



**ESTIMATION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE D'UNE SOMME
BRUTÉE DE CISOIDES DE FREQUENCE HARMONIQUE.**

A. Ferrari, G. Alengrin

LASSY Université de NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
Equipe de l'IS du CNRS
41, Bd Napoléon III 06041 Nice Cedex

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Nous étudions dans cette communication le problème de l'estimation du fondamental d'un signal harmonique. Deux méthodes sont proposées. La première consiste en un algorithme pour l'estimation par maximum de vraisemblance. La seconde est basée sur la minimisation de la distance entre une famille génératrice du sous-espace signal ou bruit paramétré par la pulsation fondamentale et l'estimé du sous-espace correspondant.

We study in this paper the estimation of the fundamental pulsation of an harmonic signal. Two methods are proposed. The first is an algorithm for the maximum likelihood estimation. The second is based on the minimisation of the distance between a generating family of the signal or noise subspace parametered by the fundamental pulsation and the corresponding estimated subspace.

Introduction

Dans de nombreux domaines de la physique comme la mécanique des vibrations, les phénomènes rencontrés peuvent être modélisés par la superposition de M cisoïdes de pulsations $k\omega_0$, $k=1\dots M$. L'analyse harmonique haute résolution d'un tel signal entaché d'un bruit blanc Gaussien se fait alors généralement en utilisant la décomposition spectrale de la matrice d'autocorrélation du processus. Cette méthode ne tient cependant pas compte de la connaissance a priori de la nature du signal comme par exemple la présence d'un caractère périodique.

Nous nous proposons dans cette communication de prendre en compte la contrainte d'équidistance entre les raies successives du signal afin de ramener le problème à l'estimation de la pulsation fondamentale. Deux approches sont alors présentées.

La première méthode consiste en l'estimation par maximum de vraisemblance de la pulsation fondamentale. Cet estimateur possède l'avantage de se présenter directement comme une fonction monovariée. Le fait que les contraintes soient des conditions d'équidistance entre les raies nous permet de plus de proposer un algorithme ayant un coût réduit en calculs.

La seconde méthode est basée sur la paramétrisation du sous-espace signal ou du sous-espace bruit de la matrice

d'autocorrélation R . Il est en effet possible dans ce cas de paramétriser en fonction d'une variable ω une famille génératrice du sous espace-signal ou bruit. La solution consiste alors à trouver le ω qui minimise la distance entre un de ces sous-espaces et l'estimé du sous-espace correspondant obtenu par décomposition spectrale de R . Un algorithme rapide est proposé afin d'obtenir pour tout ω une famille génératrice du sous-espace bruit. La distance à minimiser étant reliée aux angles principaux entre deux sous-espaces, une pseudo-distance moins coûteuse en temps de calcul est alors proposée.

Développement

Signal étudié

Nous nous intéressons dans cette communication à un signal z_n , $n=0\dots N-1$, constitué par une somme bruitée de cisoïdes de fréquences harmoniques. Si on note ω_0 la pulsation du fondamental et b_n le bruit blanc gaussien additif de variance σ^2 , on a alors :

$$\begin{cases} \underline{Z} = \underline{X} + \underline{B} \\ \underline{X} = \underline{V} \cdot \underline{X}_0 \end{cases} \quad (1)$$



où :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \rho & \rho^2 & \dots & \rho^M \\ \rho^2 & \rho^4 & \dots & \rho^{2M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^{2(N-1)} & \dots & \rho^{M(N-1)} \end{bmatrix}, \rho = \exp(j\omega_0) \\
 \mathbf{Z} &= (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^t, \mathbf{X} = \dots, \mathbf{B} = \dots \\
 \mathbf{X}_0 &= (A_1 \exp(j\varphi_1), \dots, A_M \exp(j\varphi_M))^t
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Compte tenu de la contrainte $M\omega_0 < 2\pi$, on a :

$$\omega_0 \in I \text{ où } I = [0, 2\pi/M[\quad (3)$$

Maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance de ω_0 pour le signal z_n est donné par le maximum de la fonction $\mathcal{L}(\omega)$ définie par, [2] :

$$\mathcal{L}(\omega) = \mathbf{Z}^H \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{V}^H \mathbf{Z}, \omega \in I \quad (4)$$

