hautes performances de la méthode. L'algorithme peut être utilisé dans de diverses applications telles que: le traitement spatial, les antennes adaptatives, l'analyse spectral et les télécommunications.

I - INTRODUCTION

Le problème du filtrage avec contraintes linéaires se pose quand il s'agit de trouver un filtre optimal, au sens d'un critère établi, étant donné que les coefficients du filtre soient sujets à un ensemble d'équations linéaires.

Dans le cas d'un filtre transverse, les équations de Wiener-Hopf donnent les coefficients optimaux qui minimisent l'erreur quadratique moyenne entre un signal de référence et son estimée obtenue avec le filtre. L'introduction des contraintes dans l'optimisation conduit à une solution modifiée, par rapport à celle de Wiener, obtenue à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange [1].

Cette technique est très importante dans plusieurs problèmes de traitement du signal, dont on peut citer les antennes adaptatives [2,4,5], le traitement spatial en général [6], certaines applications en télécommunications comme l'égalisation et la récupération de porteuse [7,8] et d'autres où il n'y a pas un signal de référence disponible. Le filtrage avec contraintes est aussi à la base de la méthode d'analyse spectral par minimum de variance [3] et fournit un moyen intéressant pour la détection de signaux sinusoïdaux dans du bruit.

Dans de nombreux cas, il s'agit de trouver le filtre avec contraintes par des techniques adaptatives, de façon à permettre un traitement en temps réel et applicable au cas non-stationnaire. Dans ce sens, certains algorithmes ont été proposés dans la littérature, toujours basés sur la méthode du gradient [4,5,7].

Nous proposons, dans ce travail, un algorithme des moindres carrés pour le filtrage adaptatif avec contraintes linéaires. L'algorithme est développé à partir des équations normales, obtenues par la méthode des multiplicateurs de Lagrange associée au critère des moindres

ABSTRACT

In this work, we propose a fast algorithm, based on least squares criterion, for adaptive filtering with linear constraints. The approach consists in obtaining the adaptation gain by means of fast least square techniques and using this gain in the recursive calculations of the parameters related to the constraints. The recursive procedures are carried out by using the matrix inversion lemma. The proposed algorithm is exact, presenting a computational to  $(NK + K^2 N + K)$ , where  $N$  is the number of coefficients and  $K$  is the number of constraints.

The high performance of the method is illustrated by simulations results. The algorithm can be used in several applications such as array processing, adaptive beamforming, spectral analysis and telecommunications.

carrés. Il est démontré que les coefficients optimaux peuvent être exactement calculés, de façon récursive, à partir de la mise à jour du gain d'adaptation et d'une matrice inverse d'ordre égal au nombre de contraintes. Le gain d'adaptation est obtenu par l'algorithme rapide et le calcul matriciel est fait à l'aide du lemme d'inversion de matrices [1,2].

Les résultats de simulation montrent une excellente performance de la méthode pour le cas de filtrage et d'annulation de raies spectrales dans du bruit blanc et coloré. L'application de la méthode des moindres carrés permet une convergence rapide et précise, surmontant les difficultés inhérentes aux algorithmes déjà existents et basés sur le gradient. D'autre part, l'utilisation des algorithmes rapides pour la récursion et la procédure développée pour l'inversion de la matrice contenant les contraintes conduisent à une sensible réduction de la complexité.

II - FILTRAGE OPTIMAL AVEC CONTRAINTES PAR MOINDRES CARRÉS

Soit le filtre transverse montré à la Figure 1. Étant donné un ensemble de  $n$  valeurs de l'entrée  $x(p)$ , nous voulons obtenir les coefficients  $h_i(n)$  qui minimisent le critère des moindres carrés sur la sortie  $e(p)$  et de façon à satisfaire un ensemble d'équations linéaires déterminées.

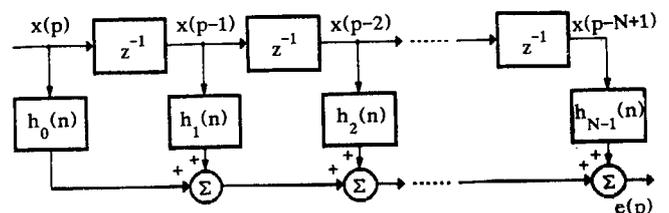


Figure 1: Filtre transverse.



