

SYNTHÈSE D'OUVERTURE EN RADIO-ASTRONOMIE PAR MAXIMUM D'ENTROPIE SUR LA MOYENNE

Guy LE BESNERAIS*, Jorge NAVAZAT†
et Guy DEMOMENT*

*Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE/UPS)

ESE, Plateau de Moulon,
91192 Gif-sur-Yvette Cédex, France

RÉSUMÉ

Nous présentons un algorithme pour la synthèse d'ouverture en radio-astronomie. Cet algorithme effectue la reconstruction d'une image à partir de données de Fourier, et corrige simultanément les données des aberrations de phases apparues lors de la mesure. Ces deux objectifs sont atteints à travers l'optimisation d'un même critère, contrairement aux méthodes utilisées actuellement. Le critère est obtenu par l'utilisation du principe du maximum d'entropie sur la moyenne, ce qui nous permet de prendre en compte des informations non-linéaires sur l'image cherchée. L'algorithme proprement dit a déjà été utilisé en cristallographie et est fondé sur une approche duale du problème.

1. INTRODUCTION

La reconstruction d'image à partir de données situées dans le domaine de Fourier est devenu un problème crucial en radio-astronomie depuis l'avènement des techniques d'observation interférométriques. Deux difficultés principales se posent. *Primo*, les données recueillies ne permettent pas d'obtenir un remplissage suffisant du domaine de Fourier : on est donc confronté à un problème de synthèse de Fourier, dont on sait qu'il est mal-posé (ici au sens de *mal-conditionné*, car le problème est discrétisé). *Secundo*, les données sont entachées d'erreurs systématiques importantes qu'il est nécessaire de corriger. Nous présentons une méthode permettant de répondre à ces deux difficultés en utilisant le principe du maximum d'entropie.

La seconde partie de cet article est consacrée à une présentation rapide du modèle expérimental; nous abordons en partie 3 le problème de la synthèse de Fourier, puis la correction des erreurs systématiques dans la partie 4, en utilisant le principe du maximum d'entropie sur la moyenne. La partie 5 est consacrée à un exemple de simulation, et aux conclusions et perspectives.

2. MODÉLISATION DU PROBLÈME

En radio-astronomie, on cherche à reconstruire la distribution de la luminosité radio d'une région du ciel. On peut supposer le problème projeté sur un plan P orthogonal à la direction moyenne d'observation, ce qui permet de ne travailler qu'avec des vecteurs à 2 dimensions. L'image cherchée x est donc assimilée à une fonction de deux variables, positive à support fini. La procédure expérimentale consiste à calculer la corrélation mutuelle des signaux reçus en deux antennes distinctes A_1 et A_2 . L'étude du contraste et de la phase des franges d'interférences obtenues permet de mesurer une quantité appelée *visibilité complexe*, qui,

†Laboratoire de Physique

Faculté de pharmacie, Tour B,
92290 Châtenay-Malabry Cédex, France

ABSTRACT

An algorithm for aperture synthesis in radio-astronomy is presented, which jointly performs the correction of the phase aberrations corrupting the data and the image reconstruction from the corrected Fourier components. A unique criterion is optimized to achieve both tasks. It is based upon the principle of maximum entropy on the mean, which allows to account for non-linear constraints on the sought image. The optimization procedure uses a dual approach, and derives from a pre-existing algorithm developed for crystallography.

sous certaines hypothèses [1], peut être reliée à la transformée de Fourier bidimensionnelle (2-D) de x , pour la *fréquence spatiale*

$$u_{12} = (a_1 - a_2)/\lambda, \quad (2.1)$$

où a_1 et a_2 désignent les coordonnées des antennes projetées sur P , et λ est la longueur d'onde moyenne d'observation. Cette relation signifie qu'en utilisant des antennes distantes de plusieurs milliers de kilomètres comme en VLBI (Very Large Baseline Interferometry), on accède à une information à très haute résolution sur l'image cherchée (jusqu'à 10^{-4}). Pour avoir un nombre suffisant de données, on utilise un réseau d'antennes, et on effectue plusieurs mesures pour chaque couple d'antennes (ou ligne de base) du réseau, en profitant de la rotation terrestre qui modifie l'orientation des lignes de base relativement à la direction moyenne d'observation. Dans la suite on s'intéressera au cas d'un réseau de n_a antennes sur lequel on dispose d'une seule mesure par ligne de base, et on indiquera les extensions possibles au cas de plusieurs mesures.