Cet estimateur est particulièrement intéressant car il se présente immédiatement comme une fonction monovariante, les contraintes de dépendance entre les pulsations étant exprimées de façon explicite dans \mathbf{V} . De plus, le fait que ces contraintes soient des conditions d'équidistance entre les raies confère à cet estimateur des propriétés remarquables. On peut en effet faire les remarques suivantes :

- Une caractéristique fondamentale du signal x_n vient du fait que la matrice \mathbf{V} possède une double structure Vandermonde horizontale et verticale. Cette structure Vandermonde horizontale donne à $\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V}$ la structure particulière de matrice de Toeplitz. Cette matrice représente la matrice d'autocorrélation d'un processus qui a pour L premières autocorrélations :

$$r_k = e^{jk(N-1)\omega/2} \cdot \frac{\sin(kN\omega/2)}{\sin(k\omega/2)}, k \neq 0, r_0 = N \quad (5)$$

Ce processus est constitué par des raies d'amplitude 1 aux pulsations $0, \omega, \dots, (N-1)\omega$.

L'algorithme de Levinson permet alors de simplifier l'inversion de $\mathbf{V}^H \mathbf{V}$. Si on note de manière duale \mathbf{B} la matrice triangulaire supérieure des coefficients des prédicteurs à un pas correspondant aux autocorrélations r_k et \mathbf{P} la matrice diagonale des variances des erreurs de prédictions correspondantes [2], la relation (4) s'écrit :

$$\mathcal{L}(\omega) = \left\| \mathbf{V} \mathbf{B} \right\|_{p^{-1}}^H \cdot \mathbf{Z} \quad (6)$$

où :

$$\left\| \mathbf{u} \right\|_p = \mathbf{u}^H \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

- La contrainte d'équidistance entre les pulsations permet également d'alléger considérablement les calculs aux pulsations de la forme $2k\pi/L$. Si on note $\mathcal{F}(\omega)$ la transformée de Fourier de z_n , on a :

$$\mathbf{V}^H \mathbf{Z} = (\mathcal{F}(\omega), \mathcal{F}(2\omega), \dots, \mathcal{F}(M\omega))^t \quad (7)$$

Une transformée de Fourier rapide sur N_{FFT} points de $z_n, n=0 \dots N-1$, permet donc de calculer $\mathbf{V}^H \mathbf{Z}$ aux pulsations $\omega_k = 2\pi(k-1)/N_{FFT}, k=0 \dots N_1$ (N_1 : partie entière de N_{FFT}/M). En notant $\mathcal{F}(\omega_k) = \mathcal{F}_k$, obtient ainsi :

$$\mathcal{L}(\omega_k) = \sum_{p=1}^M |\mathcal{F}_k|^2 \quad (8)$$

On peut noter que seuls les points de la transformée qui ont un indice multiple des entiers inférieurs à N_1 sont utilisés.

La fonction $\mathcal{L}(\omega)$ présentant de nombreux maxima et minima locaux, les techniques de maximisation usuelles ne peuvent donc garantir l'obtention du maximum global. Nous proposons alors le schéma suivant :

- Prendre la FFT sur N_{FFT} points de $x_n, n=0 \dots N-1$
- Evaluer $\mathcal{L}(\omega_k), k=1 \dots N_1$.
- Soit ω_m la pulsation correspondant au maximum de \mathcal{L}
- Maximiser $\mathcal{L}(\omega)$ sur $]\omega_{m-1}, \omega_{m+1}[$.

$\mathcal{L}(\omega)$ pouvant se calculer avec un nombre réduit d'opérations, une méthode de maximisation de type interpolation parabolique - nombre d'or [3] a été préférée à une méthode faisant intervenir la dérivée de $\mathcal{L}(\omega)$.

