

Extensions à bande limitée d'une suite de corrélations contiguës

Thierry CHONAVEL, Philippe LOUBATON

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Département Signal.

46 rue Barrault, 75634 Paris CEDEX 13.

Resumé: Dans cet article, on s'intéresse au problème de la construction de l'ensemble des spectres de bande limitée fixée, et de premiers coefficients de corrélation connus. On illustre ces résultats par la mise en évidence d'une famille paramétrique de solutions.

Abstract: In this paper, we study the set of all power spectra carried by a known interval, and satisfying a finite number of correlation constraints. As an example, a parametric family of solutions is produced.

I Introduction.

Le problème de l'estimation du spectre d'un processus aléatoire stationnaire complexe à temps discret $X=(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est fondamental dans le domaine du traitement de signal. Dans un certain nombre d'applications, le processus X est censé posséder un spectre porté par un intervalle $[-\Omega, \Omega]$ connu à l'avance et strictement inclus dans $[-\pi, \pi]$ (dans cet article, la variable spectrale est la pulsation). Concrètement, cette situation peut se rencontrer lorsque X a été obtenu en échantillonnant à une cadence trop élevée un processus stationnaire indexé par \mathbb{R} de bande passante connue. Dans ce cas, il peut être important de prendre en compte cette information a priori dans la phase d'estimation spectrale. Cette problématique a fait l'objet de très nombreux travaux. Cependant, une question importante s'y rattachant semble avoir été quelque peu négligée: étant donné une suite $\gamma = (\gamma_n)_{n=0, N}$ de $N+1$ coefficients complexes, existe-t-il un spectre porté par $[-\Omega, \Omega]$ dont les premiers coefficients de corrélation coïncident avec les $(\gamma_n)_{n=0, N}$, et si oui, comment caractériser l'ensemble de ces spectres. Lorsqu'aucune contrainte n'est imposée sur le support des spectres, la réponse est connue et fait l'objet du très classique problème des moments trigonométriques qui consiste à déterminer l'ensemble \mathcal{M} des mesures positives μ sur $[-\pi, \pi]$ qui vérifient

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\omega} d\mu(\omega) \quad n = 0, N. \quad (1)$$

Dans cette optique, le problème que nous venons d'évoquer et que nous appellerons le problème des moments trigonométriques sur $[-\Omega, \Omega]$ consiste à caractériser le sous ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ des mesures positives de \mathcal{M} qui ne sont portées que par l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$. A notre connaissance, le problème des moments trigonométriques sur un intervalle n'a fait l'objet que de peu de travaux. Dans le livre [4] de Krein et Nudelman, dont l'objet est l'étude de problèmes de moments généralisés par des techniques d'analyse convexe, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes sur la suite γ qui garantissent que $\mathcal{M}(\Omega)$ est non vide ([4] p.295, voir aussi le récent article [1] pour une démonstration directe de ce résultat), mais aucune caractérisation de $\mathcal{M}(\Omega)$ n'est donnée.

Le but de cet article est de résoudre complètement le problème des moments trigonométriques sur $[-\Omega, \Omega]$ en donnant une caractérisation explicite de $\mathcal{M}(\Omega)$. Nous tenons à signaler que les résultats présentés ci dessous ne sont pas toujours directement utilisables en pratique. Tout d'abord, dans le cadre de ce travail, la séquence γ est supposée connue de manière exacte; en pratique, il sera nécessaire de pouvoir l'estimer de telle sorte que les conditions d'existence d'extensions à bande limitée soient vérifiées; ce point est à l'étude actuellement, et nous pensons que compte tenu de la simplicité des conditions assurant que $\mathcal{M}(\Omega) \neq \emptyset$, les méthodes existantes d'estimation des matrices de Toeplitz positives ([2], [5]) devraient pouvoir être adaptées assez simplement. Par ailleurs, en supposant que ce problème statistique puisse être résolu, il restera à mettre en évidence des critères permettant de sélectionner un élément de $\mathcal{M}(\Omega)$ en fonction d'éventuelles informations a priori. Enfin, il n'est pas toujours pertinent de chercher des estimateurs du spectre qui respectent les corrélations, la plupart du temps estimées, donc entachées d'erreurs; une autre approche que celle qui est développée ici consisterait à chercher dans une classe de modèles paramétriques à bande limitée celui qui est le plus compatible avec les observations. Malgré ces remarques, nous pensons que les considérations qui suivent sont utiles en ce sens qu'elles permettent de mieux appréhender les problèmes posés par l'estimation spectrale à bande limitée.

