

## CONVERGENCE D'ALGORITHMES DE TYPE LMS POUR L'ANNULATION DES ECHOS SUR LES IMAGES DE TELEVISION

Geneviève BAUDOIN

Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique (ESIEE)  
BP 99 - 2 boulevard Blaise Pascal - 93162 - NOISY LE GRAND

## RÉSUMÉ

De nombreux systèmes ont été développés au Japon et aux U.S.A. pour diminuer les échos sur les images de télévision. La plupart sont constitués de filtres adaptatifs qui utilisent des signaux de référence insérés dans les lignes de suppression trame du signal vidéo. Cet article étudie la convergence des algorithmes adaptatifs de type LMS utilisés dans ces équipements. La particularité du problème réside dans le fait que les signaux d'entrée du filtre sont cyclostationnaires : somme d'un bruit (supposé stationnaire) et du signal de référence périodique modifié par le canal (échos, distortion...). Dans un premier temps, on a mis en évidence un critère stationnaire à optimiser pour les deux configurations envisageables : "filtre inverse" et "identification du canal". Puis on a étendu les travaux de O. MACCHI et E. EWEDA au cas des signaux cyclostationnaires.

## I. INTRODUCTION

Dans les grandes agglomérations ou dans les zones montagneuses, il est assez fréquent d'observer des échos plus ou moins gênants sur les images de télévision. Ces échos proviennent de l'existence de plusieurs trajets possibles pour les ondes électromagnétiques (réflexion sur la surface d'un immeuble par exemple).

De nombreuses études ont été effectuées depuis 1970, essentiellement au Japon et aux U.S.A, afin d'évaluer différentes solutions pour l'annulation de ces échos [1, 2, 5, 6, 7]. Plusieurs types d'annuleurs d'échos ("Ghost Canceller") ont été réalisés, intégrés ou non au poste de télévision. Au cours du printemps 1990, une expérimentation à grande échelle de ces annuleurs a été menée à Atlanta (U.S.A.) en collaboration avec le N.A.B. (Japon) et des chaînes américaines [7]. Les résultats sont globalement assez satisfaisants mais certains défauts sont apparus :

- Introduction de bruit par les annuleurs.
- Lenteur de la convergence des systèmes (quelques secondes), empêchant leur utilisation avec des antennes intérieures où l'environnement évolue vite.
- Mauvais comportement pour des signaux reçus de faible amplitude.
- Difficultés à annuler les échos de forte amplitude.

## ABSTRACT

Several TV Ghost Cancellers have already been developed in Japan and in the U.S.A.

Most of these Ghost Cancellers use adaptive digital filters trained with reference signals which are inserted in some unused lines of each TV field. This paper studies the convergence of LMS adaptive algorithms used in these equipments.

The particularly of the problem is that the input signals are cyclostationary : a stationnary noise plus a periodical reference signal (modified by the chanel).

First a stationnary criterium is proposed for both configurations : inverse filtering and chanel identification. Then the results of O. Macchi et E. Eweda for quadratic convergence under M-independance hypothesis are extended to the case of cyclostationary signals.

De nouvelles études sont donc à entreprendre pour améliorer les systèmes existants.

Les annuleurs existants utilisent des signaux de référence qui sont insérés périodiquement dans les intervalles de suppression trame du signal vidéo. Ces signaux de référence sont utilisés pour adapter des filtres qui sont ensuite appliqués aux lignes de l'image.

La plupart des annuleurs travaillent en bande de base.

Les signaux de référence qui ont été étudiés sont de deux types :

- Certains font partie du signal vidéo lui-même : par exemple les impulsions de synchro verticale.
- D'autres, conduisant à de meilleures performances, sont insérés par les emetteurs télé dans certaines lignes (comme les signaux tests), ce qui nécessite une normalisation : impulsions en sinus cardinal, barres à front(s) en sinus cardinal, séquences pseudo aléatoires...

Les japonais ont proposé, pour le standard NTSC, un signal permettant une plage d'annulation d'échos de la longueur d'une ligne vidéo [6].

