

**SOUSTRACTION DE BRUIT EN SITUATION NON-LINEAIRE
UTILISANT LES FILTRES DE VOLTERRA.**

Pierre-Olivier Amblard, Daniel Baudois,
Christine Servièrè.

CEPHAG- ENSIEG-Domaine Universitaire, BP 46
38402 Saint-Martin d'Hères Cédex

RÉSUMÉ

Ce papier concerne l'utilisation des filtres de Volterra pour la Soustraction de Bruit dans un cadre non-linéaire. Nous travaillons avec le formalisme discret introduit par B. Picinbono et P. Duvaut qui s'avère un outil puissant et bien adapté aux traitements adaptatifs. D'autre part, en vue de généraliser le corrélofiltre linéaire au cas linéaire-quadratique (LQ), nous proposons une orthogonalisation de l'espace LQ par le biais de l'annulation des moments d'ordre trois du processus observé. Les deux parties de l'exposé sont finalement illustrées par quelques simulations.

ABSTRACT

This paper deals with the use of Volterra filters for Noise Cancellation in a non-linear context. We work with the discrete formalism introduced by B. Picinbono and P. Duvaut which appears to be a powerful tool for the problem and for its adaptive processing. On another hand, in order to generalize the linear correfilter to the linear-quadratic (LQ) case, we propose an orthogonalization of the LQ space using the cancellation of the third order moments of the observed process. Finally, some simulations illustrate these two parts.

1- Introduction.

La Soustraction de Bruit (SdB) est une méthode d'élimination de bruit d'un signal lorsque l'on a accès à une référence liée au bruit pollueur. Elle est basée sur des hypothèses du type indépendance entre le signal et la référence (par exemple, hypothèse de décorrélation - indépendance d'ordre 2 - dans le cas d'un lien linéaire). Le principe de la méthode est d'identifier ce lien afin d'estimer le bruit et le retrancher du signal bruité (fig.1).

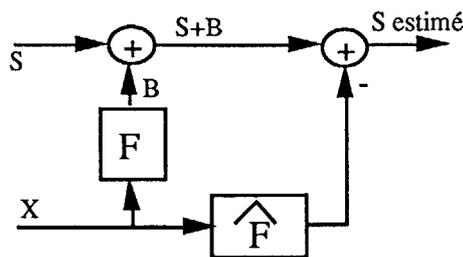


Figure 1 : Principe de la SdB.

La SdB a été largement étudiée ces dernières années [1] dans le cas où le filtre identifié \hat{F} est cherché dans la classe des filtres linéaires. Dans ce cas, le filtre \hat{F} retenu minimise l'écart quadratique moyen (EQM) entre le bruit B et son estimé $\hat{F}(X)$, X étant la référence bruit. Pratiquement, l'accès à B est impossible, mais l'hypothèse de décorrélation entre le signal S et la référence X conduit à la conclusion " Minimiser l'EQM entre B et $\hat{F}(X)$ est équivalent à minimiser l'EQM entre S+B et $\hat{F}(X)$ ". La solution de ce problème est le célèbre filtre de Wiener permettant d'estimer B par filtrage linéaire de X.

La SdB a été étudiée dans le cas non-stationnaire [1] pour lequel les algorithmes adaptatifs sont naturellement intervenus, mais d'autres situations plus complexes n'ont été que peu abordées. Notamment, lorsque le lien F entre X et B est non-linéaire, la recherche de \hat{F} dans la classe des filtres linéaires ne

constitue qu'une approximation au premier ordre de F. Nous allons donc nous attacher ici à chercher \hat{F} dans une classe plus large : les filtres de Volterra.

2- Filtrage de Volterra et Soustraction de Bruit.

