

MODELISATION DE PRONY DE SIGNAUX A HARMONIQUES MULTIPLES

Alain SALA et Francis CASTANIE

LEN7 (GAPSE) - ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 TOULOUSE, FRANCE

RÉSUMÉ

Pour des signaux dont le spectre comporte un grand nombre de raies, non ou peu amorties, dont beaucoup sont harmoniques, la modélisation de PRONY pose un problème de coût calculatoire.

Un modèle dérivé de Prony est proposé pour résoudre ce problème; il fait intervenir l'existence d'harmoniques multiples pour diminuer le coût de l'estimation des amplitudes complexes.

I. INTRODUCTION

Dans le cadre du projet européen Esprit FCPN (Factory Customer Premises Network), nous avons été amenés à étudier des signaux acoustiques provenant de machines tournantes, enregistrés notamment au Centre de Production Nucléaire du Blayais. Le spectre de ce type de signaux se caractérise par un grand nombre de raies (jusqu'à 30), dont beaucoup sont des harmoniques d'un nombre relativement faible de fréquences fondamentales.

Appliquée à ces signaux, la modélisation de PRONY [1] n'est pas très satisfaisante: pour représenter correctement q sinusoides, il faut que le modèle ait un ordre minimum de $2q$ (60 dans notre exemple), ce qui implique un coût calculatoire très élevé.

Dans une première partie, en constatant que le modèle de Prony n'utilisait pas l'information a priori contenue dans nos signaux - la présence d'harmoniques -, nous avons construit un modèle dérivé de Prony. Nous avons ensuite étudié les propriétés statistiques de l'estimateur des amplitudes complexes induit par ce modèle dérivé.

Ce travail fait partie de la thèse de A.SALA dans le cadre du projet Esprit FCPN.

ABSTRACT

Applied to signals which are made of a great number of undamped sinusoids, most of them being harmonicals, PRONY modeling is too demanding in computation time.

A model derived from PRONY one is presented here to cope with this problem; it is based upon multiple harmonics structure and allows to reduce the computation time involved by the estimation of complex amplitudes.

Dans une deuxième partie, nous avons démontré que dans le cas où les amortissements sont nuls, le système linéaire qui permet le calcul des amplitudes complexes était hermitien de Toeplitz, ce qui permet de réduire notablement la complexité calculatoire de cette étape. Dans une troisième partie, des exemples numériques illustrent la qualité statistique de l'estimation des amplitudes par le modèle introduit, et son application à des signaux réels.

II. LE MODELE DE PRONY A HARMONIQUES MULTIPLES

Rappelons les étapes de l'estimation des paramètres de Prony [2], à partir de l'équation du modèle :

$$x(n) = \sum_{m=1}^p B_m Z_m^n + e(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

$$\text{avec } Z_m = e^{(\alpha_m + j2\pi f_m)} \quad \text{et } B_m = A_m e^{j\theta_m} \quad (2.2)$$

étape 1 : obtention des α_k par une méthode de type AR

étape 2 : estimation des pôles complexes Z_m par calcul des

racines de $A(Z) = \sum_{k=0}^p \alpha_k Z^{-k}$



étape 3 : estimation des amplitudes complexes B_m par une procédure des moindres carrés :

$$\underline{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_p \end{pmatrix} = (V^H V)^{-1} V^H X \quad (2.3)$$

où $X^T = |x(0) \dots x(N-1)|$ est le vecteur signal et V est une matrice de Van der Monde, dont le terme (n,m) est donné par :

$$V = (v_{nm}) = (Z_m^n) \quad n = 0, \dots, N-1 \quad m = 1, \dots, p \quad (2.4)$$