Pour chaque ligne de base (A_k, A_l) du réseau, on note $v(k,l)$ la transformée de Fourier 2-D de x en u_{kl} , et $v^{obs}(k,l)$ la visibilité observée. L'équation d'observation peut s'écrire

$$v^{obs}(k,l) = v(k,l) T(k,l) + \text{bruit}, \quad 1 \leq k, l \leq n_a, \quad (2.2)$$

où le bruit est supposé blanc gaussien stationnaire centré et circulaire, et le coefficient complexe $T(k,l)$ désigne les erreurs systématiques affectant la mesure : turbulence atmosphérique, aberrations propres à chaque antenne, erreur sur les positions relatives des antennes, erreurs de synchronisation en VLBI... Toutes ces erreurs dépendent en fait des conditions locales à chaque antenne, c'est pourquoi un modèle couramment employé en radio-astronomie consiste à écrire (2.2) sous la forme suivante

$$v^{obs}(k,l) = v(k,l) g(k)g(l)^* + \text{bruit}, \quad (2.3)$$



où $g(k)$ est un coefficient complexe appelé gain de l'antenne A_k . Comme ce sont les aberrations de phase les plus gênantes lors de la reconstruction d'une image à partir de données de Fourier, nous sommes intéressés dans un premier temps à des gains d'antennes normalisés : si on note par $\alpha(k)$ la phase de $g(k)$ et par $\beta(k,l)$ les phases de visibilité, on peut remplacer (2.4) par

$$|v^{\text{obs}}(k,l)| = |v(k,l)| + \text{terme d'erreur}, \quad (2.4)$$

$$\beta^{\text{obs}}(k,l) = \beta(k,l) + \alpha(k) - \alpha(l) + \text{terme d'erreur}. \quad (2.5)$$

On peut donc considérer que les données sont des coefficients de Fourier de l'image cherchée dont la phase est partiellement connue : pour lever l'indétermination, il faut estimer les $(n_a - 1)$ phases d'aberration d'antenne α . Par comparaison, le problème sans phase tel qu'il se pose en cristallographie nécessite la détermination de $n_a(n_a - 1)/2$ phases de visibilité inconnues. Il convient de noter que le problème est plus complexe à formuler dans le cas de données redondantes, c'est-à-dire lorsque plusieurs lignes de base mesurent la même fréquence spatiale : on définit alors un sous-espace des phases compatibles avec les données [2], qui se réduit dans le cas non-redondant à un espace affine de dimension $(n_a - 1)$ défini par le vecteur β^{obs} et par (2.5).

Un certain nombre de méthodes, dites d'auto-calibration, ont été développées pour reconstruire l'image à partir de ces données [1]. Elles sont en général basées sur le principe de l'algorithme de Gerchberg-Papoulis, déjà très utilisé dans le problème sans phase [3]. Le principe est d'imposer des contraintes alternativement sur l'image estimée et sur ses coefficients de Fourier, pour trouver un point fixe. Les contraintes sur l'image en radio-astronomie sont la positivité, le support fini et un aspect plus ou moins explicitement présupposé de pics brillants sur un fond sombre. Les algorithmes les plus utilisés dans cette étape sont l'algorithme CLEAN [1], qui identifie des impulsions dans l'image obtenue par transformée de Fourier inverse des données, et les méthodes à maximum d'entropie [4]. Les contraintes sur les coefficients de Fourier sont l'appartenance au sous-espace compatible avec les données, défini par les équations (2.4)-(2.5). Ce sont des *relations de clôture* qui sont imposées par projection par méthode des moindres carrés.

Nous proposons une approche unifiée de ces deux opérations à travers l'optimisation d'un critère portant sur les paramètres inconnus α et reposant sur le principe du maximum d'entropie sur la moyenne. Dans la partie suivante nous présentons ce principe en nous intéressant au problème de la synthèse de Fourier.