Les filtres de Volterra (fdV) [2] sont des filtres non-linéaires invariants pouvant s'exprimer sous forme de convolution multidimensionnelle. Soit en effet x(t) un signal réel, une filtrée de Volterra d'ordre n de x(t) s'écrit :

$$(2.1) H_n(x(t)) = \int \dots \int h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Le filtre est dit homogène [2] car $H_n(a \cdot x(t)) = a^n \cdot H_n(x(t))$. On définit alors de manière plus générale un fdV non-homogène d'ordre n par :

$$(2.2) y(t) = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(x(t))$$

L'identification des noyaux h_n est délicate dans le cas général. Dans un contexte discret et pour des filtres à mémoire finie, B. Picinbono et P. Duvaut ont introduit un formalisme permettant de pallier cet inconvénient. Nous allons en rappeler les principes avant de les appliquer à la SdB.

2.1- Filtrage de Volterra discrets réels.

Soit x(k) un signal réel discret. On définit une filtrée de Volterra d'ordre n et de mémoire N de x(k) par :

$$(2.3) H_n(x(k)) = \sum_{i_1=0}^N \dots \sum_{i_n=0}^N h_n(i_1, \dots, i_n) x(k-i_1) \dots x(k-i_n)$$



et un fdV non-homogène d'ordre n par :

$$(2.4) \quad y(k) = h_0 + \sum_{j=1}^n H_j(x(k))$$

On peut alors ranger les $h_n(i_1, \dots, i_n)$ dans un vecteur \underline{h}_n de \mathbb{R}^{N^n} et agir de même pour les observations $x(k-i_1) \dots x(k-i_n)$ afin de créer le vecteur \underline{x}_n [3] (il faut toutefois ranger les composantes dans un ordre adéquat). En posant alors :

$$(2.5) \quad \underline{X}^T = (x_1^T - E[x_1^T] \quad x_2^T - E[x_2^T] \quad \dots \quad x_n^T - E[x_n^T])$$

$$\underline{H}^T = (h_1^T \quad h_2^T \quad \dots \quad h_n^T)$$

(l'opération de centrage élimine h_0) qui sont des éléments de l'espace $E_n = \mathbb{R}^N * \mathbb{R}^{N^2} * \dots * \mathbb{R}^{N^n}$, (2.2) s'écrit :

$$(2.6) \quad y(k) = \underline{H}^T \cdot \underline{X}$$

Ces diverses opérations nous permettent par un simple jeu d'écriture de revenir à un formalisme linéaire beaucoup plus maniable.

Dans le cas de fonctions aléatoires, on définit le produit scalaire entre deux vecteurs de E_n par $\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle = E[\underline{X}^T \cdot \underline{Y}]$, cette définition faisant apparaître naturellement les moments d'ordre supérieur à deux. Nous allons dans le paragraphe suivant examiner la possibilité qu'offre ce formalisme dans le cas de la soustraction de bruit.

2.2- Soustraction de bruit en situation non-linéaire.

Considérons à nouveau le schéma de la figure 1 en supposant cette fois que le filtre liant X à B est non-linéaire. Nous allons l'identifier par un filtre de Volterra non homogène d'ordre n discret, et nous nous plaçons désormais dans l'espace E_n défini précédemment. Le problème étant de trouver le meilleur filtre \underline{H} de E_n tel que $\underline{H}^T \cdot \underline{X}$ estime au mieux B(k). Nous avons la liberté de choix du critère, mais comme il est bien connu, le critère quadratique est facile d'emploi et d'interprétation physique aisée. Ainsi, nous cherchons \underline{H} de E_n tel que :

$$(2.7) \quad R_q = E[(B(k) - \underline{H}^T \cdot \underline{X})^2]$$

soit minimal. Comme nous l'avons déjà noté, B est inaccessible, mais sous l'hypothèse de décorrélation d'ordre n entre S et B (i.e. $E[S \cdot B^l] = 0$ pour $l \leq n$), on peut écrire :

$$(2.8) \quad R_q' = E[(S(k) + B(k) - \underline{H}^T \cdot \underline{X})^2] = R_q + E[S(k)^2]$$