C'est l'étape 3 qui est la plus coûteuse en temps de calcul : celui-ci est proportionnel à p^3 , ce qui est rédhibitoire pour des ordres élevés, donc dans le cas de signaux à raies multiples. Nous avons donc construit un modèle dérivé d'équation :

$$x(n) = \sum_{i=1}^q x_i(n) + e(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.5)$$

$$\text{où } x_i(n) = \sum_{k=1}^r B_{i,k} Z_{i,k}^n \quad (2.6)$$

$$\text{avec } Z_{i,k} = e^{\alpha_{i,k} + j2\pi k f_i} \quad \text{et } B_{i,k} = A_{i,k} e^{j\theta_{i,k}} \quad (2.7)$$

constitué de q fréquences fondamentales f_i , chacune ayant $(r-1)$ harmoniques $2f_i, \dots, rf_i$, l'ordre total étant $p=qr$. $x_i(n)$ sera noté dans ce qui suit sous-système harmonique n° i . Les phases entre sous-systèmes sont supposées indépendantes : $\theta_{i,k}$ est indépendant de $\theta_{j,k}$ pour $i \neq j$ (ce qui suffit à impliquer l'indépendance des $x_i(n)$ entre eux), alors que les phases d'un même sous-système harmonique sont liées ($\theta_{i,k}$ non indépendant de $\theta_{i,n}$).

En ce qui concerne le calcul des paramètres, l'étape 1 n'est pas modifiée. Ensuite :

étape 2 : estimation du pôle de fréquence f_{i_0} la plus faible (fondamentale donc) par résolution de $A(Z)=0$. L'algorithme de Hoxha [4] permet d'extraire les racines de façon parallèle.

étape 3 : estimation des $B_{i_0,k}$, amplitudes complexes du sous-système harmonique d'indice i_0 par une procédure des moindres carrés :

$$x(n) = \sum_{k=1}^r B_{i_0,k} Z_{i_0,k}^n + e_1(n) \quad (2.8)$$

$$\text{avec } e_{i_0}(n) = e(n) + \sum_{i \neq i_0} \sum_{k=1}^r B_{i,k} Z_{i,k}^n \quad (2.9)$$

ce qui revient à :

$$\underline{\hat{B}}_{i_0} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{i_0,1} \\ \hat{B}_{i_0,r} \end{pmatrix} = (V_{i_0}^H V_{i_0})^{-1} V_{i_0}^H X \quad (2.10)$$

où $V_{i_0} = (w_{nm})$

$$= (Z_{i_0,m}^n) \quad n = 0, \dots, N-1 \quad m = 1, \dots, r \quad (2.11)$$

On remarquera que le sous-système harmonique i_0 est résolu indépendamment des autres, en rejetant dans le bruit les autres sous-systèmes.

étape 4 : implémentation séquentielle par déflation, c'est-à-dire division de $A(Z)$ par $(Z - Z_{i_0,1}) \dots (Z - Z_{i_0,r})$ et itération des étapes 2,3,4 jusqu'à épuisement des pôles de $A(Z)$; ou implémentation entièrement parallèle, grâce à l'algorithme de Hoxha [4] cité plus haut.

Il s'agit alors d'évaluer la qualité statistique de cette modélisation puisque lorsqu'on estime $\underline{\hat{B}}_{i_0}$, on rejette les $x_i(n)$ dans le "bruit" $e_{i_0}(n)$. Pour cela nous avons calculé la matrice de covariance :

$$C_{\Delta B} = E(\underline{\Delta B} \underline{\Delta B}^H) \quad \text{avec } \underline{\Delta B} = \underline{\hat{B}}_{i_0} - \underline{B}_{i_0} \quad (2.12)$$

On sait [3] que :

$$C_{\Delta B} = (V_{i_0}^H V_{i_0})^{-1} V_{i_0}^H C_{e_1} V_{i_0} (V_{i_0}^H V_{i_0})^{-1} \quad (2.13)$$

Puisque l'on suppose les $x_i(n)$ indépendants entre eux et indépendants du bruit $e(n)$, supposé blanc et de variance σ_e^2 la matrice de covariance de $\underline{e}_{i_0}^T = (e_1(0) \dots e_1(N-1))$ s'exprime :

$$C_{e_{i_0}} = \sigma_e^2 I_N + \sum_{i \neq i_0} V_i C_{B_i} V_i^H \quad (2.14)$$

C_{B_i} est la matrice de covariance de \underline{B}_i défini comme \underline{B}_{i_0} .