Si le signal à la sortie est donné par:

$$c(p) = x^1(p)h(n) \quad , \quad (1)$$

où

$$x(p) = [x(p) \ x(p-1) \ \dots \ x(p-N+1)]^t \quad (2a)$$

et

$$h(n) = [h_0(n) \ h_1(n) \ \dots \ h_{N-1}(n)]^t \quad , \quad (2b)$$

le problème peut être formalisé comme suit: Minimiser

$$J[h(n)] = \sum_{p=1}^n [x^1(p)h(n)]^2$$

tel que

$$c_k^t h(n) = f_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K$$

où les vecteurs  $c_k$  à  $N$  éléments et les scalaires  $f_k$  définissent:

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_K] \text{ et } f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_K]^t \quad (3)$$

Autrement dit, les contraintes sont données par

$$C^t h(n) = f \quad (4)$$

où l'on a considéré comme réels tous les paramètres de notre formulation.

Afin de résoudre ce problème de minimisation, nous définissons:

$$\mathcal{L}_k[h(n)] = c_k^t h(n) + h^t(n)c_k - 2f_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

de sorte que les contraintes se réduisent à poser:

$$\mathcal{L}_k[h(n)] = 0 \text{ pour } k = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

L'ensemble  $h(n)$  satisfait la minimisation avec contraintes quand les gradients des fonctions  $J[h(n)]$  et  $\mathcal{L}_k[h(n)]$  ( $k = 1, \dots, K$ ) sont colinéaires. Étant donné que:

$$\frac{\partial J[h(n)]}{\partial h(n)} = 2R_{xx}(n)h(n) \quad (7)$$

où

$$R_{xx}(n) = \sum_{p=1}^n x(p)x^t(p) \quad (8)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}_k[h(n)]}{\partial h(n)} = 2c_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

nous pouvons écrire:

$$2R_{xx}(n)h(n) - 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k c_k = 0$$

où les  $\lambda_k$  sont scalaires, dits multiplicateurs de Lagrange.

Le vecteur  $h(n)$  est alors donné par:

$$h(n) = R_{xx}^{-1}(n)CA \quad (10a)$$

où

$$A = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_K]^t \quad (10b)$$

L'équation (10) peut être remplacée dans (4) de façon à obtenir les multiplicateurs de Lagrange, comme suit:

$$A = [C^t R_{xx}^{-1}(n)C]^{-1} f \quad (11)$$

Finalement, on trouve pour les coefficients optimaux:

$$h(n) = R_{xx}^{-1}(n)C [C^t R_{xx}^{-1}(n)C]^{-1} f \quad (12)$$

Dans le cas particulier d'une contrainte vectorielle ( $K=1$ ), l'expression ci-dessus peut être simplifiée et nous avons:

$$h(n) = \frac{R_{xx}^{-1}(n)c_1}{c_1^t R_{xx}^{-1}(n)c_1} f_1 \quad (13)$$

### III - L'ALGORITHME PROPOSÉ

L'équation (12) fournit la solution du filtre avec contraintes par la méthode des moindres carrés, pour un ensemble de  $n$  données d'entrée. Ayant établi cette solution, notre objectif est de trouver une formule de récurrence pour les coefficients quand une nouvelle

entrée  $x(n+1)$  est disponible.

Afin de donner au système une capacité de poursuite, un facteur d'oubli est introduit dans l'estimation de la matrice d'autocorrelation:

$$R_{xx}(n) = \sum_{p=1}^n W^{n-p} x(p)x^t(p) \quad ; \quad 0 << W < 1 \quad (14)$$

