

**IDENTIFICATION DE REPONSES IMPULSIONNELLES  
LONGUES PAR GRADIENT STOCHASTIQUE FREQUENTIEL.****O. Ait Amrane, E. Moulines, Y. Grenier**Ecole Nationale Supérieure des télécommunications, Département Signal  
46, rue Barrault, 75634 Paris FRANCE.

## RÉSUMÉ

## ABSTRACT

Nous présentons dans cet article, un algorithme d'identification de réponses impulsionnelles longues, reposant sur un découpage en blocs de ces dernières et s'appuyant sur la structure de convolution rapide en transformées de Fourier à court-terme. Après adaptation de cette structure à l'identification d'une réponse impulsionnelle, le problème est résolu à l'aide d'un algorithme de gradient stochastique. Nous mettons en évidence, par la suite, la réduction de complexité significative que permet cet algorithme, pour l'identification de longs filtres, par rapport au LMS. Des simulations illustrent les propriétés de convergence de cet algorithme, notamment pour des signaux d'entrée fortement corrélés.

We derive in this article a frequency-domain adaptive filtering algorithm, for the purpose of identifying long impulse responses. This algorithm is based on fast convolution structure using the short-time Fourier transform. We first show how this formalism can be adapted for identification. We then demonstrate that the proposed algorithm achieves both reduced complexity and faster convergence compared to the LMS algorithm, in particular for the important case of highly correlated input signals.

**I - INTRODUCTION**

L'annulation d'écho acoustique, pour la téléconférence est rendue délicate du fait de la durée des réponses impulsionnelles des canaux acoustiques à identifier (quelques centaines de millisecondes). Lorsque les signaux d'entrée sont fortement corrélés (signaux de parole), les algorithmes les plus couramment utilisés (LMS temporel) requièrent une grande puissance de calcul et convergent assez lentement.

Dans un tel contexte, l'utilisation d'algorithmes d'identification fréquentiels semble s'imposer, tant du fait de leurs faibles coûts de calcul, que de leur relative insensibilité à la corrélation des signaux d'entrée. Cependant ces algorithmes imposent des traitements par blocs des signaux (TFD) et posent donc dans notre contexte des problèmes de délais de traitement. Pour pallier ces limitations, nous proposons un algorithme reposant sur le découpage en blocs des réponses impulsionnelles à identifier, afin de réduire les délais de traitement. Cet algorithme, s'appuie sur la structure de convolution rapide en transformée de Fourier à court-terme (OLA) [1]; et induit une complexité de l'ordre  $o(\log(L))$  ( $L$  étant la longueur de la réponse impulsionnelle à identifier) beaucoup plus faible que celle du LMS temporel  $o(L)$ .

Après adaptation de cette formulation à l'identification d'une réponse impulsionnelle, on résout ce problème au moyen d'un gradient stochastique. Cette formulation fréquentielle permet, en plus de la réduction de complexité, une amélioration des propriétés de convergence par rapport au NLMS, grâce à l'orthogonalisation implicite réalisée par la TFD et l'utilisation de fenêtres sélectives.

Nous avons prouvé, en l'absence de segmentation de la réponse impulsionnelle, que cet algorithme converge vers la solution optimale. Il peut être vu dans ce cas comme une généralisation de l'algorithme UFLMS [2], proposé par Mansour et Gray, où l'on aurait relâché la contrainte sur le facteur de sous-échantillonnage temporel des transformées de Fourier à court-terme, permettant ainsi de réaliser un compromis entre la vitesse d'adaptation et le coût de calcul.

Les tests effectués sur des signaux échantillonnés à 16 kHz et filtrés par des réponses impulsionnelles de salles de 8000 échantillons fournis par le CNET, mettent en évidence la réduction de complexité ainsi que la faible dépendance des propriétés de convergence vis à vis de la statistique des signaux d'entrée.

Dans ce qui suit, les vecteurs seront représentés en caractères gras soulignés, les matrices en caractères gras majuscules, l'indice 2 sera relatif aux transformées de Fourier à court terme et le symbole  $\tau$  en exposant indiquera la transposition conjugaison.