Notations générales.

D représente le disque unité ouvert de \mathbb{C} . Si A est un ensemble, A^c désigne son complémentaire. Si O est un ouvert de \mathbb{C} , nous noterons respectivement \bar{O} et ∂O l'adhérence et la frontière de O . Soient ε_1 et ε_2 deux points du cercle unité; alors, l'arc de ∂D joignant ε_1 à ε_2 et parcouru dans le sens positif sera noté $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ (ou $] \varepsilon_1, \varepsilon_2 [$, si ε_1 et ε_2 n'y appartiennent pas). Si $z \in \mathbb{C}$, \bar{z} désigne son complexe conjugué.

II Rappel sur le problème des moments trigonométriques.

Dans cette section, nous allons rappeler brièvement les principaux résultats relatifs au problème des moments trigonométriques. Il est bien connu que \mathcal{M} est non vide si et seulement si (ssi) la matrice de



Toeplitz $\Gamma_N = (\gamma_{m-n})_{(m,n)=0,N}$ est positive. Si Γ_N est positive singulière, \mathcal{M} est réduit à un unique élément qui est la somme de au plus N masses de Dirac. Si Γ_N est définie positive, ce que nous supposons dorénavant, \mathcal{M} contient une infinité d'éléments. La détermination de tous les éléments de \mathcal{M} se ramène à un problème classique d'interpolation dans la classe \mathcal{E} des fonctions de Carathéodory, ie. les fonctions holomorphes et de partie réelle positive dans D . En effet, pour toute fonction $F(z)$ de \mathcal{E} , il existe une mesure positive unique μ telle que

$$F(z) = i\text{Im}[F(0)] + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\mu(\omega) = i\text{Im}[F(0)] + \mu_0 + 2\mu_{-1}z + \dots + 2\mu_{-N}z^N + \dots \quad (2)$$

où les $(\mu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont définis par

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} e^{ik\omega} d\mu(\omega);$$

dans les bons cas (par exemple lorsque F est prolongeable par continuité sur le disque fermé \bar{D}), $d\mu(\omega)$ coïncide avec $\text{Re}[F(e^{i\omega})]d\omega$. La détermination de l'ensemble des mesures positives qui satisfont (1) est donc équivalente à celle de l'ensemble des fonctions F de \mathcal{E} telles que

$$F(z) = \gamma_0 + 2\gamma_{-1}z + \dots + 2\gamma_{-N}z^N + O(z^{N+1}) \quad (3)$$

(on pose $\gamma_{-N} = \overline{\gamma_N}$). L'expression des solutions de ce problème d'interpolation met en jeu les polynômes orthogonaux de Szegő de première et de deuxième espèce ([3]) dont nous allons rappeler les définitions: puisque la matrice Γ_N est définie positive, on définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace des polynômes de degrés inférieur ou égal à N en posant $\langle z^m, z^n \rangle = \gamma_{m-n}$; les polynômes $(Q_n(z))_{n=0,N}$ de première espèce (encore appelés polynômes prédicteurs) sont les polynômes de degré n , de coefficient de terme de plus haut degré égal à 1, et qui vérifient $\langle Q_m, Q_n \rangle = 0$ pour $m \neq n$ (on pose $Q_0(z) = 1$); ils vérifient la relation de récurrence $Q_n(z) = zQ_{n-1}(z) - k_n Q_{n-1}^*(z)$ (où les k_n ($n=1, N$) sont les coefficients de réflexion associés à Γ_N), et leurs zéros sont situés dans le disque unité ouvert. Les polynômes orthogonaux de deuxième espèce sont définis à partir des précédents par $P_n(z) = [(\gamma_0 + 2\gamma_{-1}z^{-1} + \dots + 2\gamma_{-n}z^{-n})Q_n(z)]_+$ où $[\]_+$ désigne la partie polynomiale de l'expression entre crochets. Dans ces conditions, une fonction $F(z)$ définie sur D est une fonction de classe \mathcal{E} qui vérifie (3) ssi elle s'écrit sous la forme