On peut toutefois remarquer que, en exprimant la dérivée de $(\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1}$ en fonction de $(\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1}$ et de la dérivée de $\mathbf{V}^H \mathbf{V}$, la dérivée de $\mathcal{L}(\omega)$ peut se calculer en tenant compte de la structure Toeplitz de $\mathbf{V}^H \mathbf{V}$.

Paramétrisation du sous-espace signal

Soit $\mathbf{R} = \mathbf{E}(\mathbf{Z} \mathbf{Z}^H)$ la matrice d'autocorrélation d'ordre N du signal x_n et $\mathbf{D}(k\omega_0), k=1 \dots M$, les vecteurs colonnes de \mathbf{V} .

D'après les propriétés classiques de la matrice \mathbf{R} , [1], on a :

- La décomposition spectrale de \mathbf{R} s'écrit :

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{N-M} \sigma^2 \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^* + \sum_{k=N-M+1}^N (\sigma^2 + \lambda_k) \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^* \quad (9)$$

avec les notations :

- $\mathbf{S} = \text{Vect}(\mathbf{Y}_{N-M+1}, \dots, \mathbf{Y}_N)$: sous-espace signal
- $\mathbf{B} = \text{Vect}(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{N-M})$: sous-espace bruit

• $S=V(\omega_0)$ où $V(\omega)=\text{Vect}(D(\omega),\dots,D(M\omega))$ (10)

Compte tenu des contraintes reliant les pulsations, on peut dans ce cas définir de façon paramétrique le sous-espace image complet. Si on considère le sous-espace paramétré $V(\omega)$, $\mathcal{V}=\{V(\omega) \omega \in I\}$ définit un continuum qui a une intersection avec S pour $\omega=\omega_0$. La solution du problème consiste donc à minimiser la distance entre $V(\omega)$ et l'estimée de S .

Paramétrisation du sous-espace bruit

Cette approche constitue la duale de la précédente. Son principe est de définir de façon paramétrique le sous-espace bruit et non le sous-espace signal.

Soit un vecteur du sous-espace bruit. Etant donné l'orthogonalité entre sous-espaces signal et bruit, le polynôme associé à ce vecteur a pour racines ρ^k , $k=1\dots M$. Il s'écrit donc sous la forme :

$$Q(Z) \cdot \prod_{k=1}^M (Z - \rho^{-k}) = Q(Z) \cdot \sum_{k=0}^M a_{M-k}(\rho^*) \cdot Z^k = Q(Z) \cdot A(\omega_0, Z) \quad (11)$$

où $Q(Z)$ est un polynôme de degré au plus $N-M-1$

Les coefficients $a_{M-k}(\rho^*)$ étant des polynômes en ρ^* dont le degré le plus élevé est celui de $a_M(\rho^*)=\rho^{-M(M+1)/2}$, on peut écrire la relation linéaire :

$$\Delta(\omega_0) = H \cdot \Delta(-\omega_0) \quad (12)$$

avec :

- $\Delta(\omega_0)$: vecteur de dimension $M+1$ associé au polynome $\Delta(\omega_0, Z)$
- $\Delta(-\omega_0)$: vecteur de dimension $(M(M+1)/2)+1$ construit de façon identique à $\Delta(\omega_0)$
- H : matrice $(M+1) \times (M(M+1)/2)$ (cf. Annexe)

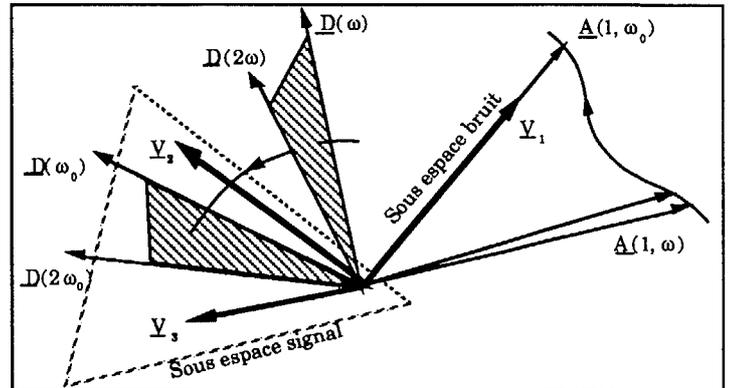
En choisissant par exemple pour $Q(z)$ les monomes Z^{k-1} $k=1\dots N-M$, les résultats précédents permettent de construire aisément pour tout ω_0 , une famille génératrice du sous espace bruit.