**II - PRESENTATION DU MODELE**

\* Considérons la convolution d'un signal  $\{x(n)\}$ , par un filtre de réponse impulsionnelle finie  $\{h(n)\}$  de longueur  $L$ . Le vecteur  $\underline{y}$ , associé au bloc de signal de sortie  $\{y(n)\}$  de longueur  $L$ , évalué sur l'intervalle  $[0, L-1]$  s'écrit:



$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(-1) & \dots & x(-L+1) \\ x(1) & x(0) & \dots & x(-L+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & \dots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Etendons la formulation (1), de structure Toeplitz et de taille L, en une nouvelle formulation de taille (P=2L) et de structure Toeplitz circulante, permettant d'exploiter la propriété de convolution "circulaire", en transformée de Fourier discrète (TFD):

$$\begin{bmatrix} y'(-L) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y'(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(-L) & \dots & x(1) & \dots & x(-L+1) \\ x(0) & \dots & x(-L+1) & \dots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & \dots & x(0) & \dots & x(-L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(L-1) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2)$$

Cette relation s'écrit plus concisément :

$$\underline{y}' = \underline{\chi} \cdot \underline{h}^a \quad (2.a)$$

Les L dernières composantes du vecteur  $\underline{y}'$  coïncident avec  $\underline{y}$  et résultent donc de la convolution linéaire de  $\{f(0), \dots, h(L-1)\}$  par  $\{x[-L], \dots, x(L-1)\}$ . Si  $\{f(n)\}$  est une fenêtre à support dans  $[0, L-1]$ , nous avons évidemment :

$$f(n) \cdot y(n) = f(n) \cdot y'(n) \quad \forall n$$

ce qui se traduit par la relation matricielle :

$$f \cdot \underline{y} = f \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{h}^a \quad (3)$$

Avec  $f = \text{Diag}\{0, \dots, 0, f(0), \dots, f(L-1)\}$

Les matrices circulantes ayant toutes les mêmes vecteurs propres [5], en l'occurrence les colonnes de la matrice W de transformation de Fourier discrète TFD  $[W(k,l) = \exp(-j2\pi kl/P)]$ , la matrice  $\underline{\chi}$  s'écrit :

$$\underline{\chi}_2 = \underline{W} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{W}^{-1} \quad (4)$$

$\underline{\chi}_2$  étant la matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs de la TFD de la première colonne de  $\underline{\chi}$ . En utilisant la relation (3), on obtient :

$$\underline{w} \cdot f \cdot \underline{y} = \underline{w} \cdot f \cdot \underline{W}^{-1} \cdot \underline{W} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{W}^{-1} \cdot \underline{W} \cdot \underline{h}^a$$

On en déduit la relation d'entrée-sortie en transformées de Fourier à court-terme (TFCT), qui s'écrit de façon matricielle :

$$\underline{Y}_2(0) = \underline{F}^\dagger \cdot \underline{X}_2(0) \cdot \underline{H} \quad (5)$$

Avec  $\underline{F}^\dagger = \underline{W} \cdot \underline{f} \cdot \underline{W}^{-1}$  et  $\underline{Y}_2(0) = \underline{W} \cdot f \cdot \underline{y}$  (5.a)

De façon similaire, si l'on évalue la relation (5) non plus à l'instant 0 mais à un instant t, on obtient :

$$\underline{Y}_2(t) = \underline{F}^\dagger \cdot \underline{X}_2(t) \cdot \underline{H} \quad (6)$$

les composantes du vecteur  $\underline{Y}_2(t)$  et de la matrice diagonale  $\underline{X}_2(t)$  étant définis par :

$$[Y_2(t)]_k = Y_2(t, \Omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} f(n) y(n+t) \exp(-j \Omega_k n)$$

$$[X_2(t)]_{kk} = X_2(t, \Omega_k) = \sum_{n=-L}^{L-1} x(n+t) \exp(-j \Omega_k n); \quad \Omega_k = 2\pi k/P$$

Il est possible de reconstruire le signal  $y(n)$  [1], en sous-échantillonnant d'un facteur ( $R < L$ ) la TFCT  $X_2(t)$ . La synthèse s'effectue par recouvrement-addition au moyen de la formule suivante :

$$y(n) = \sum_n f(n-sR) \left\{ \frac{1}{P} \sum_k X_2(sR, \Omega_k) H(\Omega_k) \exp(j \Omega_k(n-sR)) \right\}$$