$$F(z) = \frac{P_N^*(z) + zP_N(z)S(z)}{Q_N^*(z) - zQ_N(z)S(z)} \quad (4)$$

où $S(z)$ appartient à l'ensemble \mathcal{V} des fonctions de Schur, ie. les fonctions holomorphes de module inférieur ou égal à 1 dans D (si $A(z)$ désigne un polynôme, $A^*(z)$ désigne le polynôme $z^{\text{deg}(A)}\overline{A(1/z)}$, où le symbole $\overline{}$ représente l'opérateur de conjugaison des coefficients). L'élément μ de \mathcal{M} correspondant à la fonction $F(z)$ donnée par (4) peut alors se calculer explicitement dans les cas favorables; si la fonction est F est prolongeable par continuité sur \bar{D} (ce qui a lieu si par exemple S est prolongeable par continuité, et de module strictement inférieur à 1 sur D), $d\mu(\omega)$ est une mesure absolument continue dont la densité correspondante s'écrit sous la forme

$$f(\omega) = \frac{\sigma_N^2 (1 - |S(e^{i\omega})|^2)}{|Q_N^*(e^{i\omega}) - e^{i\omega}Q_N(e^{i\omega})S(e^{i\omega})|^2} \quad (5)$$

où $\sigma_N^2 = \langle Q_N, Q_N \rangle$ (autrement dit l'erreur de prédiction à la dernière étape de l'algorithme de Levinson); le cas $S=0$ correspond à l'estimateur du maximum d'entropie.

Certaines solutions du problème des moments trigonométriques vont jouer un rôle important dans la suite: nous désignons par \mathcal{M}_c le sous ensemble de \mathcal{M} des solutions μ du problème des moments trigonométriques obtenues en choisissant d'étendre à un pas la suite γ par $\gamma \cup \{\gamma_{N+1}\}$ de telle sorte que la matrice de Toeplitz correspondante soit singulière. Ainsi que cela est bien connu, les γ_{N+1} associés s'obtiennent en imposant un coefficient de réflexion de module 1 à l'étape $N+1$ de l'algorithme de Levinson, et ils décrivent le cercle $\partial E = \{\gamma_{N+1}(\varepsilon) = e_N + \sigma_N^2 \varepsilon / \varepsilon \in \partial D\}$ de rayon σ_N^2 et de centre

$$e_N = - \sum_{k=1, N} q_{k, N} \gamma_{N+1-k},$$

où les $(q_{k, N})_{k=1, N}$ sont définis par le fait que

$$Q_N(z) = z^N + \sum_{k=1, N} q_{k, N} z^{N-k};$$

rappelons que le disque ouvert E délimité par ∂E coïncide avec l'ensemble des γ_{N+1} pour lesquels la séquence $\gamma \cup \{\gamma_{N+1}\}$ définit une matrice de Toeplitz définie positive. Pour chaque $\varepsilon \in \partial D$, il existe une mesure μ_ε unique appartenant à \mathcal{M}_c pour laquelle

$$\gamma_{N+1}(\varepsilon) = e_N + \sigma_N^2 \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(N+1)\omega} d\mu_\varepsilon(\omega);$$

il s'agit d'une mesure discrète portée par $N+1$ points distincts, qui coïncident avec les arguments des zéros du polynôme $Q_{N+1, \varepsilon}(z) = zQ_N(z) - \varepsilon Q_N^*(z)$, et pour laquelle la fonction de Schur $S(z)$ associée par la relation (4) est constante et vaut $\bar{\varepsilon}$. Les éléments de \mathcal{M}_c correspondent à ce qui est appelé dans le cadre plus général de l'étude de Krein et Nudelman ([4], chap. 4) les solutions canoniques du problème des moments trigonométriques.

III Caractérisation de $\mathcal{M}(\Omega)$

D'après ce qui précède, le problème de la caractérisation de $\mathcal{M}(\Omega)$ est équivalent à celui de la détermination de l'ensemble des fonctions de Schur $S(z)$ pour lesquelles la fonction $F(z)$ définie par (4) est associée à une mesure positive portée par $[-\Omega, \Omega]$ uniquement; grâce à la formule de représentation (2) des fonctions de classe \mathcal{E} , il est assez facile de constater que cette dernière condition équivaut à dire que $F(z)$ appartient à la classe $\mathcal{E}(\Omega)$ des éléments de \mathcal{E} qui sont prolongeables par continuité et de partie réelle nulle sur l'arc $\{e^{i\theta} / \theta \in [-\Omega, \Omega]^c\}$. Dans ces conditions, la caractérisation de $\mathcal{M}(\Omega)$ apparaît comme la restriction à $\mathcal{E}(\Omega)$ du problème d'interpolation considéré dans la partie II. L'étape cruciale dans l'obtention du résultat est une interprétation de la condition $\mathcal{M}(\Omega) \neq \emptyset$ qui met en jeu le déphaseur stable $B_N(z) = zQ_N(z)/Q_N^*(z)$ (la stabilité de $B_N(z)$ provient du fait que les zéros de $Q_N^*(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité), et qui est basée sur une étude des propriétés de certaines solutions du problème des moments trigonométriques sur $[-\Omega, \Omega]$ qualifiées de canoniques dans le cadre général de l'étude [4] de Krein et Nudelman. Auparavant, il nous faut rappeler la condition sous laquelle $\mathcal{M}(\Omega)$ est non vide ([4] p295) qui repose sur un théorème d'analyse convexe et sur un résultat de représentation des polynômes trigonométriques positifs sur un intervalle ([4] p294).