Une des difficultés technologiques rencontrées est la longueur de ces filtres. En effet, les échos peuvent apparaître avec un retard important : de l'ordre de la durée d'une ligne TV, ce qui pour une fréquence d'échantillonnage de 14 MHz



Dans le but d'améliorer les performances obtenues, il est important d'étudier les limitations et les possibilités des algorithmes adaptatifs utilisés dans ces anneaux.

Cet article présente une étude de la convergence des algorithmes de type LMS. La particularité du problème réside dans le fait que les signaux d'entrée du filtre sont cyclostationnaires : résultant de la somme d'un bruit (supposé stationnaire) et du signal de référence périodique modifié par le canal (échos, distortions...).

Dans un premier temps, on met en évidence un critère stationnaire à optimiser pour les deux configurations envisageables : filtre inverse et identification du canal. Puis, on étend les travaux de O. MACCHI et E. EWEDA au cas de ces signaux cyclostationnaires.

## II. FILTRAGE ADAPTATIF POUR L'ANNULATION D'ÉCHOS SUR DES IMAGES DE TELEVISION

Le problème peut être abordé de deux façons :

- Filtre inverse adaptatif FIR ou IIR (figure 2)
- Identification adaptative du canal (figure 1)

par un filtre FIR :  $W(z)$  et filtrage du signal vidéo par le filtre inverse  $\frac{1}{W(z)}$ . Cette approche (erreur d'équation) a le défaut de ne pas générer le filtre inverse optimal.

De nombreux critères d'optimisation sont utilisés : critères quadratiques et critères calculés à partir des valeurs absolues des erreurs.

Dans la suite de l'article, seuls les critères quadratiques seront étudiés.

## III. CONVERGENCE QUADRATIQUE DES ALGORITHMES DE TYPE LMS POUR DES SIGNAUX CYCLOSTATIONNAIRES

Depuis la fin des années 60, la convergence des algorithmes LMS a été étudiée. Différentes hypothèses sur les signaux ont été utilisées pour cette analyse : depuis les travaux de Widrow [8] en passant par la théorie de l'indépendance (Horowitz, Senne) [3] jusqu'au travaux de O. Macchi et E. Eweda [4]. Ces derniers ont permis de relâcher l'hypothèse de l'indépendance des observations en lui substituant celle beaucoup plus réaliste de la M-indépendance (mémoire finie). O. Macchi et E. Eweda ont de plus établi que l'erreur quadratique moyenne entre le filtre optimum et le filtre adaptatif après convergence, est bornée par une valeur proportionnelle au pas d'adaptation si celui-ci est assez petit.

Dans le cadre du travail présenté les hypothèses retenues sont les suivantes :

- Le canal est stationnaire : sa fonction de transfert est invariante, le bruit est stationnaire.
- Les signaux de référence sont périodiques, insérés dans une ligne particulière de chaque trame vidéo.

Le signal d'entrée du filtre adaptatif est donc cyclostationnaire. Les deux structures possibles (identification de canal,

filtrage inverse) vont être présentées successivement.

### III.1 Identification de canal

Les notations utilisées sont celles de la figure 1.

Dans ce cas le signal d'entrée est périodique et le signal de référence est cyclostationnaire.

$r_n$  est le signal de référence (signal déterministe périodique).

$b_n$  est le bruit (stationnaire).

$y_n$  est le signal reçu par le récepteur (cyclostationnaire).

$\hat{y}_n$  est la sortie du filtre adaptatif.

$e_n$  est l'erreur d'estimation  $e_n = y_n - \hat{y}_n$ .

$P$  est le nombre de coefficients du filtre adaptatif FIR.

$L$  est la longueur du signal de référence.

$N = P + L - 1$  (longueur du signal de sortie  $\hat{y}_n$ ).