La reconstruction est exacte, si la fenêtre f vérifie la condition de normalisation :

$$\sum_s f(n-sR) = 1; \quad \forall n$$

\* Dans le cas de réponses impulsionnelles longues (canaux acoustiques), l'exploitation de la formulation (6) en vue de l'identification est inopérante, car elle introduit un retard égal à la longueur L de la réponse impulsionnelle. Afin de pallier cette limitation, nous allons segmenter la réponse impulsionnelle à identifier. Cette dernière étant supposée de longueur ( $L = KM$ ), considérons le découpage suivant [6], [7], [8]:

$$h^{(k)}(m) = h(m + kM); \quad m = 0, \dots, M-1; \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (7)$$

En vertu du principe de superposition, le vecteur bloc de sortie correspondra à la somme des sorties élémentaires des sous-systèmes  $\underline{h}^{(k)}$ , ce qui implique donc, en termes de TFCT :

$$\underline{Y}_2(sR) = \underline{F}^\dagger \cdot \sum_{k=0}^{K-1} \underline{X}_2(sR-kM) \cdot \underline{H}^{(k)} \quad (8)$$

La représentation (8) se formule de la même façon que (6) si on appelle  $\underline{H}$  l'empilement des K vecteurs  $\underline{H}^{(k)}$  relatifs aux sous-blocs de la réponse impulsionnelle et  $\underline{X}_2(sR)$  la concaténation horizontale des K matrices diagonales contenant les TFD des sous-blocs de l'entrée associés.

### III - IDENTIFICATION DU MODELE

Ayant établi la relation entre les TFCT de l'entrée et de la sortie (6), nous proposons le schéma d'identification correspondant (fig.3.1). Au système  $\{h(n)\}$  de longueur K.M est associée dans le domaine transformé la structure diagonale de P filtres  $\hat{H}_i$  de longueur K.

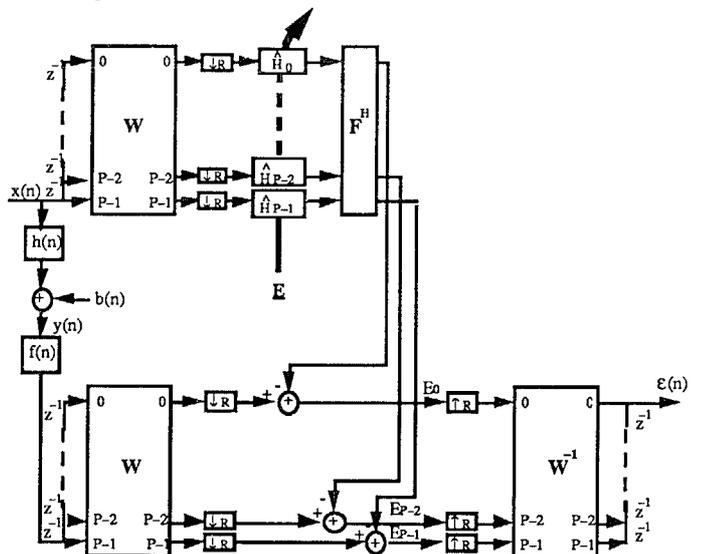


Fig.3.1

Formons, pour le bloc s, le vecteur  $\underline{E}_s$  :

$$\underline{E}_s = \underline{Y}_2(sR) - \underline{F}^\dagger \cdot \underline{X}_2(sR) \cdot \underline{H}_s \quad (9)$$

Les composantes de ce vecteurs ne sont autres que les coefficients de la TFD du signal d'erreur pondéré par la fenêtre f.

$$E_s(k) = E(sR, \Omega_k) = \sum_{n=0}^{P-1} f(n) [y(n+sR) - \sum_{k=0}^{L-1} h(k) x(n-k)] \exp(-jn \Omega_k)$$

Pour établir l'algorithme adaptatif, on suit une démarche similaire à celle conduisant au LMS. Si nous supposons le signal d'entrée stationnaire et le système identifié invariant dans le temps, il est facile de montrer que la valeur quadratique moyenne de l'erreur d'estimation  $\{E[|\underline{E}_s|^2]\}$  est une fonctionnelle quadratique en  $\underline{H}_s$ .