Donc, minimiser R_q est équivalent à minimiser R_q' . Le filtre optimal en ce sens est donc celui qui annule la dérivée de R_q' par rapport à \underline{H} . D'une façon équivalente, en utilisant le principe d'orthogonalité (l'erreur d'estimation est orthogonale à l'espace d'estimation), il vient :

$$(2.9) \quad E[\underline{H}^T \cdot \underline{X} \cdot (S(k) + B(k) - \underline{H}^T \cdot \underline{X})] = 0 \quad \text{pour tout } \underline{H} \text{ de } E_n$$

En développant cette expression, on obtient :

$$(2.10) \quad \underline{I}_{XB} = \underline{C}_{XX} \cdot \underline{H} \quad \text{où } \underline{I}_{XB} = E[B \cdot \underline{X}]$$

$$\underline{C}_{XX} = E[\underline{X} \cdot \underline{X}^T]$$

On retrouve donc dans l'espace vectoriel E_n le filtre de Wiener estimant B à partir de X, qui est la solution dans le cas linéaire. Mais ici, le filtre est non-linéaire, et l'on voit que les moments d'ordre supérieur apparaissent dans \underline{I}_{XB} et \underline{C}_{XX} . On peut de plus conclure que les moments de X doivent exister jusqu'à l'ordre 2n pour donner sa validité à (2.10).

Le filtre étant obtenu (sous réserve de l'inversibilité de \underline{C}_{XX}), la puissance de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$(2.11) \quad R_q' = E[S(k)^2] + E[B(k)^2] - \underline{I}_{XB}^T \cdot \underline{C}_{XX}^{-1} \cdot \underline{I}_{XB}$$

On constate d'après (2.11) que l'on améliore toujours le rapport signal à bruit de sortie. Plus précisément, on améliore toujours les performances par rapport au cas de l'identification linéaire (pour plus de détails, voir [4] pour le filtrage Linéaire-Quadratique et [3] pour le cas général).

Il nous reste alors à soustraire l'estimée de B du signal bruité, l'estimateur de S étant donné par $S(k) + B(k) - \underline{H}^T \cdot \underline{X}$.

On peut donc remarquer la puissance du formalisme rappelé au § 2.1. Les solutions données ici pour la soustraction de bruit étendent celles démontrées dans le cas linéaire. Cette affirmation prend encore plus de poids quand on s'aperçoit que les algorithmes traditionnels - optimaux (RLS) ou sous-optimaux (LMS) - peuvent être appliqués et permettent les traitements précédents dans le cas non-stationnaire (pour plus de détails voir [3] et [5]).

2.3- Conclusion.

Bien que travaillant en situation non-linéaire, le cas particulier des filtres de Volterra discrets nous permet de revenir au cas linéaire en utilisant un espace vectoriel engendré par les observations linéaires, quadratiques, cubiques, etc... Le cadre de travail permet une généralisation des travaux déjà menés en soustraction de bruit linéaire au cas non-linéaire (voir §4 pour quelques simulations). Toutefois, il est un aspect important qui n'apparaît pas dans les paragraphes précédents : le couplage entre les différents filtres homogènes qui constituent le filtre complet. Dans le cas des filtres linéaire-quadratiques (LQ), cet aspect nous permet d'introduire une généralisation du corrélofiltre linéaire.

3- Corrélofiltre LQ. Découplage des parties linéaire et quadratique.

3.1- Filtrage LQ. Rôle des moments d'ordre 3.

Le filtrage LQ s'inscrit dans la théorie des filtres de Volterra généraux et a été très étudié dans le cas de l'estimation par P. Duvaut [4]. Le cadre de travail est le même que dans le §2, l'espace se réduisant à E_2 de dimension $N+N^2$. Pour éviter des coûts de calculs trop élevés, il peut être utile de restreindre la dimension à $N(N+1)/2$ en tenant compte des symétries [4], ceci étant pris en compte lors des simulations.