3. SYNTHÈSE DE FOURIER

Dans cette partie nous considérons que nous disposons d'une valeur des paramètres α , et nous étudions la reconstruction d'une image à partir des composantes de Fourier estimées obtenues en inversant le système (2.4)-(2.5)

$$v^e(k,l) = v^{\text{obs}}(k,l) \exp[i(\alpha(k) - \alpha(l))], \quad 1 \leq k, l \leq n_a. \quad (3.1)$$

3.1. Principe du maximum d'entropie sur la moyenne

Cette approche a été développée pour le problème de la cristallographie [5], et a fait l'objet de travaux théoriques récents tant pour ses aspects statistiques [6] que pour le problème d'optimisation sur lequel elle débouche [7]. Il s'agit de reconstruire une distribution d'image choisie par maximum d'entropie parmi celles satisfaisant aux données *en moyenne*. En moyenne signifie que l'espérance de l'image pour la distribution considérée admet les données v^e comme composantes de Fourier. L'utilisation du maximum d'entropie sur un espace fonctionnel pose des problèmes mathématiques difficiles, en particulier pour

définir une mesure de référence. Nous éviterons ces problèmes en nous restreignant au problème discrétisé. Le lecteur intéressé par le cas continu pourra consulter la référence [6].

L'image cherchée est donc modélisée par un vecteur aléatoire \mathbf{X} de dimension n dont chaque composante est associée à un site. L'ensemble de ces n sites constitue le support (fini) de l'image. Les contraintes que nous allons prendre en compte concernent l'ensemble des réalisations de \mathbf{X} : on suppose que l'on connaît l'intervalle de définition $[a_p, b_p]$ de la $p^{\text{ième}}$ composante de \mathbf{X} et une mesure F_p sur cet intervalle. Pour simplifier les calculs, nous nous placerons dans le cas de sites interchangeables

$$[a_p, b_p] = [a, b] \text{ et } F_p = F, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (3.2)$$

La densité de probabilité f_x de \mathbf{X} par rapport à la mesure produit $\mu = F^{\otimes n}$ est choisie pour maximiser l'entropie relative :

$$H(f_x) = - \int_{\Omega} f_x(y) \ln(f_x(y)) d\mu(y), \quad (3.3)$$

avec $\Omega = \bigcup_{1 \leq p \leq n} [a_p, b_p] = [a, b]^n$. Soit x l'image moyenne sous f_x , les contraintes en moyenne peuvent s'écrire :

$$\Xi \mathbf{x} = \mathbf{v}^e, \quad (3.4)$$

avec Ξ la matrice de transformée de Fourier dont la $p^{\text{ième}}$ colonne est notée : $\xi_p = [\dots \exp(-2i\pi(s_p \cdot \mathbf{u}_{kl})) \dots]^t$.

La solution est une loi exponentielle séparable sur les sites (les composantes de \mathbf{X} sont indépendantes) dépendant de multiplicateurs de Lagrange complexes $\hat{w}(k,l)$, $1 \leq k, l \leq n_a$. Finalement, on choisit comme image « solution » l'image moyenne sous la loi optimale, que l'on notera \hat{x} . Le résultat intéressant est que \hat{x} est aussi solution du problème de la maximisation de la fonction concave suivante

$$\Gamma(\hat{x}) = - \sum_{1 \leq p \leq n} \gamma_F(\hat{x}(p)), \quad (3.5)$$

sous les contraintes (3.4). γ_F est la transformée de Cramér de la mesure F , i.e. la conjuguée de la log-transformée de Laplace

$$\gamma_F(t) = \max_{s \in \mathbb{R}} (s t - \phi_F(s)), \quad (3.6)$$

$$\exp(\phi_F(t)) = \int_{[a,b]} \exp(tx) dF(x). \quad (3.7)$$

Ce résultat permet de fournir un cadre unifié à un grand nombre de critères très employés, puisque, suivant les formes de F , on peut obtenir en (3.5) les moindres carrés, les entropies de Burg ou de Boltzmann, etc... Mais le principal intérêt réside dans la possibilité de construire par ce moyen de nouveaux critères : on peut en particulier intégrer la connaissance *a priori* de bornes sur l'intensité de chaque pixel, comme cela est fait dans [5], pour la cristallographie : dans ce domaine en effet, l'image cherchée est la densité électronique dans un cristal, qui est comprise entre 0 et 1. Dans le cas de l'astronomie, on peut supposer que des observations à basse résolution, ou un modèle de la région étudiée, ont permis de circonscrire des sous-régions d'intensité bornée et de bornes connues dans l'image : une fonction γ_F peut ensuite être construite pour exprimer cet *a priori*.