Théorème 1: Soit $\gamma' = \{\gamma'_n\}_{n=0, N-1}$ la suite définie par $\gamma'_n = \gamma_{n+1} + \gamma_{n-1} - 2\gamma_n \cos \Omega$. Alors, $\mathcal{M}(\Omega) \neq \emptyset$ ssi les matrices de Toeplitz $\Gamma_N = (\gamma_{m-n})_{(m,n)=0, N}$ et $\Gamma'_{N-1} = (\gamma'_{m-n})_{(m,n)=0, N-1}$ sont positives.

Afin de permettre au lecteur de bien comprendre ce résultat, sans avoir à se reporter à sa démonstration, établissons rapidement la

condition nécessaire. Soit μ un élément de $\mathcal{M}(\Omega)$; alors, comme μ ne charge pas $[-\Omega, \Omega]^c$, la mesure μ' définie par $d\mu'(\omega) = 2(\cos\omega - \cos\Omega)d\mu(\omega)$ est positive. Mais, puisque μ vérifie (1), il vient que

$$\gamma'_n = 1/2\pi \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\omega} d\mu'(\omega) \text{ pour } n=0, N-1;$$

la positivité de μ' implique alors la positivité de Γ'_{N-1} .

Dans la suite, nous supposons que Γ_N et Γ'_{N-1} sont définies positives auquel cas $\mathcal{M}(\Omega)$ contient une infinité d'éléments [4]; dans le cas où l'une ou l'autre des deux matrices Γ_N ou Γ'_{N-1} est singulière, $\mathcal{M}(\Omega)$ est réduit à un élément unique qui est une somme de masses de Dirac (voir [1] par exemple). Le fait que $\mathcal{M}(\Omega)$ soit non vide implique en particulier qu'il est possible de trouver γ_{N+1} tel que $\gamma \cup \{\gamma_{N+1}\}$ possède des extensions à bande limitée, autrement dit tel que les matrices $\Gamma_{N+1} = (\gamma_{m-n})_{(m,n)=0, N+1}$ et $\Gamma'_N = (\gamma'_{m-n})_{(m,n)=0, N}$ (où on pose $\gamma'_N = \gamma_{N+1} + \gamma_{N-1} - 2\gamma_N \cos\Omega$) soient positives. Le fait que Γ_{N+1} soit positive équivaut à dire que γ_{N+1} appartient au disque fermé \bar{E} défini dans la section II. Soit E' le disque analogue de E relatif à la séquence positive γ' , et appelons F le disque $E' + 2\gamma_N \cos\Omega - \gamma_{N-1}$; alors, Γ'_N est positive ssi γ'_N appartient à \bar{E}' , ie. ssi γ_{N+1} appartient à \bar{F} . La condition $\mathcal{M}(\Omega) \neq \emptyset$ implique donc que les disques \bar{E} et \bar{F} ont une intersection non vide. On peut en fait établir un résultat un peu plus précis, soit en invoquant un résultat général de [4], soit en effectuant une démonstration directe élémentaire que nous omettons ici

Lemme 2: Les cercles ∂E et ∂F possèdent deux points d'intersections (distincts).

Dans la suite, nous noterons $\gamma_{N+1, i} = e_N + \sigma_N^2 \varepsilon_i$ ($|\varepsilon_i| = 1, i=1, 2$) les points de $\partial E \cap \partial F$ numérotés de telle sorte que $\partial E \cap F = \{e_N + \sigma_N^2 \varepsilon / \varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[\}$.