Finalement, on obtient :

$$C_{\Delta B} = \sigma_e^2 (V_{i_0}^H V_{i_0})^{-1} + \sum_{i \neq i_0} (V_{i_0}^H V_{i_0})^{-1} V_{i_0}^H V_i C_{B_i} V_i^H V_{i_0} (V_{i_0}^H V_{i_0})^{-1} \quad (2.15)$$

Il s'agit de la comparer à la matrice de covariance de l'estimateur des amplitudes du modèle de Prony initial :

$$C_{\Delta B} = \sigma_e^2 (V^H V)^{-1} \quad (2.16)$$

III. APPLICATION A LA METHODE DE PRONY HARMONIQUE

Dans ce cas particulier [2], les amortissements sont nuls ; si on suppose les pôles et amplitudes complexes conjugués et les fréquences fondamentales telles que $f_i \neq 0$ et $\neq 0.5$, alors un sous-système harmonique issu d'un signal réel peut être modélisé par :

$$x_i(n) = \sum_{k=1}^r (B_{i,k} Z_{i,k}^n + B_{i,k}^* (Z_{i,k}^*)^n) \quad (3.1)$$

L'ordre total, pair, devient : $p = q(2r)$. La dimension de la matrice de Van Der Monde V_{i_0} est $(N, 2r)$, où N est le nombre d'échantillons de signal ; rajoutons une colonne à cette matrice correspondant à un pôle de fréquence nulle et rangeons les pôles comme indiqué ci-dessous :

$$V_{i_0} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ e^{-j2\pi r f_{i_0}} & \cdot & e^{-j2\pi f_{i_0}} & 1 & e^{j2\pi f_{i_0}} & \cdot & e^{j2\pi r f_{i_0}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{-j2\pi r(N-1)f_{i_0}} & \cdot & e^{-j2\pi(N-1)f_{i_0}} & 1 & e^{j2\pi(N-1)f_{i_0}} & \cdot & e^{j2\pi r(N-1)f_{i_0}} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Alors on montre que $V_{i_0}^H V_{i_0} = (t_{kl})$, de dimension $(2r+1, 2r+1)$, est hermitienne de Toeplitz :

$$t_{kl} = \begin{cases} N & \text{pour } k=l \\ e^{j\pi(l-k)f_{i_0}(N-1)} \frac{\sin \pi(l-k)f_{i_0}N}{\sin \pi(l-k)f_{i_0}} & \text{pour } k \neq l \end{cases} \quad (3.3)$$

Cette propriété rend le coût calculatoire de la résolution du système (2.10) proportionnelle à $(2r+1)^2$ au lieu de $(2r+1)^3$. Au total, en extrayant les sous-systèmes harmoniques l'un après l'autre, le coût total des q itérations de l'étape 3 est $q(2r+1)^2$, ce qui représente un gain considérable par rapport au coût de la procédure classique $q^3(2r)^3$.

IV. SIMULATIONS NUMERIQUES

Dans un premier temps, nous avons évalué numériquement les matrices $C_{\Delta B}$ pour des signaux réalistes dans les cas Prony dérivé (2.15) et Prony simple (2.16). Pour cela nous nous sommes placés dans le cas où les amortissements sont nuls et où l'ordre des sous-systèmes harmoniques est $2r$. Nous avons construit un critère :

$$c = \frac{\sum_{k=1}^{2r} C_{\Delta B}(k, k)}{\sum_{k=1}^{2r} A_{i_0, k}^2} \quad (4.1)$$

Ce critère est intéressant car il fait intervenir un rapport homogène à une variance sur une énergie ce qui n'est autre qu'une erreur relative. Nous avons fait l'hypothèse que les $A_{i, k}$ étaient tels que la répartition des puissances soit indépendante du sous-système harmonique, c'est-à-dire :

$$A_{i, k}^2 = g(k)G_i \quad i = 1, \dots, q \quad k = 1, \dots, 2r \quad (4.2)$$