Filtre optimal pour un canal à réponse impulsionnelle FIR

$\underline{W}$  est le vecteur colonne des coefficients du filtre adaptatif  $W = [W_0, \dots, W_{p-1}]$

avec  $\underline{y}^T = (y_0, \dots, y_{N-1})$

$$R = \begin{bmatrix} r_0^T \\ r_1^T \\ \dots \\ r_{n-1}^T \end{bmatrix} \text{ et } \underline{r}_i^T = (r_i, r_{i-1}, \dots, r_{i-p+1})$$

On suppose que  $r_k = 0$  si  $k < 0$  ou  $k \geq N$ .

Algorithmes LMS

Deux critères stochastiques sont envisageables ici :

$J_1(W) = \min E(en^2)$  MSE : Mean Square Error

$J_2(W) = \min E(\sum_{n=kN}^{n=(k+1)N-1} en^2)$

MSLE : Mean Square Line Error

Le premier critère n'est pas stationnaire. La solution optimale varie avec  $n$ , et comme le signal  $r_n$  est périodique, cette "solution optimale" est, elle aussi, périodique.

Toutefois dans le cas où le signal est de type FIR et où le bruit est de moyenne nulle, il existe une solution stationnaire, même pour le critère 1 :  $W^* = A$  et dans ce cas l'algorithme LMS s'écrit :

$$W_n = W_{n-1} + \mu en r_n$$

$$\text{en notant : } \begin{aligned} V_n &= W_n - W^* = W_n - A \\ V_n &= (I - \mu r_n r_n^T) V_{n-1} + \mu r_n b_n \end{aligned}$$

Pour simplifier, on supposera dans ce cas que le bruit  $b_n$  est blanc de variance  $\sigma_b^2$  et de moyenne nulle.

On montre que les résultats de O. Macchi et E. Eweda s'étendent sans difficulté :

$V_n$  se décompose en un terme transitoire :  $(V_{n,t})$  et un terme de fluctuation  $(V_{n,f})$ .

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n,t} + V_{n,f} \\ V_{n,t} &= C_{0,n} V_{-1} \\ V_{n,f} &= \mu \sum_{k=0}^n C_{k+1,n} r_k b_k \end{aligned}$$

où  $C_{i,j} = (I - \mu r_j r_j^T)(I - \mu r_{j-1} r_{j-1}^T) \dots (I - \mu r_i r_i^T)$

Etude du terme transitoire  $V_{n,t}$

La matrice  $C_{0,n}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$C_{0,n} = C_{n-n',n} (C_{0,N-1})^k = C_{0,n'} (C_{0,N-1})^k$$

avec  $n = kN + n'$  et  $n' < N$

$C_{0,N-1}$  correspond au produit des termes d'une ligne.

$$\|C_{0,N-1}\| \leq \prod_{i=0}^{N-1} \|1 - \mu r_i r_i^T\|$$

$$\text{et pour } 0 < \mu < \mu_{max} = \frac{2}{\max\|r_i\|^2} \quad \|1 - \mu r_i r_i^T\| = 1$$

$$\text{d'où } \|C_{0,N-1}\| \leq 1$$

$$\text{et si } C_{0,N-1} \text{ est inversible } \|C_{0,N-1}\| < 1$$

Le terme  $V_{n,t}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  si le rang de  $C_{0,N-1}$  vaut P et si  $0 < \mu < \mu_{max}$ , et le bruit étant centré  $E(V_n)$  tend aussi vers 0.

D'autre part on peut étudier une borne pour  $\|C_{0,N-1}\|$  et pour  $E(V_n^T V_n) : \forall \mu < \mu_0$

$$\|C_{0,N-1}\| \leq \|I - \mu R^T R\| + \mu^2 \beta(\mu_0) \\ \leq 1 - \mu \lambda_{min} + \mu^2 \beta(\mu_0)$$

où  $\lambda_{min}$  est la valeur propre minimum de  $R^T R$ .

$$\forall \mu < \frac{\lambda_{min}}{2B} \quad \|C_{0,N-1}\|^2 < 1 - \mu \lambda_{min}$$

et  $E(V_n^T V_n) \leq \|C_{0,N-1}\|^{2[\frac{n}{N}]} \|V_{-1}\|^2 + \mu^2 \sigma^2 \max(\|r_i\|^2) \sum_{k=0}^n \|C_{0,N-1}\|^{2[\frac{n-k}{N}]}$   
où le symbole  $[\frac{n}{N}]$  représente la partie entière de  $\frac{n}{N}$ .