Remarque: Le fait d'avoir déterminé l'ensemble des γ_{N+1} tels que $\gamma \cup \{\gamma_{N+1}\}$ possède des extensions à bande limitée permet de construire récursivement sur K des extensions à K pas $\gamma \cup \{\gamma_{N+1}, \dots, \gamma_{N+K}\}$ du même type. Supposons que l'on dispose de la suite $(\gamma_n)_{n=0, N+K-1}$ et des disques E_K et F_K correspondant à E et à F ; il suffit alors de choisir γ_{N+K} dans $\bar{E}_K \cap \bar{F}_K$ puis de recalculer les rayons et les centres de E_{K+1} et F_{K+1} grâce à l'algorithme de Levinson appliqué aux suites $(\gamma_n)_{n=0, N+K}$ et $(\gamma'_n)_{n=0, N+K-1}$.

Nous sommes à présent en mesure d'introduire le concept de solution canonique du problème des moments trigonométriques sur $[-\Omega, \Omega]$, présenté dans un contexte plus général dans [4]. Soit μ un élément de $\mathcal{M}(\Omega)$, et $\gamma_{N+1}(\mu)$ son $N+1^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier. Posons $\gamma'_N(\mu) = \gamma_{N+1}(\mu) + \gamma_{N-1} - 2\gamma_N \cos\Omega$, et désignons par $\Gamma_{N+1}(\mu)$ et $\Gamma'_N(\mu)$ les matrices de Toeplitz associées aux suites $\gamma \cup \{\gamma_{N+1}(\mu)\}$ et $\gamma' \cup \{\gamma'_N(\mu)\}$. Alors, on dira que μ est une solution canonique du problème des moments trigonométriques sur $[-\Omega, \Omega]$ si au moins l'une des matrices $\Gamma_{N+1}(\mu)$ ou $\Gamma'_N(\mu)$ est singulière. Nous désignons par $\mathcal{M}_c(\Omega)$ l'ensemble de ces solutions.

Nous allons étudier les éléments de $\mathcal{M}_c(\Omega)$ pour lesquels $\Gamma_{N+1}(\mu)$ est singulière. Les solutions canoniques pour lesquelles $\Gamma_{N+1}(\mu)$ est définie positive jouent un rôle fondamental dans la démonstration du principal résultat de cet article (Th.5); cependant, nous ne les caractériserons pas ici, car elles ne sont utiles que dans la preuve du Théorème 5 que nous ne reproduisons pas faute de place.

Commençons par considérer les solutions canoniques μ pour lesquelles $\Gamma_{N+1}(\mu)$ et $\Gamma'_N(\mu)$ sont singulières. D'après ce qui précède, μ vérifie ces conditions ssi $\gamma_{N+1}(\mu) \in \partial E \cap \partial F$, ie. ssi $\gamma_{N+1}(\mu)$

coïncide avec $\gamma_{N+1,1}$ ou $\gamma_{N+1,2}$. On en déduit qu'il existe deux mesures de ce type, μ_1 et μ_2 qui vérifient $\gamma_{N+1}(\mu_i) = e_N + \sigma_N^2 \varepsilon_i$ ($|\varepsilon_i| = 1, i=1, 2$). μ_i est une somme de $N+1$ masses de Dirac dont les points de masse sont les arguments des zéros du polynôme $Q_{N+1, \varepsilon_i}(z) = zQ_N(z) - \varepsilon_i Q_N^*(z)$. Par ailleurs, l'appartenance de $\gamma_{N+1}(\mu_i)$ à ∂F équivaut à dire que $\gamma'_N(\mu_i) \in \partial E'$. Soit μ'_i la mesure positive définie par $d\mu'_i(\omega) = 2(\cos\omega - \cos\Omega)d\mu_i(\omega)$; alors, $\gamma'_N(\mu_i)$ coïncide avec le $N^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de μ'_i , et comme $\gamma'_N(\mu_i) \in \partial E'$, μ'_i est la somme de N masses de Dirac. Compte tenu des relations entre μ_i et μ'_i , il est nécessaire que l'une des deux mesures μ_i charge Ω (et pas $-\Omega$), et que l'autre charge $-\Omega$ (et pas Ω). Par conséquent, $Q_{N+1, \varepsilon_i}(e^{i\Omega}) = 0$ ou $Q_{N+1, \varepsilon_i}(e^{-i\Omega}) = 0$ ($i=1, 2$). Soit $B_N(z)$ le déphaseur stable défini par $B_N(z) = zQ_N(z)/Q_N^*(z)$; ce qui précède implique alors que $B_N(e^{i\Omega}) = \varepsilon_1$ et $B_N(e^{-i\Omega}) = \varepsilon_2$ ou que $B_N(e^{i\Omega}) = \varepsilon_2$ et $B_N(e^{-i\Omega}) = \varepsilon_1$. Etudions à présent les éléments μ de $\mathcal{M}(\Omega)$ pour lesquels $\Gamma_{N+1}(\mu)$ est singulière et $\Gamma'_N(\mu)$ définie positive. μ vérifie ces conditions ssi $\gamma_{N+1}(\mu) \in \partial E \cap F$, c'est à dire ssi μ est l'un des éléments de \mathcal{M}_c dont le coefficient de réflexion ε appartient à l'arc $]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$. Ceci signifie que $\forall \varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$, les arguments des zéros de $Q_{N+1, \varepsilon}(z) = zQ_N(z) - \varepsilon Q_N^*(z)$ appartiennent à $[-\Omega, \Omega]$. On en déduit alors le résultat suivant:

Proposition 3: Le déphaseur pur $B_N(z) = zQ_N(z)/Q_N^*(z)$ vérifie $B_N(|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[) =]\varepsilon_2, \varepsilon_1[$, et $B_N(|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}] =]\varepsilon_2, \varepsilon_1]$.

Démonstration: supposons qu'il existe $\zeta \in]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$ et $\varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ tels que $B_N(\zeta) = \varepsilon$. Alors, $Q_{N+1, \varepsilon}(\zeta) = 0$, ce qui est impossible car les arguments de zéros de $Q_{N+1, \varepsilon}(z)$ doivent appartenir à $[-\Omega, \Omega]$. Par suite, $B_N(|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[) \subset]\varepsilon_2, \varepsilon_1[$; mais puisque $(B_N(e^{i\Omega}), B_N(e^{-i\Omega})) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ou $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ et que $B_N(|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}]$ est un arc de ∂D , il est clair que $B_N(|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}] =]\varepsilon_2, \varepsilon_1]$.

Ce résultat a quelques conséquences intéressantes. Tout d'abord, il convient de rappeler que comme $B_N(z)$ et $Q_N(z)/Q_N^*(z)$ n'ont pas de pôle dans le disque unité, $B_N(e^{i\omega})$ et $Q_N(e^{i\omega})/Q_N^*(e^{i\omega})$ parcourent le cercle unité dans le sens positif lorsque ω croît. On en déduit d'une part que $B_N(e^{-i\Omega}) = \varepsilon_1$ et $B_N(e^{i\Omega}) = \varepsilon_2$, et d'autre part que la variation de l'argument de $B_N(z)$ sur $|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$, autrement dit l'angle entre ε_1 et ε_2 , est strictement supérieure à $2(\pi - \Omega)$. Ensuite, il est remarquable de constater que l'existence d'extensions à bande limitée implique que la variation de l'argument de $B_N(z)$ sur $|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$ soit inférieure à 2π . En fait, il est élémentaire d'établir que cette condition nécessaire est aussi suffisante en adaptant la démonstration de la proposition (3).

Théorème 4: Si Γ_N est définie positive, $\mathcal{M}(\Omega) \neq \emptyset$ ssi la variation de l'argument de $B_N(z)$ sur l'arc $|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}]$ est inférieure ou égale à 2π . Dans ce cas, $\mathcal{M}(\Omega)$ est réduit à un unique élément (ie. Γ'_{N-1} est singulière) ssi $B_N(e^{i\Omega}) = B_N(e^{-i\Omega})$, et contient une infinité d'éléments (ie. Γ'_{N-1} est définie positive) ssi $B_N(e^{i\Omega}) \neq B_N(e^{-i\Omega})$. Dans ce dernier cas, la plus petite valeur de ω pour laquelle la séquence $(\gamma_n)_{n=0, N}$ coïncide avec les premiers coefficients de Fourier d'une mesure portée par $[-\omega, \omega]$ est égal à la plus grande racine de l'équation $B_N(e^{i\omega}) = B_N(e^{-i\omega})$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat de cet article. Notons $\mathcal{Y}(\Omega,]\bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_1])$ l'ensemble des fonctions de Schur prolongeables par continuité sur $|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$ et qui vérifient $S(e^{i\theta}) \in]\bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_1]$ pour tout élément $e^{i\theta}$ de l'arc $|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$; ceci implique en particulier que $|S(e^{i\theta})| = 1$ sur $|e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$.

Théorème 5: La fonction de Carathéodory

$$F(z) = \frac{P_N^*(z) + S(z)zP_N(z)}{Q_N^*(z) - S(z)zQ_N(z)}$$



est associée via la relation (2) à un élément μ de $\mathcal{M}(\Omega)$ ssi la fonction S appartient à $\mathcal{Y}(\Omega, [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1])$.