Introduisons les rapports signal-à-bruit γ_1 et γ_2 correspondant respectivement à la puissance du sous-système harmonique i_0 et à la somme des puissances des autres sous-systèmes harmoniques :

$$\gamma_1 = \frac{P_{i_0}}{\sigma_e^2} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2r} A_{i_0, k}^2}{\sigma_e^2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\sum_{i \neq i_0} P_i}{\sigma_e^2} \quad (4.3)$$

Nous avons alors tracé les courbes $c_s = f(\gamma_2)$ en tirets (équation 2.16) pour le modèle de Prony simple et $c_d = f(\gamma_2)$ en traits pleins (équation 2.15) pour le modèle de Prony dérivé, et ce pour $\gamma_1 = 20$ dB (courbe 1.a) et $\gamma_1 = 5$ dB (courbe 1.b), avec les valeurs inspirées de signaux réels :

$$q = 2 \quad f_1 = 0.0195 \quad f_2 = 0.0322 \quad i_0 = 1 \\ r = 2 \quad g(1) = g(2) = 1 \quad g(3) = g(4) = 0.84$$

On remarque la faible dégradation du critère pour le modèle introduit par rapport au modèle simple ; en particulier, c augmente lorsque γ_2 augmente, mais de façon tout à fait acceptable.

Dans un deuxième temps, nous avons essayé notre estimateur des amplitudes complexes sur un signal réel, bla25.06 : il s'agit d'un signal audio de pompe à vide, enregistré dans la salle des machines de la centrale du Blayais, constitué de 1024 points échantillonnés à la fréquence de 20 kHz. Sur ce signal, nous avons identifié deux principaux sous-systèmes harmoniques ; le premier à $f_1 = 0.0390$ (6 harmoniques) correspond à la pompe à vide et le second à $f_2 = 0.0050$ (5 harmoniques) correspond probablement à un condensateur.

La courbe 2.a représente le périodogramme simple du signal bla25.06 avec une échelle des ordonnées en dB. En surimpression sont figurées les amplitudes $A_{i, k}$ estimées à l'aide de notre modèle ; la longueur de la barre est proportionnelle à l'amplitude estimée.



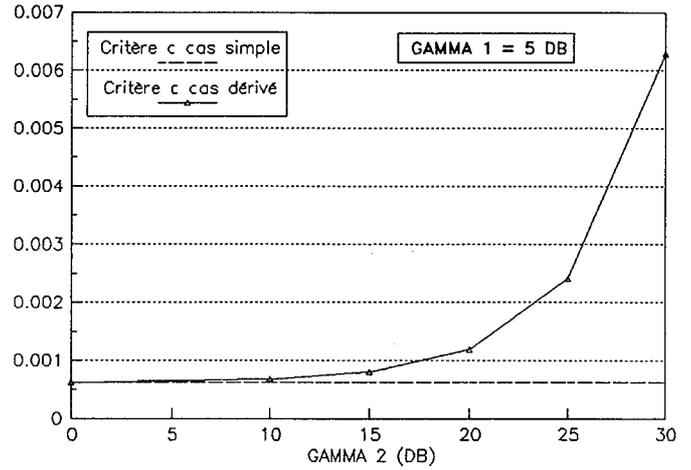
Enfin, sur la courbe 2.b, nous avons représenté un agrandissement du périodogramme 2.a (voir loupe) avec les ordonnées en échelle linéaire et figuré en surimpression les amplitudes $A_{2,k}$ estimées. Comme on peut le voir, le résultat est satisfaisant.