La minimisation de cette fonctionnelle peut être résolue par une méthode de gradient. A chaque itération,  $|\mathbf{E}_s|^2$  vaut :

$$|\mathbf{E}_s|^2 = (\mathbf{Y}_2^{\dagger(sR)} - \hat{\mathbf{H}}_s^{\dagger} \cdot \mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \cdot \mathbf{F}) (\mathbf{Y}_2(sR) - \mathbf{F}^{\dagger} \cdot \mathbf{X}_2(sR) \cdot \hat{\mathbf{H}}_s)$$

Supposons  $\hat{\mathbf{H}}_s$  indépendant de  $\mathbf{X}_2(sR)$ , (cette hypothèse n'est utilisée que pour établir l'algorithme et n'intervient pas dans la preuve de convergence), l'erreur quadratique moyenne est alors :

$$E[|\mathbf{E}_s|^2] = E[\mathbf{Y}_2^{\dagger(sR)} \mathbf{Y}_2(sR)] - 2 E[\mathbf{Y}_2^{\dagger(sR)} \mathbf{F}^{\dagger} \mathbf{X}_2(sR)] \hat{\mathbf{H}}_s + \hat{\mathbf{H}}_s^{\dagger} E[\mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \mathbf{F} \mathbf{F}^{\dagger} \mathbf{X}_2(sR)] \hat{\mathbf{H}}_s$$

Le gradient par rapport à  $\hat{\mathbf{H}}_s$  se déduit immédiatement de cette expression, et la minimisation du critère par la méthode du gradient donne :

$$\hat{\mathbf{H}}_{s+1} = \hat{\mathbf{H}}_s - \mu \cdot \nabla \mathbf{H}_s \tag{10}$$

Comme pour l'algorithme LMS, si on approche le gradient réel par sa valeur instantanée, l'équation de mise à jour du filtre devient alors :

$$\hat{\mathbf{H}}_{s+1} = \hat{\mathbf{H}}_s + 2\mu \cdot \mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \cdot \mathbf{F} \{ \mathbf{Y}_2(sR) - \mathbf{F}^{\dagger} \cdot \mathbf{X}_2(sR) \cdot \hat{\mathbf{H}}_s \} \tag{11}$$

La relation (11) définit un algorithme d'adaptation des coefficients du filtre en fréquence. Cette relation d'adaptation est formellement équivalente à une formule L.M.S., la mise à jour des coefficients faisant intervenir un produit scalaire "modifié" entre le signal d'entrée et l'erreur instantanée, ajusté par la matrice diagonale  $\mu$  qui permet de contrôler la convergence du filtre à chaque fréquence.

#### IV - CONVERGENCE VERS LA SOLUTION DE WIENER-HOPF

La convergence exponentielle presque sûre de l'algorithme est établie au moyen de théorèmes exposés en [3] et appliqués au LMS et NLMS en [4].

On montre qu'en l'absence de segmentation de la réponse impulsionnelle, l'algorithme décrit par la relation (11) converge vers la solution de Wiener-Hopf sous les hypothèses suivantes :

**h1** - Le signal d'entrée du filtre adaptatif est ergodique, stationnaire et borné.

**h2** - Le nombre P de coefficients de la transformée de Fourier est égal à 2L, L étant la longueur de la réponse impulsionnelle du filtre identifié.

**h3** - Le système identifié est invariant .

La preuve de convergence se fait en trois étapes. On montre en premier lieu que pour un signal d'entrée stationnaire et sous la condition (h2), l'équation (11) admet une solution unique.

On montre ensuite que cette solution unique est bien la solution optimale de Wiener-Hopf.

Dans une troisième étape on montre que sous les conditions (h1 - h3) l'algorithme stochastique converge vers la solution de Wiener-Hopf, si les coefficients de convergence vérifient :

$$\mu(i) \leq 1 / |X_2(sR, \Omega_i)|^2 = 1 / M_i \tag{12}$$

Lorsque la réponse impulsionnelle du système est segmentée en sous-blocs, la situation est plus complexe. La minimisation de l'erreur quadratique moyenne  $E\{|\mathbf{E}_s|^2\}$ , n'admet pas une solution unique. En effet, la matrice de covariance associée à la solution de Wiener  $E\{\mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \mathbf{F} \mathbf{F}^{\dagger} \mathbf{X}_2(sR)\}$  est dégénérée. Ceci provient de l'existence de minimas faisant intervenir des convolutions circulaires à l'intérieur de chaque sous-bloc. L'algorithme du gradient, tel qu'il est décrit par (11) ne peut converger vers la solution optimale. Pour forcer la solution on se voit donc conduit à contraindre à chaque itération de l'algorithme,

la longueur des réponses impulsionnelles des sous-blocs du filtre. Cette opération accroît la complexité de l'algorithme, car elle nécessite pour chaque sous-bloc de la réponse impulsionnelle un retour au domaine temporel au moyen d'une FFT inverse, une pondération du sous-bloc afin d'annuler les L dernières composantes, puis un retour au domaine fréquentiel au moyen d'une FFT.