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} E(V_n^T V_n) < \mu \frac{\sigma^2 N \max(\|r_i\|^2)}{\lambda_{min}}}$$

Pour le deuxième critère (MSLE) on peut écrire un algorithme de type LMS, qu'on appellera **LMSL** (LMS Line) et qui effectue une adaptation des coefficients à chaque nouvelle ligne :

$$J_2(W) = E\left(\sum_{kN}^{(k+1)N-1} e_n^2\right) = E(\underline{e}_k^T \underline{e}_k)$$

où  $\underline{e}_k$  est le vecteur d'erreur sur la ligne k.

$$\nabla J_2(W) = -2R^T E(\underline{e}_k)$$

le filtre optimum vaut :

$$W^* = (R^T R)^{-1} R^T E(\underline{y}_k)$$

Si le canal est FIR  $W^* = A$

L'algorithme LMSL s'écrit :

$$W_n = W_{n-1} + \mu R^T \underline{e}_n$$

Comme précédemment on étudie  $V_n = V_{n,t} + V_{n,f}$

$$V_{n,t} = (I - \mu R^T R)^n V_0 \\ V_{n,f} = \mu \sum_{k=0}^{n-1} (I - \mu R^T R)^k R^T \underline{b}_{n-k}$$

Si  $\mu < \frac{2}{\lambda_{max}^R} \quad \|I - \mu R^T R\| < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(V_n) = 0$

$\lambda_{max} =$  valeur propre max de  $R^T R$ .

En supposant pour simplifier que :  $E(\underline{b}_n \underline{b}_n^T) = \sigma_b^2 I$

$$E(V_n V_n^T) = (I - \mu R^T R)^n V_0 V_0^T (I - \mu R^T R)^n \\ + \mu^2 \sigma_b^2 \sum_{k=0}^{n-1} (I - \mu R^T R)^k R^T R (I - \mu R^T R)^k$$

D'où  $\forall \mu \quad 0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(V_n V_n^T) = \sigma_b^2 \mu (2I - \mu R^T R)^{-1}$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(V_n^T V_n) = \sigma_b^2 \mu \text{ trace}((2I - \mu R^T R)^{-1})$   
De plus :  $E(\sum_{kN}^{(k+1)N-1} e_n^2) = E(\sum b_n^2) + E((\sum V_k^T \underline{r}_n)^2)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(e_n^2) = N \sigma_b^2 + \mu \sigma_b^2 \sum \underline{r}_n^T (2I - \mu R^T R)^{-1} \underline{r}_n$$

### III.2 Filtrage inverse

Les notations utilisées sont celle de la figure 2.

Le critère utilisé est le MSEL

$$J(W) = \min E(\underline{e}_k^T \underline{e}_k)$$

Le signal d'entrée du filtre adaptatif est cyclostationnaire, le signal de référence est périodique. On suppose que les échantillons de bruit sur des lignes de référence dans des trames différentes sont non-corrélés, ce qui correspond à l'hypothèse de M-indépendance.

Le vecteur erreur  $\underline{e}_k$  est :  $\underline{e}_k = \underline{r}_k - Y_k W$

$$\text{avec } Y_k = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \text{ matrice } (N, P)$$

$$\underline{r}_k^T = (r_{kn}, r_{kN+1}, \dots, r_{(k+1)N-1})$$

$$\underline{y}_i^T = (y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-p+1})$$