Si l'on note $A(k, \omega_0, Z)$ le polynome $Z^{k-1} \cdot A(\omega_0, Z)$ et $\Delta(k, \omega_0)$ le vecteur associé, on a de la même façon que pour l'espace signal, l'égalité :

$$B=U(\omega_0) \text{ où } U(\omega)=\text{Vect}(\Delta(1, \omega), \dots, \Delta(N-M, \omega)) \quad (13)$$

On peut donc dans ce cas aussi définir de façon paramétrique le sous espace bruit complet. De la même façon, si on considère le sous espace paramétré $U(\omega)$, $\mathcal{U}=\{U(\omega) \omega \in I\}$ définit un continuum qui a une intersection avec B pour $\omega=\omega_0$. La solution du problème consiste donc à minimiser la distance entre $U(\omega)$ et l'estimée de B .

Dans le cas $N=3 M=2$, la méthode peut être représentée de la façon suivante :



Choix de la distance

Le problème revient donc à minimiser par rapport à ω la distance entre un sous-espace vectoriel fixe \mathcal{F} et un sous espace vectoriel paramétré $\mathcal{G}(\omega)$. Etant donné que l'on se limite à $\omega \in I$, nous adopterons la solution qui consiste à tracer la fonction $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(\omega))$ en fonction de ω où la distance $\mathcal{D}(\dots)$ reste à déterminer.

Dans le cas présent, nous avons $\dim(\mathcal{F})=\dim(\mathcal{G}(\omega))=p$. Le calcul de la distance entre \mathcal{F} et $\mathcal{G}(\omega)$ revient donc au calcul des angles principaux θ_k , $k=1\dots p$, entre \mathcal{F} et $\mathcal{G}(\omega)$ [6], ou de façon équivalente, à la norme de la différence des matrices de projection sur \mathcal{F} et $\mathcal{G}(\omega)$: $P_{\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{G}(\omega)}$.

On a alors :

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(\omega)) = \|P_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{G}(\omega)}\| = \sin(\theta_p) \quad (14)$$

où :

$$\|A\| = \max_{\|u\|=1} \|A \cdot u\|$$

Le calcul de θ_p nécessite cependant une factorization QR de $\mathcal{G}(\omega)$ plus une décomposition en valeurs singulières. Cette méthode apparait comme étant beaucoup trop couteuse en calculs.

La solution adoptée consiste alors à définir une 'pseudo distance' $\mathcal{F}(\dots)$ à partir des p distances $d(\dots)$ entre \mathcal{F} et les colonnes de $\mathcal{G}(\omega)$ que l'on note $G_k(\omega)$. $d(\mathcal{F}, G_k(\omega))$ étant de façon classique la projection de $G_k(\omega)$ sur l'orthogonal de \mathcal{F} .

$\mathcal{F}(\dots)$ est ainsi défini par :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(\omega)) = \prod_{k=1}^p d(\mathcal{F}, G_k(\omega)) \quad (15)$$

Dans la pratique, on trace l'inverse de cette quantité.



Le choix de cette 'pseudo distance' a pour conséquence immédiate d'obtenir un pic à la fréquence ω_0 beaucoup plus pointu que celui obtenu par les méthodes de décomposition spectrale habituelles. On peut ainsi remarquer que, si on considère le cas où l'on paramétrise l'espace signal, le choix de la 'pseudo distance' (15) conduit à une courbe qui est le produit des M 'tranches successives' de l'estimateur MUSIC.