Faute de place, nous ne donnons qu'une idée de la démonstration (voir [6] pour une démonstration complète). Commençons par rappeler que la fonction $F(z)$ correspond à un élément de $\mathcal{M}(\Omega)$ ssi elle appartient à la classe $\mathcal{E}(\Omega)$. Si $S(z) \in \mathcal{Y}(\Omega, [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1])$, il est facile de voir que $Q_N^*(e^{i\omega}) - S(e^{i\omega})e^{i\omega}Q_N(e^{i\omega})$ ne peut s'annuler sur $]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$ du fait de la proposition 3. De ceci, on déduit immédiatement que $F(z)$ est prolongeable par continuité sur $]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$. Pour montrer que la partie réelle de $F(z)$ est nulle sur $]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$, il suffit de remarquer que la formule (5) s'applique sur cet arc, et que $|S(e^{i\theta})|=1$ sur $]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$. La réciproque est plus délicate à démontrer; elle repose sur un lemme qui dérive de l'étude des solutions canoniques μ du problème des moments trigonométriques sur $[-\Omega, \Omega]$ pour lesquelles $\Gamma_{N+1}(\mu)$ est définie positive, et d'un résultat général de [4].

Pour que ce résultat soit utile, il est nécessaire de pouvoir caractériser les éléments de $\mathcal{Y}(\Omega, [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1])$. Pour ceci, on commence par remarquer qu'il est toujours possible de se ramener au cas où $-1 \notin [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1]$; dans le cas contraire, il existe $\alpha \in \partial D$ tel que $-1 \notin [\alpha \bar{\epsilon}_2, \alpha \bar{\epsilon}_1]$, et les éléments de $\mathcal{Y}(\Omega, [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1])$ s'obtiennent en multipliant par $\bar{\alpha}$ ceux de $\mathcal{Y}(\Omega, [\alpha \bar{\epsilon}_2, \alpha \bar{\epsilon}_1])$. Nous supposons donc dans la suite que $-1 \notin [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1]$.

Posons $y_i = -\text{tg}[\arg(\bar{\epsilon}_i)/2]$ pour $i=1,2$; alors $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$. De plus, on vérifie immédiatement qu'une fonction S appartient à $\mathcal{Y}(\Omega, [\bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_1])$ ssi la fonction $G(z) = \frac{1-S(z)}{1+S(z)}$ appartient à la classe $\mathcal{E}(\Omega, [y_1, y_2])$ constituée des fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ dont la partie imaginaire appartient à $[y_1, y_2]$ sur l'arc $]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$. L'intérêt de cette formulation est qu'il est très facile de caractériser les fonctions de la classe $\mathcal{E}(\Omega, [y_1, y_2])$. En effet, les fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ sont celles qui s'écrivent sous la forme

$$G(z) = i\beta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\lambda(\omega)$$

pour $z \in D \cup]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et λ est une mesure positive bornée. Sur $]e^{i\Omega}, e^{-i\Omega}[$ la partie imaginaire de $G(z)$ s'écrit sous la forme

$$\text{Im}[G(e^{i\theta})] = \beta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cotg\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) d\lambda(\omega)$$

et en étudiant les variations de l'application $\theta \rightarrow \text{Im}[G(e^{i\theta})]$ sur $[-\Omega, \Omega]^c$, on voit immédiatement que $G(z)$ appartient à $\mathcal{E}(\Omega, [y_1, y_2])$ ssi

$$y_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cotg\left(\frac{\Omega + \omega}{2}\right) d\lambda(\omega) \leq \beta \leq y_2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cotg\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right) d\lambda(\omega) \quad (6)$$

Les éléments de $\mathcal{E}(\Omega, [y_1, y_2])$ sont donc paramétrés par les mesures positives λ et les réels β qui vérifient (6). A titre d'exemple, mettons en évidence une sous classe d'éléments de $\mathcal{E}(\Omega, [y_1, y_2])$, et étudions les mesures de $\mathcal{M}(\Omega)$ associées. On considère le cas où $d\lambda(\omega) = g(\omega)\chi_{[-\Omega, \Omega]}(\omega)d\omega$ ($\chi_{[-\Omega, \Omega]}(\omega)$ est la fonction indicatrice de $[-\Omega, \Omega]$) avec $g(\omega) = (\cos\omega - \cos\Omega)P(e^{i\omega})$, et $P(e^{i\omega})$ un polynôme trigonométrique positif pair. Le facteur $(\cos\omega - \cos\Omega)$ garantit la convergence des intégrales présentes dans (6). Pour trouver $P(e^{i\omega})$ et β satisfaisant (6), il suffit que