Nous allons par souci de clarté modifier quelque peu les notations. Les vecteurs \underline{X} et \underline{H} de E_2 seront écrits \underline{X}_{LQ} et \underline{H}_{LQ} que l'on pourra décomposer sous la forme $\underline{X}_{LQ}^T = (\underline{X}_{LQ}^T \quad \underline{X}_{LQ}^T)$ et $\underline{H}_{LQ}^T = (\underline{H}_{LQ}^T \quad \underline{H}_{LQ}^T)$ pour tenir compte de la juxtaposition des parties linéaire et quadratique.

Nous avons vu (§2) que dans E_2 , le filtre de Wiener estimant un signal B à partir de l'observation d'un signal X est donné par :

$$(3.1) \quad \underline{I}_{XB} = \underline{C}_{XX} \cdot \underline{H} \quad \text{où } \underline{I}_{XB} = E[B \cdot \underline{X}_{LQ}]$$

$$\underline{C}_{XX} = E[\underline{X}_{LQ} \cdot \underline{X}_{LQ}^T]$$

Sous forme développée, l'équation précédente devient :

$$(3.2) \begin{pmatrix} \underline{r}_L \\ \underline{r}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{C}_L & \underline{C}_{L/Q} \\ \underline{C}_{Q/L} & \underline{C}_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{h}_L \\ \underline{h}_Q \end{pmatrix}$$

où \underline{r}_L (resp r_Q) = $E[B \cdot \underline{X}_L$ (resp \underline{X}_Q)]
 $\underline{C}_L = E[\underline{X}_L \cdot \underline{X}_L^T]$
 $\underline{C}_Q = E[\underline{X}_Q \cdot \underline{X}_Q^T]$
 $\underline{C}_{L/Q} = E[\underline{X}_L \cdot \underline{X}_Q^T] = \underline{C}_{Q/L}^T$

Comme l'a remarqué P. Duvaut, on s'aperçoit que l'annulation des moments d'ordre trois conduit à un découplage des parties linéaire et quadratique du filtre, soit :

$$(3.3) \begin{pmatrix} \underline{r}_L \\ \underline{r}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{C}_L \cdot \underline{h}_L \\ \underline{C}_Q \cdot \underline{h}_Q \end{pmatrix}$$

Ainsi, lorsque les moments d'ordre 3 du processus observé sont nuls, les filtres linéaire et quadratique peuvent être déterminés séparément.

Un problème intéressant réside dans une généralisation du corrélofiltre linéaire. Ce filtre est obtenu en constatant simplement que si le processus observé X est blanc, le filtre de Wiener estimant un processus B à partir de X n'est autre que l'intercorrélacion entre X et B (car $F_{WIENER} = \underline{C}^{-1} \underline{X} \underline{X}^T \cdot \underline{r} \underline{X} B = \underline{r} \underline{X} B$ si X est blanc). Nous allons voir dans les paragraphes suivants que ce problème a une solution passant par l'annulation des moments d'ordre trois du processus référence.

3.2- Orthogonalisation de l'espace E_2 .

Dans la théorie des espaces vectoriels, une méthode d'orthogonalisation consiste à utiliser la décomposition de Choleski : si \underline{A} est carrée, symétrique, définie positive, alors il existe \underline{L} triangulaire inférieure telle que $\underline{A} = \underline{L} \cdot \underline{L}^T$. Comme \underline{C}_{LQ} suit les hypothèses précédentes, on peut écrire $\underline{C}_{LQ} = \underline{L} \cdot \underline{L}^T$. Alors le vecteur $\underline{X}'_{LQ} = \underline{L}^{-1} \cdot \underline{X}_{LQ}$ est blanc. En effet :

$$(3.4) \underline{C}'_{LQ} = E[\underline{X}'_{LQ} \cdot \underline{X}'_{LQ}^T] \text{ devient}$$

$$\underline{C}'_{LQ} = E[\underline{L}^{-1} \cdot \underline{X}_{LQ} \cdot \underline{X}_{LQ}^T \cdot \underline{L}^{-1T}] = \underline{I}$$

La transformation linéaire sur E_2 que nous venons d'opérer est particulière :

- elle blanchit le processus X jusqu'à l'ordre 4.
- elle annule les moments d'ordre 3 de X'.