#### V - COMPARAISON AVEC L'UFLMS

L'algorithme UFLMS proposé par Mansour et Gray [2], découlant de la technique overlap-save (OLS), est défini par la relation :

$$\hat{\mathbf{H}}_{k+1} = \hat{\mathbf{H}}_k + \mu \cdot \mathbf{X}_k^{\dagger} \cdot \mathbf{F} \{ \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_k \cdot \hat{\mathbf{H}}_k \} \tag{13}$$

La formulation OLS impose l'emploi d'une fenêtre rectangulaire pour la pondération de la sortie.

Bien que de formes équivalentes, l'algorithme (11) comporte moins de contraintes que (13) et le généralise d'une certaine façon. En effet :

- Le délai de mise à jour du filtre à identifier est réglable par l'intermédiaire du paramètre R de recouvrement des fenêtres. Cette propriété est intéressante car elle peut permettre d'accélérer la convergence et d'améliorer les capacités de poursuite.

- La formulation OLS impose à la fenêtre f d'être rectangulaire. Cette contrainte est levée par la formulation OLA dont découle (11), car elle permet l'utilisation de fenêtres plus sélectives, accentuant ainsi l'orthogonalisation implicite réalisée par la DFT.

#### VI - COMPLEXITE DE L'ALGORITHME

Afin d'analyser la complexité associée à cet algorithme, nous allons présenter les équations permettant l'implantation du filtre adaptatif. Pour ce faire, revenons à la relation (11) de mise à jour du filtre.

$$\hat{\mathbf{H}}_{s+1} = \hat{\mathbf{H}}_s + 2\mu \cdot \mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \cdot \mathbf{F} \{ \mathbf{Y}_2(sR) - \mathbf{F}^{\dagger} \cdot \mathbf{X}_2(sR) \cdot \hat{\mathbf{H}}_s \} \tag{11}$$

Sachant que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{W}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}_2^{\dagger(sR)} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{y}_2^{\dagger(sR)}$$

l'équation de mise à jour du filtre peut se décomposer comme suit :

$$\hat{\mathbf{H}}_{s+1} = \hat{\mathbf{H}}_s + \mu \cdot \mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \cdot \mathbf{E}_s \tag{14.a}$$

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{W} \cdot \mathbf{f}^2 \cdot \{ \mathbf{y}_2^{\dagger(sR)} - \hat{\mathbf{y}}_2^{\dagger(sR)} \} \tag{14.b}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_2^{\dagger(sR)} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{X}_2^{\dagger(sR)} \cdot \hat{\mathbf{H}}_s \tag{14.c}$$

En choisissant un facteur de sous échantillonnage temporel de la TFCT ( $R = \frac{P}{4}$ ) et un facteur de sous échantillonnage fréquentiel ( $P = 2L$ ), la complexité de l'algorithme par rapport aux LMS (nombre de multiplications) est :

$$\gamma = \frac{3 \text{Log}_2 R + 21}{R} \tag{15}$$

Le tableau (6.1), montre qu'à partir R=64, l'algorithme proposé est plus efficace que le LMS.

R	$\gamma$
32	1.219
64	0.656
128	0.352
256	0.187
512	0.099

Tab. 6.1



## VII - SIMULATIONS

D'après les développements du chapitre IV, les constantes d'adaptation doivent vérifier la relation (12), pour assurer la convergence de l'algorithme. Les bornes  $M_j$  étant inconnues dans les situations pratiques, elles sont approximées par normalisation d'une constante  $\zeta$  par l'estimée de l'énergie à la fréquence  $i$ .

Afin d'évaluer les propriétés de convergence asymptotiques de l'algorithme proposé, une simulation a été effectuée sur un système caractérisé par les 256 premiers échantillons d'une réponse impulsionnelle de salle, excité par un bruit fortement corrélé (bruit USASI) (fig. 7.1). L'algorithme proposé a réalisé de meilleures performances tant du point de vue vitesse de convergence que du point de vue variance résiduelle à la convergence.

Les capacités de poursuite de variations de l'algorithme ont été évaluées dans une configuration de type "téléconférence". Les variations du canal acoustique étaient simulées par le mouvement lent d'une plaque de bois face au microphone de prise de son. Dans ce cas (fig. 7.2.), on remarque que l'algorithme proposé réalise à tout instant un meilleur NMSE par rapport au NLMS, car il converge plus vite pendant la première phase et la dernière phase (stationnarité du canal). Cependant dans la phase intermédiaire (mouvement de la plaque), l'algorithme proposé n'apporte qu'une légère amélioration des capacités de poursuite (pentes des deux courbes).