La solution optimale  $w^*$  vaut :

$$W^* = E(Y_k^T Y_k)^{-1} E(Y_k) \underline{r}_k$$

L'algorithme LMSL à une adaptation par ligne, s'écrit :

$$W_n = W_{n-1} + \mu Y_n^T \underline{e}_n$$

Là encore les résultats obtenus par O. Macchi et E. Eweda peuvent se transposer. On appelle :

$$\underline{\epsilon}_k = \underline{r}_k - Y_k W^* \\ E(Y_k^T \underline{\epsilon}_k) = 0 \text{ (théorème d'orthogonalité)} \\ C_{i,k} = (I - \mu Y_k^T Y_k) - (I - \mu Y_{k-1}^T Y_{k-1}) \dots (I - \mu Y_i^T Y_i) \\ V_k = C_{1,k} V_0 + \mu (\sum_{j=1}^k C_{j+1,k} Y_j^T \underline{\epsilon}_j)$$

#### • Etude de $E(V_k)$

$$E(V_k) = E(C_{1,k}) V_0 = (I - \mu E(Y_i^T Y_i))^k$$

$$\text{si } 0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

où  $\lambda_{max} =$  valeur propre max de  $E(Y_i^T Y_i)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(V_k) = 0$$

#### • Etude de $E(V_k^T V_k)$

$E(V_k^T V_k)$  est la somme de trois termes :

$$E(\|C_{1,k} V_0\|^2) + \mu^2 E(\sum_j \underline{\epsilon}_j Y_j^T C_{j+1,k}^T \sum_n C_{n+1,k} Y_n \underline{\epsilon}_n) \\ + 2\mu (V_0^T C_{1,k}^T \sum_J C_{J+1,k} Y_J^T \underline{\epsilon}_j)$$

Etude du 1er terme :  $E(\|C_{1,k} V_0\|^2)$

$\forall \mu E(\|I - \mu Y_k^T Y_k\|)^2$  peut être supérieur à 1 mais il  $\exists \mu_1 \quad \forall \mu < \mu_1$



$$E(\|\Pi_{surPlignes} (I - \mu Y_k^T Y_k)\|^2) < 1 - 2\mu\gamma_1$$

(voir annexe 1).

$$E(\|C_{1,n}\|^2) < C(1 - \mu\gamma_1)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|C_{1,n} V_0\|^2) = 0$$

#### Etude du 2ème terme

$$\mu^2 \sum_j \sum_n E(\epsilon_j^T Y_j C_{j+1,k}^T C_{n+1,k} Y_n^T \epsilon_n)$$

$$= \mu^2 \sum E(\|C_{j+1,k}\|^2 E(\|Y_j^T \epsilon_j\|^2))$$

$$\text{si } \mu < \mu_1 \text{ et } E(\|Y_j\|^4) < B$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{2ème terme} < \mu C$$

(on utilise la propriété :

$$E(\|Y_j^T \epsilon_j\|^2) < \sqrt{E(\|Y_j\|^4 E(\epsilon_j^4))}.$$

#### Etude du 3ème terme

On montre que  $\forall \mu \ 0 < \mu < \mu_1$

$$\text{si } E(\|Y_j\|^6) < \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{3ème terme} = 0$$

$$\text{En conclusion : } \forall \mu \ 0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(V_n) = 0$$

$$\text{Si } E(\|Y_j\|^6) < \infty$$

$$\exists \mu_1 \ \forall \mu \ 0 < \mu < \mu_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|V_n\|^2) < \mu B$$

### CONCLUSIONS ET REMERCIEMENTS

Les résultats obtenus par O. Macchi et E. Eweda sur "la convergence quadratique" de l'algorithme LMS pour des signaux stationnaires peuvent être étendus à des signaux cyclostationnaires en "stationnarisant" le critère à optimiser par un moyennage sur une période :

$$E(\sum_{sur \text{ une période }} e_n^2)$$

Ce travail a été entrepris lors d'une courte période sabbatique dans les laboratoires de Tektronix aux Etats Unis, plus précisément au sein du groupe VESL. Je tiens à remercier tout particulièrement Ajay Luthra, Diana Smiley et Tran Thong pour leur aide précieuse.