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \left[\cotg\left(\frac{\Omega + \omega}{2}\right) + \cotg\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right) \right] g(\omega) d\omega$$

soit inférieur à $2\pi(y_2 - y_1)$. Mais, du fait de l'hypothèse de parité de $P(e^{i\omega})$, cette intégrale est positive, et il suffit au besoin de

multiplier $g(\omega)$ par une constante positive pour que l'inégalité soit satisfaite. $P(e^{i\omega})$ et β étant choisis, les valeurs prises par $G(e^{i\omega})$ sur le cercle unité se calculent explicitement: la partie réelle de $G(e^{i\omega})$ coïncide avec $g(\omega)\chi_{[-\Omega, \Omega]}(\omega)$, et sa partie imaginaire avec la transformée de Hilbert discrète de sa partie réelle. Dans le cas particulier considéré ici, on trouve pour $\omega \in [-\Omega, \Omega]$

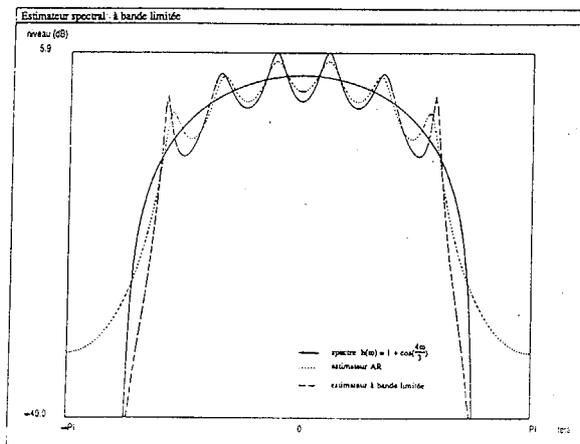
$$\text{Im}[G(e^{i\omega})] = \beta + g(\omega) \left[\ln \left| \sin\left(\frac{\Omega + \omega}{2}\right) \right| - \ln \left| \sin\left(\frac{\Omega - \omega}{2}\right) \right| \right] + Q(e^{i\omega})$$

où $Q(e^{i\omega})$ est un polynôme trigonométrique dont les coefficients s'expriment simplement en fonction de ceux de P . Indiquons finalement la forme des mesures de $\mathcal{M}(\Omega)$ qui correspondent à des fonctions G de ce type. Il est facile de voir que dès que les inégalités de (6) sont strictes, tout élément de $\mathcal{M}(\Omega)$ associé à une fonction G du type précédemment considéré s'écrit sous la forme $f(\omega)d\omega$, où f est continue sur $[-\pi, \pi]$; en particulier, $f(-\Omega) = f(\Omega) = 0$. L'expression explicite de f peut alors être obtenue grâce à la formule (5) en posant $S(z) = \frac{1-G(z)}{1+G(z)}$.

Pour illustrer ce qui précède par un exemple concret très simple, on considère les sept premiers coefficients de corrélation de la densité spectrale

$$h(\omega) = [1 + \cos(4\omega/3)] \chi_{[-3\pi/4, 3\pi/4]}(\omega).$$

On fixe $\beta = (y_1 + y_2)/2$ et $g(\omega) = C(\cos\omega - \cos\Omega)$, où C est le plus grand réel positif tel que la relation (6) soit vérifiée. On obtient alors l'estimateur à bande limitée tracé ci dessous. L'estimateur du maximum d'entropie est aussi représenté à titre de comparaison.



REFERENCES

[1] K.S. Arun, L.E. Potter, *Existence and uniqueness of band-limited, positive semi-definite extrapolations*, IEEE. Trans. Acous. Speech, Signal Processing, 38, n°3, March 1990, pp.547-549.
 [2] S. Degerine, *Fonction d'autocorrélation partielle et estimation autorégressive dans le domaine temporel*, Thèse de Docteur es Sciences, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988.
 [3] L.Y. Geronimus, *Orthogonal Polynomials*, New York: Consultants Bureau 1961.
 [4] M.G. Krein, A.A. Nudelman, *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, Transl. Math. Monographs 50, American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1977.
 [5] J.P. Le Cadre, P. Lopez, *Estimation d'une matrice interspectrale de structure imposée. Applications*, Traitement du signal, 1, 3-17, 1984.
 [6] T. Chonavel, Ph. Loubaton, *On the realisation of band-limited power spectra from partial covariance sequences*, en préparation.