V. CONCLUSIONS

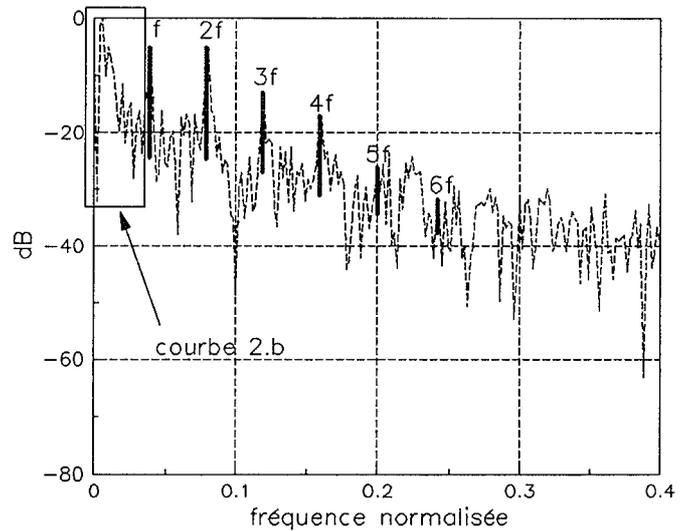
Le modèle de Prony dérivé présenté dans cette communication présente plusieurs avantages. Tout d'abord, il offre la possibilité de calculer les paramètres de chaque sous-système harmonique individuellement. Ensuite, il permet une économie de calcul d'autant plus grande que le nombre d'harmoniques est grand, par mise en évidence de systèmes de Toeplitz ; de plus il est explicitement parallèle. Enfin, l'accroissement de variance par rapport au modèle simple est très acceptable dans tous les cas.

VI. REFERENCES

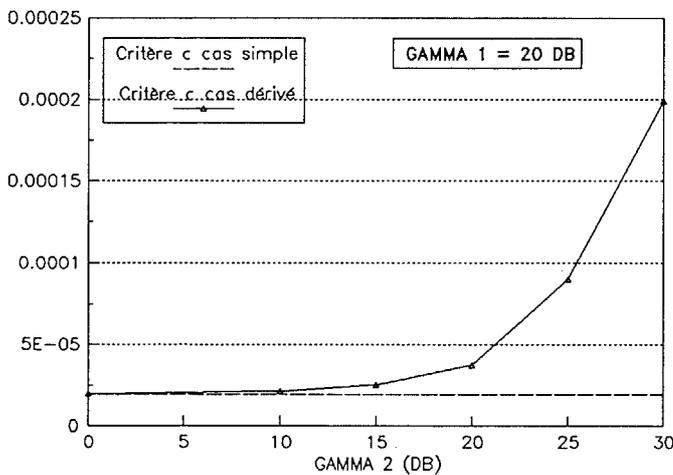
- [1] Prony G.R.B. (1795). "Essai expérimental et analytique, etc..." Journal de l'école polytechnique, 1, cahier 2, Paris, 24-76.
- [2] Marple S.L. (1988). "Digital Spectral Analysis". Prentice Hall Englewood Cliffs.
- [3] Lambert-Nebout C. (1989). "Etude des moyens d'analyse du signal basse fréquence d'un récepteur d'alignement de piste". Thèse de doctorat de l'INPT.
- [4] Hoxha F., Lambert C., Noailles J. (1988). "Experiments in concurrently computing polynomial roots". Proc. of EUSIPCO 88, Grenoble (France), sept. 1988, 659-662.



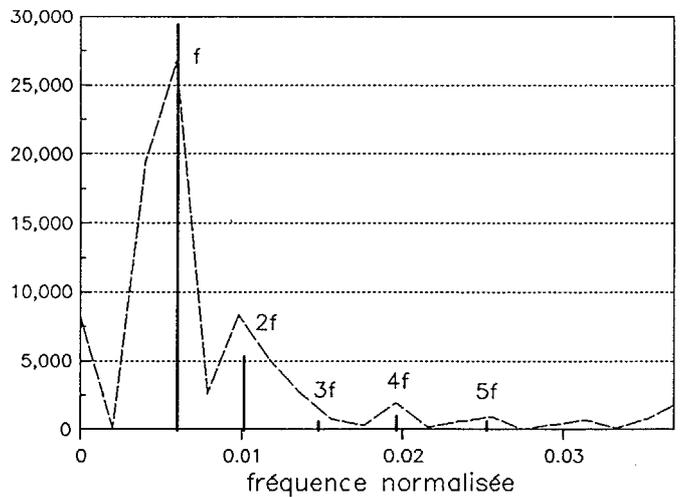
Courbe 1.b



Courbe 2.a



Courbe 1.a



Courbe 2.b