Nous répondons donc au deux souhaits formulés au paragraphe précédent. En effet, pour l'estimation d'un filtre de Wiener LQ, nous pouvons maintenant écrire :

$$(3.5) \underline{X}'_{LQ} = \underline{L}^{-1} \cdot \underline{X}_{LQ}$$

$$\underline{H}'_{LQ} = \underline{C}'_{LQ} \cdot \underline{r}'_{LQ} = \underline{r}'_{LQ} = E[B \cdot \underline{X}'_{LQ}]$$

Par suite, pour obtenir une estimée de B, on écrira :

$$(3.6) \hat{B} = \underline{H}'^T_{LQ} \cdot \underline{X}'_{LQ} \text{ car en effet :}$$

$$(3.7) \underline{H}'^T_{LQ} \cdot \underline{X}'_{LQ} = \underline{r}'^T_{LQ} \cdot \underline{X}'_{LQ}$$

$$= \underline{r}'^T_{LQ} \cdot \underline{L}^{-1T} \cdot \underline{L}^{-1} \cdot \underline{X}_{LQ}$$

$$= \underline{r}'^T_{LQ} \cdot \underline{C}_{LQ}^{-1} \cdot \underline{X}_{LQ}$$

$$= \underline{H}^T_{LQ} \cdot \underline{X}_{LQ}$$

L' estimateur étant ainsi défini, on obtient simplement sa

variance en remplaçant dans (2.11) $\underline{r} \underline{X} B$ par $\underline{r} \underline{L} Q$ et \underline{C}_{XX} par \underline{C}_{LQ} .

Nous venons donc de montrer que dans le cas discret, on peut découpler les parties linéaire et quadratique du filtre et généraliser le concept du corrélofiltre linéaire. Nous allons maintenant en présenter une procédure adaptative.

3.3- " Découplage adaptatif ".

Dans le but de traiter des signaux dans des cas non-stationnaires, il est nécessaire de rendre adaptative la procédure de découplage, qui sera suivie par l'estimation adaptative du filtre. La procédure utilisée est décrite dans [6] et déjà employée par P. Comon [7] dans le cadre d'une orthogonalisation de signaux à l'ordre 2.

Cette procédure est liée à l'estimation de la matrice covariancé Linéaire-Quadratique. En effet, on se propose, lorsque l'estimation est :

$$(3.8) \underline{C}_{XXk} = a_k \cdot \underline{C}_{XXk-1} + b_k \cdot \underline{X}_{k-1} \cdot \underline{X}_{k-1}^T$$

de modifier récursivement la matrice \underline{L}_k , où \underline{L}_k résulte de la décomposition de Choleski de \underline{C}_{XXk} , en fonction de \underline{L}_{k-1} .

Soit alors \underline{A} la matrice définie par :

$$(3.9) \underline{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_k \cdot \underline{L}_{k-1}} & \sqrt{b_k \cdot \underline{X}_{k-1}} \\ \underline{0}^T & 1/\sqrt{b_k} \end{pmatrix}$$

En appliquant une séquence de rotations de Givens sur \underline{A} annihilant la partie supérieure droite de \underline{A} [6,7], on obtient :

$$(3.10) \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{L}_k & \underline{0} \\ \underline{X}_k^T & \gamma \end{pmatrix} \text{ et l'on vérifie que :}$$

$$(3.11) \underline{L}_k \cdot \underline{L}_k^T = a_k \cdot \underline{L}_{k-1} \cdot \underline{L}_{k-1}^T + b_k \cdot \underline{X}_k \cdot \underline{X}_k^T \text{ et}$$

$$\underline{L}_k \cdot \underline{X}_k^T = \underline{X}_k$$

On récupère donc par cette opération le vecteur linéaire quadratique blanchi sans avoir à inverser la matrice \underline{L} . L'estimée du signal utile s'écrira alors simplement :

$$(3.13) \hat{S}(k) = S(k) + B(k) - \underline{r}'^T_{LQ} \cdot \underline{X}_k$$

$$= S(k) + B(k) - E[(S(k) + B(k)) \cdot \underline{X}_k^T] \cdot \underline{X}_k$$

4- Simulations.