#### ANNEXE 1 :

$$E(\|\Pi_{surPlignes} (I - \mu Y_k^T Y_k)\|^2) <$$

$$E(\|I - \mu \sum_{surPlignes} Y_k^T Y_k\|^2) + \mu^2 M(\mu)$$

$$\forall \mu < \mu_0 \ M(\mu) < M(\mu_0) < \infty$$

$$E(\|I - \mu \sum_{surPlignes} Y_k^T Y_k\|^2) <$$

$$1 - 2\mu \lambda_{\min}(\sum_{surPlignes} Y_k Y_k^T) + \mu^2 B$$

$$\sum_{surPlignes} Y_k^T Y_k = \sum_{NP \text{ vecteurs }} \underline{y}_i \underline{y}_i^T$$

On veut montrer que  $\lambda_{\min} \neq 0$

$$\lambda_{\min}(\sum_{surPlignes} Y_k^T Y_k) > \lambda_{\min}(\sum_1 \text{ point par ligne } \underline{y}_i \underline{y}_i^T)$$

$$\text{Posons } M = (\sum_1 \text{ point par ligne } \underline{y}_i \underline{y}_i^T)$$

$$E(\det^2) > E(\det)^2$$

$$\det(M) = \det^2(y_0, y_{N+1}, \dots, y_{(p-1)N+p-1})$$

$$E(\det) = \det(x_0, x_1, \dots, x_{(p-1)N+p-1})$$

$$E(\det(\sum Y_k^T Y_k)) > \det X^T X$$

$$\lambda_{\min}(\sum Y_k^T Y_k) > \gamma > 0$$

$$\forall \mu \ 0 < \mu < \mu_1$$

$$E(\|\Pi_{surPlignes} (I - \mu Y_k^T Y_k)\|^2) < 1 - 2\mu\gamma + \mu^2 D$$

$$\text{et pour } \mu < \mu_1$$

$$E(\|\Pi_{surPlignes} (I - \mu Y_k^T Y_k)\|^2) < 1 - 2\mu\gamma_1$$

$$E(\|C_{1,n}\|^2) < C(1 - \mu\gamma_1)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$$

### Bibliographie

- [1] S. T. Ciciora, "A Tutorial On Ghost Cancelling in Television Systems," *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. CE-25, pp. 9-44, Feb. 1979.
- [2] S. K. Goyal et al., "Performance evaluations of selectd Automatic Deghosting Systems for Television," *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. CE-26, pp. 100-120, Feb. 1980.
- [3] L. Horowitz, K. Senne, "Performance advantage of complex LMS for controlling narrow band adaptive arrays," *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 29, 3, June 1981.
- [4] O. Macchi, E. Eweda, "Second Order CONvergence Analysis of Stochastic Adaptive Linear Filtering," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-1, pp. 76-85, Jan. 1983.
- [5] S. Matsuura et al., "Development of a Ghost Cancel Technology for TV broadcasting," *Proc. NAB Engineering Conf.*, pp. 229-238, 1990.
- [6] H. Miyazawa et al., "Development of a Ghost Cancel Reference for TV Broadcasting," *IEEE Trans. on Broadcasting*, vol. BC-35, pp. 339-347, Dec. 1989.
- [7] NAB, MSTV, "Ghost CAncelling Field Test Report," July 16, 1990.
- [8] B. Widrow et al., "Stationary and non Stationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter," *Proc. IEEE*, 8, pp. 1151-1162, 1976.

Figure 1 : Identification de canal

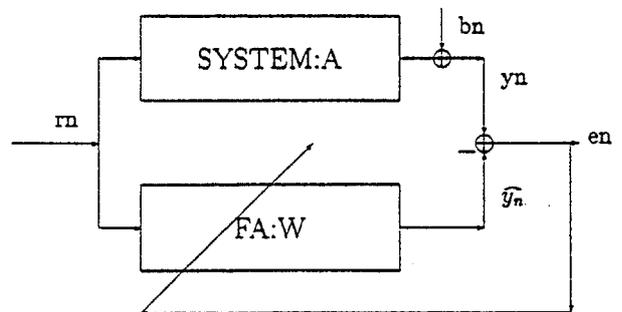


Figure 2 : Filtrage inverse