À l'instant  $(n+1)$ , suivant l'équation (12), les coefficients optimaux sont:

$$h(n+1) = \Gamma(n+1) [C^t \Gamma(n+1)]^{-1} f \quad (15)$$

où

$$\Gamma(n+1) = R_{xx}^{-1}(n+1)C \quad (16)$$

Mais, la matrice  $R_{xx}^{-1}(n+1)$  est obtenue récursivement par l'algorithme des moindres carrés (RLS) selon l'expression [1,2]:

$$R_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} \left[ R_{xx}^{-1}(n) - g(n+1)x^t(n+1)R_{xx}^{-1}(n) \right] \quad , \quad (17)$$

où  $g(n+1)$  est le vecteur gain d'adaptation, adapté par:

$$g(n+1) = \frac{R_{xx}^{-1}(n)x(n+1)}{W + x^t(n+1)R_{xx}^{-1}(n)x(n+1)} \quad (18)$$

En remplaçant l'équation (17) dans (16), on obtient:

$$\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[ \Gamma(n) - g(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \right] \quad (19)$$

Il en résulte que la matrice  $\Gamma(n+1)$  est obtenue de façon récursive par l'expression (19). Afin de réduire la complexité des calculs, le gain  $g(n+1)$  est calculé à l'aide d'un algorithme de moindres carrés rapide (FLS) [2] et les contraintes n'interviennent que dans le calcul de  $\Gamma(n+1)$ .

Avec la matrice  $\Gamma(n+1)$  mise à jour, les coefficients du filtre peuvent être calculés dans (15). Dans cette expression, il faut effectuer l'inversion de la matrice  $C^t \Gamma(n+1)$ . Une importante réduction de complexité peut donc être obtenue si l'on trouve une formule de récurrence pour cette matrice inverse.

En considérant l'équation (19) multipliée par la matrice  $C^t$ , il vient:

$$C^t \Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[ C^t \Gamma(n) - C^t g(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \right] \quad (20)$$

Alors, en posant:

$$Z = C^t \Gamma(n+1); \quad S = C^t \Gamma(n); \quad u = C^t g(n+1); \quad v^t = x^t(n+1)\Gamma(n) \text{ et } q = -1 \quad (21)$$

nous pouvons écrire:

$$Z = \frac{1}{W} \left[ S + uq^t \right] \quad (22)$$

Ainsi, l'inversion peut être effectuée à l'aide du lemme d'inversion de matrices, donné par [1,2]:

$$\left[ C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} = W \left[ S^{-1} - S^{-1}u \left( v^t S^{-1}u + q \right)^{-1} v^t S^{-1} \right] \quad (23)$$

En prenant les définitions dans (21) nous arrivons à la matrice inverse:

$$\left[ C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} = W \left\{ \left[ C^t \Gamma(n) \right]^{-1} + l(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[ C^t \Gamma(n) \right]^{-1} \right\} \quad (24)$$

où le vecteur  $l(n+1)$  est défini par:

$$l(n+1) = \frac{\left[ C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t g(n+1)}{1 - x^t(n+1)\Gamma(n) \left[ C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t g(n+1)} \quad (25)$$

Les récursions obtenues dans (19) et (24) peuvent être remplacées dans l'expression (15) qui donnent les

coefficients optimaux. Cette procédure nous fournit une mise à jour directe des coefficients du filtre à partir des contraintes et de l'erreur en sortie. Il en résulte, après les calculs:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mathbf{g}(n+1)e(n+1) + W \Gamma(n+1)l(n+1)e(n+1) \quad (26)$$

Finalement, l'algorithme proposé consiste à obtenir le vecteur  $\mathbf{g}(n+1)$  par un algorithme rapide et, ensuite, introduire les contraintes dans l'enchaînement des équations (25), (24), (19) et (26) dans cet ordre. Il est intéressant de noter que l'expression (26) correspond à l'adaptation d'un filtre par moindres carrés, ajoutée d'un terme dépendant des contraintes. Le calcul de  $\mathbf{g}(n+1)$  demande une quantité de multiplications proportionnelles au nombre de coefficients du filtre  $N$ , grâce à l'utilisation de l'algorithme rapide. Comme la matrice  $\mathbf{C}^t \Gamma$  est de rang égal au nombre de contraintes  $K$ , la procédure d'inversion, basée sur le lemme, demande une complexité proportionnelle à  $(NK+K^2+K)$ . Ainsi, le nombre de multiplications nécessaires pour adapter le filtre avec contraintes, à l'arrivée d'une nouvelle entrée, est proportionnel à  $(NK+K^2+N+K)$ . L'algorithme proposé est résumé dans le tableau ci-dessous:

• Nouvelle Entrée	:	$x(n+1)$
• Erreur en Sortie	:	$e(n+1) = \mathbf{h}^t(n)x(n+1)$
• Gain d'Adaptation	:	$\mathbf{g}(n+1)$

Introduction des Contraintes:

$$l(n+1) = \frac{\left[ \mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \left[ \mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}$$

$$\left[ \mathbf{C}^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} = W \left\{ \left[ \mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} + l(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \left[ \mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \right\}$$

$$\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[ \Gamma(n) - \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \right]$$

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mathbf{g}(n+1)e(n+1) + W \Gamma(n+1)l(n+1)e(n+1)$$

**Tableau I:** Algorithme de moindres carrés avec contraintes multiples.

Dans le cas particulier où il n'y a qu'une seule contrainte imposée au filtre, la complexité de l'algorithme est sensiblement réduite. Dans ce cas,  $\Gamma(n+1)$  est un vecteur qui peut encore être mis à jour par (19) et les coefficients sont obtenus par:

$$\mathbf{h}(n+1) = \frac{\Gamma(n+1)}{\mathbf{c}_1^t \Gamma(n+1)} f_1 \quad (27)$$

Le nombre de multiplications est alors proportionnel à  $N$  et il n'y a pas de manipulations matricielles.

En ce qui concerne l'initialisation de l'algorithme, il faut la faire en accord avec le critère des moindres carrés [2, chap. 6]. L'algorithme rapide, pour le calcul de  $\mathbf{g}(n+1)$ , est supposé avoir à l'instant  $n = 0$  toutes ses variables nulles, sauf l'énergie d'erreur de prédiction, donnée par une constante  $E_0$ . Cela correspond en fait à admettre la matrice d'autocorrelation initialisée par:

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \text{diag}(1, W^{-1}, W^{-2}, \dots, W^{-N+1}) \quad (28)$$

Alors, pour les variables dépendantes des contraintes, il faut poser:

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0) \mathbf{C} \quad (29)$$

et, finalement:

$$\mathbf{h}(0) = \Gamma(0) \left[ \mathbf{C}^t \Gamma(0) \right]^{-1} \mathbf{f} \quad (30)$$

L'algorithme présenté dans cette section a été développé en considérant la minimisation d'une erreur en sortie, obtenue directement par  $\mathbf{h}^t(n)x(n+1)$ . La même procédure est valable au cas où il y a un signal de référence  $d(n)$ , l'erreur étant donnée par  $[d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)x(n+1)]$ . Dans le premier cas le filtre  $\mathbf{h}(n)$  correspond, en fait, à un filtre d'erreur de prédiction pondéré par le coefficient  $h_0(n)$ .

#### IV - RÉSULTATS DE SIMULATION

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme, quelques simulations ont été réalisées en employant le filtre adaptatif avec contraintes pour la détection et l'annulation de raies spectrales dans du bruit.

En effet, si les coefficients du filtre sont sujets à une contrainte donnée par:

$$\mathbf{c}_1^t \mathbf{h}(n) = f_1 \quad (31a)$$

où

$$\mathbf{c}_1 = [1, \cos w_0, \cos 2w_0, \dots, \cos (N-1)w_0] \quad (31b)$$

on peut montrer que cela correspond à imposer que la magnitude de la réponse en fréquence  $H(e^{jw})$  soit égale à  $f_1$  pour  $w = w_0$ . D'autre part, dû à la procédure de minimisation, le filtre cherche à annuler les autres composants en fréquence ( $w \neq w_0$ ) du signal d'entrée.

Cette approche peut alors être utilisée pour détecter une raie dans un milieu bruité, en faisant  $f_1 = 1$ , ou pour l'annuler en posant  $f_1 = 0$ .

Dans un premier essai, nous avons considéré un signal  $x(n)$  à l'entrée constitué par trois sinusoïdes de fréquence  $w_1 = \pi/4$ ,  $w_2 = 7\pi/16$  et  $w_3 = 11\pi/16$ . Un bruit blanc est ajouté au signal et le rapport signal à bruit est  $\text{SNR} = 3$  dB. Nous avons encore considéré un filtre d'ordre 6 ( $N = 7$ ) et deux contraintes ( $K = 2$ ), comme données en (31), appliquées aux fréquences  $w_2$  et  $w_3$ .