Cas N=M+1

Dans le cas où $N=M+1$, $\underline{A}(\omega_0)$ peut être obtenue par décomposition spectrale de R ou, de manière équivalente, par minimisation du quotient de Rayleigh défini par :

$$\mathcal{R}(\underline{U}) = \frac{\underline{U}^H \cdot \underline{R} \cdot \underline{U}}{\underline{U}^H \cdot \underline{U}} \tag{16}$$

Au minimum on a alors :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}(\omega_0) \\ \mathcal{R}(\underline{A}(\omega_0)) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Il est donc possible en utilisant (12) de remplacer le problème de minimisation à M variables du quotient de Rayleigh par un problème de minimisation à une variable de la fonction $\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}(\underline{A}(\omega))$.

La minimisation de $\mathcal{R}(\omega)$ s'est avérée beaucoup plus efficace dans de nombreux cas que les méthodes basées sur l'algorithme de la puissance itérée comme par exemple l'itération du quotient de Rayleigh. En effet, dans le cas envisagé la fréquence du fondamental étant généralement voisine de zéro, les plus petites valeurs propres de R sont proches ce qui entraîne une convergence difficile de ces algorithmes.

Conclusions

Deux approches ont été proposées afin de résoudre le problème de l'estimation du fondamental d'un signal harmonique.

La première permet d'obtenir l'estimation par maximum de vraisemblance du fondamental avec un faible coût en calculs. Des simulations ont permis de montrer son efficacité, en particulier dans le cas où le nombre de points disponibles est réduit.

La seconde est basée sur la minimisation de la distance entre le sous-espace bruit où signal et son estimée. Un point clef de cette méthode est la notion de distance entre deux sous-espace vectoriels de même dimension défini par des familles génératrices. Une 'pseudo distance' a été défini afin de réduire la charge de calculs. Néanmoins, compte tenu de l'importance cruciale de ce point, il constitue un thème central pour des recherches ultérieures.

Annexe

Soit $A_n(\omega, Z)$ le polynôme ayant pour racines ρ^k $k=1 \dots n$ $A_n(\omega, Z)$ vérifie la relation de récurrence :

$$A_n(\omega, Z) = A_{n-1}(\omega, Z) \cdot (Z - \rho^{-n}) \tag{17}$$

On peut donc écrire pour le vecteur $\underline{A}_n(\omega)$:

$$\begin{aligned} \underline{A}_n(\omega) &= \begin{pmatrix} \underline{A}_{n-1}(\omega) \\ 0 \end{pmatrix} - \rho^{-n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{A}_{n-1}(\omega) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_{n-1} \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \underline{A}_{n(n-1)/2} - \rho^{-n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ H_{n-1} \end{pmatrix} \underline{A}_{n(n-1)/2} \\ &= \begin{bmatrix} H_{n-1} & \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \\ 0 \dots \dots \dots 0 \end{bmatrix} \underline{A}_{n(n+1)/2} - \begin{bmatrix} 0 \dots \dots \dots 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} & H_{n-1} \end{bmatrix} \underline{A}_{n(n+1)/2} \end{aligned}$$

où :

- $\underline{A}_{n(n-1)/2}$: vecteur de dimension $(n(n-1)/2)+1$ construit de façon identique à $\underline{D}(-\omega_0)$
- H_n : matrice de transfert pour n harmoniques

on obtient ainsi la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ H_n &= \begin{bmatrix} H_{n-1} & \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \\ 0 \dots \dots \dots 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \dots \dots \dots 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} & H_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

Références:

- [1] **R. Schmidt**, 'A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation', PhD thesis, Stanford University, 1981.
- [2] **S. M.Kay**, 'Modern Spectral Estimation', Prentice Hall Signal Processing Series, A. V. Oppenheim Series Editor.
- [3] **W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. teukolsky, W.T. Vetterling**, 'Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing', Cambridge
- [4] **Y.T. Chan, R. Israelson**, 'Estimation of the Parameters of a Sinusoid and its Detection', ASSP Spectrum Estimation Workshop II, pp. 113-117, Nov. 1983, Tampa Florida.
- [5] **Y. Bressler, A. Macovsky**, 'Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signal in Noise', IEEE Transactions on ASSP, Vol. 34, n°5, pp. 1081-1089, October 1986.
- [6] **G.H. Golub, C.F. Van Loan**, 'Matrix Computations', The Johns Hopkins University Press