Nous proposons deux simulations relatives aux deux parties de l'article, le schéma de ces études étant celui de la figure 1. Les figures qui illustrent les simulations montrent dans le premier encadré le signal bruité, dans le (ou les) suivant le signal nettoyé. De plus, nous ne faisons figurer les signaux qu'après convergence des algorithmes employés.

4.1- SdB avec des fdV d'ordre 3 instantanés.

Le filtre F est un filtre exponentiel instantané que nous identifions par un fdV d'ordre 3. La figure 2 montre le résultat par le RLS pour un bruit X en χ^2 , un rapport S/B de - 6dB, l'EQM minimale étant 0,027. Le tableau 1 montre l'EQM minimale pour diverses formes du bruit (gaussienne et puissance 2 et 3 d'une gaussienne) pour divers rapports S/B.

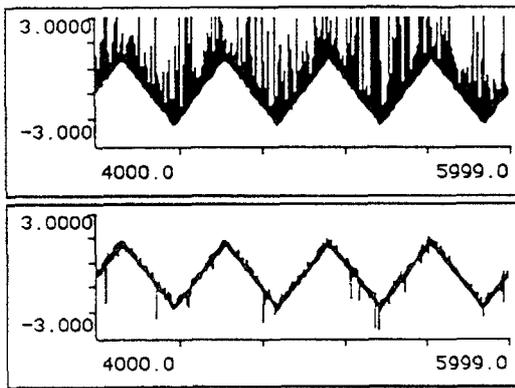


Figure 2 : SDB avec un fdV Linéaire-Quadratique-Cubique.

Tableau 1 :

S/B dB	0	- 5	- 10
gaussienne	0.004	0.035	0.24
gaussienne ²	0.004	0.019	0.13
gaussienne ³	0.002	0.12	0.6

4.2- SdB avec le découplage adaptatif. Comparaison avec le RLS.

Le filtre F est un filtre LQ de mémoire 3. La figure 3.a (resp. 3.b) montre le résultat du RLS (resp. découplage adaptatif) pour un bruit X gaussien, un rapport S/B de - 5dB, l'EQM minimale étant 0,019 (resp. 0,026). Les tableaux 2 et 3 (identiques au 1) établissent une comparaison chiffrée entre les deux algorithmes.

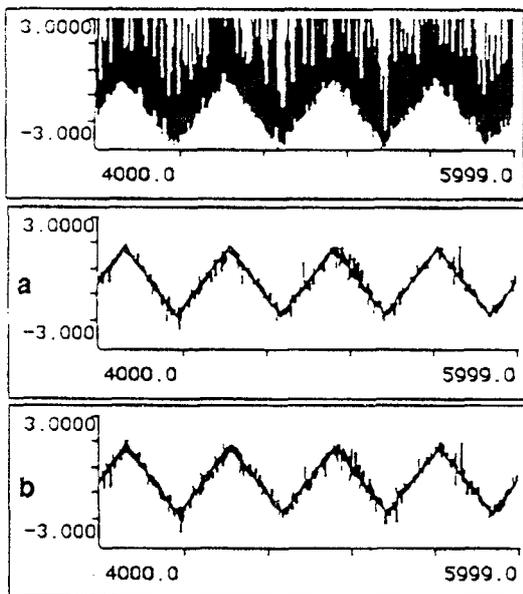


Figure 3 : Comparaison entre RLS(a) et Découplage adaptatif(b).