Les résultats sont montrés à la Figure 2. Nous avons dans 2(a) l'évolution des coefficients pour 150 itérations; il est à signaler la haute vitesse de convergence obtenue grâce à l'utilisation d'une méthode de moindres carrés. Le filtre atteint le régime permanent après environ 40 itérations. Nous avons posé pour l'algorithme  $W = 0,99$  et  $E_0 = 0,01$ .

Après la convergence, nous avons considéré les valeurs obtenues des coefficients pour calculer la réponse en fréquence du filtre, montrée à la Figure 2(b). Il est vérifié que  $|H(e^{jw})|$  passe exactement par la valeur 1 (0 dB) aux fréquences  $7\pi/16$  et  $11\pi/16$  tandis qu'elle cherche à annuler la raie à la fréquence  $\pi/4$ . Pour les autres valeurs de  $w$ , le filtre présente une réponse plus ou moins plate, dû à la présence du bruit blanc.

Dans les Figures 3(a) et 3(b) le même cas est présenté, mais avec  $\text{SNR} = 40$  dB. L'algorithme fournit une convergence encore plus rapide et l'encoche à  $w_1 = \pi/4$  est plus accentuée car le bruit est moins important. Evidemment, les contraintes posées obéissent aux



fréquences  $w_2$  et  $w_3$ .

Finalement, les mêmes sinusoïdes sont considérées ajoutées d'un bruit coloré, modélisés par un signal autoregressif d'ordre 2.

Le modèle AR possède deux pôles complexes conjugués placés à  $0,9 e^{\pm jw_0}$ , où  $w_0 = 9\pi/16$ . Le rapport signal à bruit est de 6 dB.

La courbe d'évolution des coefficients, ainsi que la réponse en fréquence après convergence, sont montrées à la Figure 4. Nous vérifions cette fois-ci, la présence de deux encoches dans  $|H(e^{jw})|$ ; le premier pour annuler la sinusoïde à  $\pi/4$  et l'autre, au tour de  $w_0 = 9\pi/16$ , pour essayer de blanchir le bruit AR. La réponse est toujours unitaire aux fréquences  $w_2 = 7\pi/16$  et  $w_3 = 11\pi/16$ . Plusieurs simulations ont été effectuées avec différents signaux d'entrée sans dégradation des performances de l'algorithme.

#### V - CONCLUSION

Dans ce travail, un algorithme exact de moindres carrés a été proposé pour le filtrage adaptatif avec contraintes linéaires. L'approche consiste à obtenir le gain d'adaptation par un algorithme rapide et, ensuite, introduire ce gain dans le calcul récursif des variables matricielles contenant les contraintes.

Une importante réduction de complexité est encore atteinte par l'utilisation appropriée du lemme d'inversion de matrices. Ainsi, l'algorithme final obtenu présente une récursion semblable à celle des moindres carrés classiques.

L'algorithme présenté apporte une sensible amélioration des performances par rapport à ceux généralement utilisés dans ce genre de problème; en

particulier en ce qui concerne la vitesse de convergence. Cette amélioration est due à l'utilisation exacte des procédures de moindres carrés. La quantité des multiplications est proportionnelle à  $(NK + K^2 + K)$ , à cause des manipulations matricielles après le calcul du gain d'adaptation.

Les performances et la complexité présentées montrent que l'algorithme est applicable à plusieurs problèmes où des contraintes sont posées dans le traitement adaptatif. Les études concernant certaines de ces applications sont actuellement en cours.