## VIII- CONCLUSION

Nous avons présenté un algorithme d'identification de réponses impulsionnelles longues, reposant sur un découpage en bloc de ces dernières et s'appuyant sur la structure de convolution rapide en TFCT. Nous avons montré qu'en l'absence de segmentation de la réponse impulsionnelle, cet algorithme converge vers la solution optimale. Nous avons montré, par la suite, comment lever la dégénérescence introduite par la segmentation. Nous avons mis en évidence, la réduction de complexité significative que permet cet algorithme par rapport au LMS. Les simulations illustrent les propriétés de convergence de l'algorithme, pour des signaux d'entrée fortement corrélés et pour des canaux variables.

## Références Bibliographiques

- [1] M. R. Portnoff, "Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time Fourier analysis", IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-28, N° 1, Feb. 1980.
- [2] D. Mansour and A. H. Gray Jr., "Unconstrained frequency-domain adaptive filter", IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-30, N° 5, Oct. 1982.
- [3] R.R. Bitmead and B.D.O. Anderson, "Lyapunov techniques for the exponential stability of linear difference equations with random coefficients", IEEE Trans. AC, Vol. AC-25, Aug. 1980.
- [4] R.R. Bitmead and B.D.O. Anderson, "Performance of adaptive estimation algorithms in dependent random environment", IEEE Trans. AC, Vol. AC-25, Aug. 1980.
- [5] R.M. Gray, "On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices", IEEE Trans. IT, Vol. IT-18, Nov. 1972.
- [6] M. Xu, "Antenne adaptative pour prise de son", Thèse de doctorat E.N.S.T., Dec. 1988.

- [7] J.S. Soo and N.N. Pang, "Multidelay block frequency domain adaptive filter", IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-38, Feb. 1990.
- [8] J. Benesty, "Algorithmes du type gradient à complexité de calcul réduite et à capacité de poursuite et vitesse de convergence accrues", Thèse de doctorat Université Paris-Sud Orsay, Avril 1991.

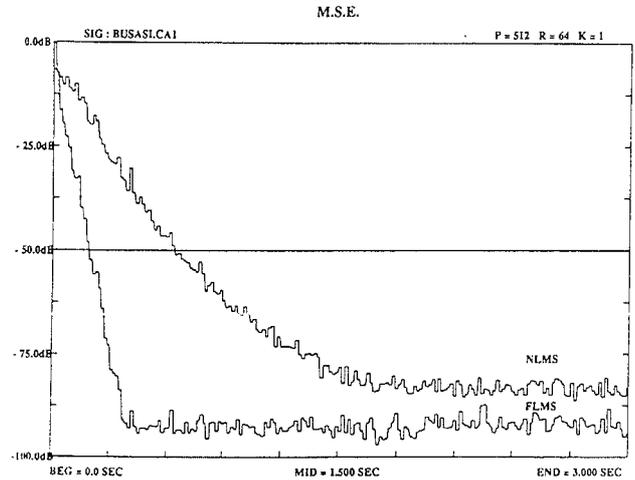


Fig. 7.1.

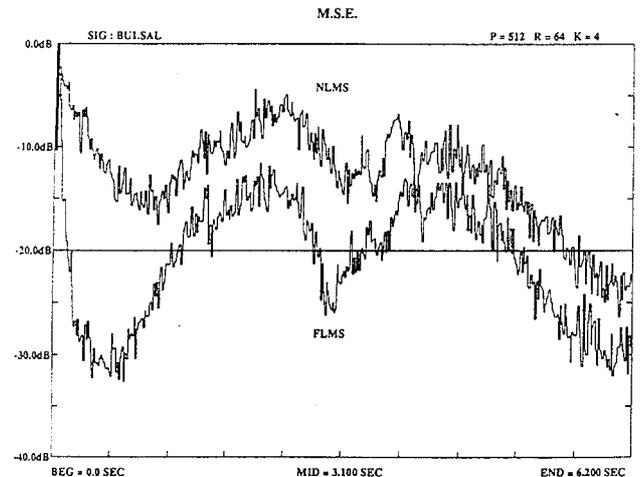


Fig. 7.2.