Tableau 2 : Performances du RLS

S/B dB	0	- 5	- 10
gaussienne	0.006	0.019	0.11
gaussienne ²	0.003	0.005	0.018
gaussienne ³	0.003	0.005	0.023

Tableau 3 : Performances du découplage adaptatif

S/B dB	0	- 5	- 10
gaussienne	0.008	0.026	0.138
gaussienne ²	0.005	0.013	0.044
gaussienne ³	0.049	0.12	0.38

4.3- Discussion.

Les résultats obtenus avec l'algorithme de découplage adaptatif sont toujours un peu moins bons que ceux du RLS. On s'aperçoit que cette dégradation de performance s'accélère d'autant plus que les bruits utilisés présentent de fortes impulsions (bruit gaussien au cube). Par contre, pour des bruits plus "doux", les deux algorithmes ont des comportements semblables. De plus, les problèmes numériques ont un rôle important et n'ont pas été encore étudiés. Ils sont certainement la cause principale de la légère différence entre les deux méthodes, strictement équivalentes théoriquement.

Dans les tableaux présentés, les différents rapports S/B sont calculés à puissance du signal utile S constante. Ceci occulte les problèmes de convergence qui peuvent se poser pour des signaux à fortes amplitudes. Nous avons en effet vérifié que pour un même S/B, les algorithmes convergent pour de faibles amplitudes (1 à 2 dans nos études), mais divergent lorsque les amplitudes augmentent. Ce fait lié au rayon de convergence des séries de Volterra sera l'objet de futures études.

5- Conclusion.

Nous avons montré dans ce papier comment utiliser les filtres de Volterra en identification dans le cadre de la soustraction de bruit. Les résultats de simulation sont encourageants mais devront être validés sur données réelles. Quelques problèmes délicats restent en suspens, notamment le choix de l'ordre et de la mémoire du filtre, ou encore l'étude de convergence du filtre. Ces deux points ne pourront certainement pas être résolus d'une façon globale, puisqu'ils semblent en effet dépendre du problème étudié et des caractéristiques des signaux d'entrée.

Le deuxième point concerne l'étude d'une orthogonalisation de l'espace LQ en vue de généraliser le corrélofiltre linéaire. La méthode proposée repose sur une décomposition du type Choleski de la matrice covariance LQ, et permet l'annulation des moments d'ordre trois du processus observé. Cette méthode pourrait être utilisée pour l'étude des modèles AR LQ ; de plus, la généralisation de cette méthode à tout ordre permet l'introduction d'un système de fonctions de Wiener [2] orthogonales entre elles quelque soit le signal d'entrée.

Nous remercions Claude Adnet pour les discussions que nous avons eues avec lui et pour son aide lors des réalisations pratiques.

Références Bibliographiques :

- [1] D. Baudois, C. Servière, A. Silvent, Analyse et synthèse bibliographique, TS, spécial Traitements Adaptatifs et Réduction de Bruit, 6, 5, 1989.
- [2] M. Schetzen, The Volterra and Wiener Theory of Non-linear Systems, Wiley, New-York, 1980.
- [3] P. Chevalier, P. Duvaut, B. Picinbono, Le filtrage de Volterra transverse en traitement du signal, TS, spécial Non-Linéaire, Non-Gaussien, 7, 5, 1990.
- [4] P. Duvaut, Le filtrage de Wiener linéaire-quadratique à horizon fini. Application à la prédiction, TS, 6, 3, 1989.
- [5] P. Duvaut, Moments d'ordre 3 et algorithmes adaptatifs linéaire-quadratique, TS, spécial Non-Linéaire, Non-Gaussien, 7, 5, 1990.
- [6] P. Gill, G.H. Gollub *et al*, Methods for Modifying Matrix Factorizations, Math. Comp., 28, 126, 1974.
- [7] P. Comon, Séparation de Mélange de Signaux, 12ème colloque GRETSI, Juan-les-Pins, 1989.