#### RÉFÉRENCES

- [1] S. Haykin; "Adaptive Filter Theory". Prentice-Hall; New Jersey; 1986.
- [2] M. G. Bellanger; "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis". Marcel Dekker, Inc.; New York and Basel; 1987.
- [3] S. L. Marple Jr.; "Digital Spectral Analysis with Applications". Prentice-Hall; New Jersey; 1988.
- [4] K. Takao, M. Fujita and T. Nishi; "An Adaptive Antenna Array under Directional Constraint", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pp. 662-669, Sep. 1976.
- [5] L. J. Griffiths and C. W. Jim; "An Alternative Approach to Linearly Constrained Adaptive Beamforming", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-30, pp. 27-34, Jan. 1982.
- [6] K. M. Buckley; "Spatial/Spectral Filtering with Linearly Constrained Minimum Variance Beamformers" IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, pp. 249-266, Mar. 1987.
- [7] L. J. Griffiths; "New Results in Constrained Beamforming: Non-Linear Constraints and Constant Modulus Output", Proceedings EUSIPCO-90, Sep. 1990.
- [8] F. Castro, J. Castells, J. Sánchez and G. Vázquez; "Linear Phase Adaptive Line Enhancer for Improving the performance of Phase Synchronizers", EUSIPCO-90, Sep. 1990.

Ce travail a été partiellement financé par CAPES, CNPq, et CPqD-TELEBRÁS.

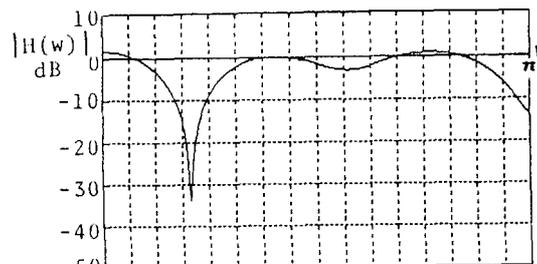
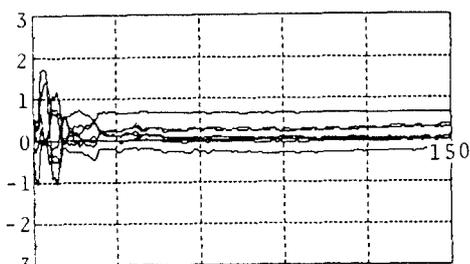


Figure 2: Cas des sinusoïdes avec bruit blanc (SNR = 3 dB):

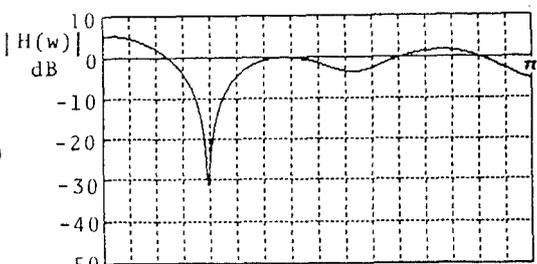
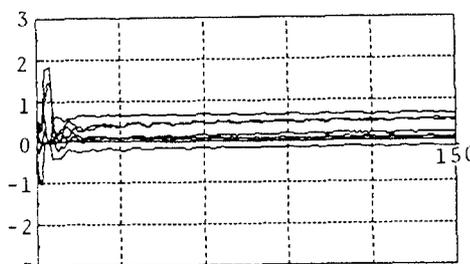


Figure 3: Cas des sinusoïdes avec bruit blanc (SNR = 40 dB):

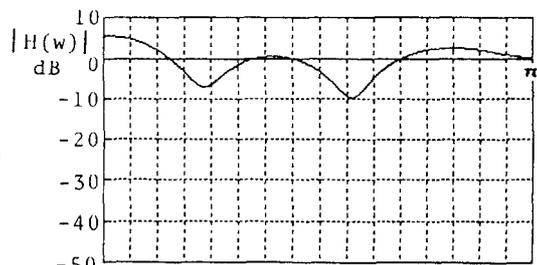
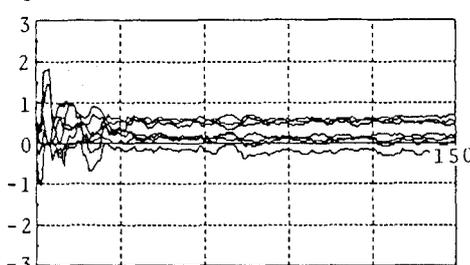


Figure 4: Cas des sinusoïdes avec bruit AR(2) (SNR = 6 dB):

(a) Evolution des coefficients;

(b) Réponse en fréquence du filtre.