L'existence et l'unicité de la solution du problème d'optimisation sous contraintes (3.4)-(3.5) dépend de conditions peu restrictives sur F [6]. La solution peut s'écrire

$$x_p = \phi_F'(\xi_p^* \mathbf{w}), \quad 1 \leq p \leq n, \quad (3.8)$$

où \mathbf{w} désigne un vecteur de multiplicateurs de Lagrange. Cette expression appelle quelques commentaires : d'abord le terme $\xi_p^* \mathbf{w}$ est la transformée de Fourier inverse des multiplicateurs de

Lagrange. Par ailleurs, l'intervention de ϕ_F' correspond en fait à la forme exponentielle de la loi optimale : les moments liés aux dérivées successives de ϕ_F . Les propriétés de ϕ_F' définissent les caractéristiques de l'image obtenue : aspect « piqué », tassement des lobes secondaires.... Une étude pratique détaillée de ces propriétés pour divers critères entropiques se trouve dans [4].

3.2 Algorithme dual

Le problème dual du précédent consiste à rechercher le vecteur des multiplicateurs de Lagrange optimal $\hat{\mathbf{w}}$ puis à utiliser (3.8) pour reconstituer l'image. Cette approche possède de nombreux avantages dont celui de conduire à un problème de dimension moindre (on travaille dans l'espace des données) et surtout sans contraintes. Le critère dual est

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{1 \leq p \leq n} \phi_F(\mathbf{w} * \xi_p) - \mathbf{w} * \mathbf{v}^e. \quad (3.9)$$

C'est une fonction convexe, dont on peut écrire le gradient par rapport à \mathbf{w} sous la forme

$$\text{grad} J = \Xi \mathbf{x}(\mathbf{w}) - \mathbf{v}^e. \quad (3.10)$$

Dans cette équation l'expression $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ renvoie à (3.8). On note que la condition de stationnarité de J donne évidemment le système des contraintes (3.4). On cherche le point stationnaire de J par une procédure de Newton-Raphson. Le développement de Taylor au premier ordre de (3.10) fait apparaître une matrice \mathbf{D} carrée d'ordre $n_a(n_a-1)/2$

$$\mathbf{D} = \Xi \text{diag}[\phi_F''(\mathbf{w} * \xi_p)]_{1 \leq p \leq n} \Xi^*. \quad (3.11)$$

A chaque étape de la procédure on choisit comme incrément des paramètres de Lagrange la solution du système linéaire de matrice \mathbf{D} et de second membre l'opposé du gradient. Il est donc intéressant d'étudier certaines propriétés de \mathbf{D} . Ses composantes sont les coefficients de Fourier de l'« image » $\phi_F''(\mathbf{w} * \xi_p)_{1 \leq p \leq n}$ à des fréquences obtenues par différence d'éléments de K . On peut montrer (voir [6]) que cette « image » correspond en fait à la variance de chaque composante de \mathbf{X} sous la loi optimale (cela provient encore de la forme exponentielle de la loi); il est clair que la convexité de ϕ_F en fait une fonction positive, et par conséquent \mathbf{D} est une matrice définie positive. Pour inverser le système correspondant on peut utiliser une factorisation de Cholesky.

La présence d'erreurs dans les mesures nous amène à introduire une tolérance sur les données, par l'utilisation d'un critère pénalisé à la place du problème sous contraintes (3.4)-(3.5)

$$\Gamma_\lambda(\mathbf{x}) = -\lambda \sum_{1 \leq p \leq n} \gamma_F(x(p)) - 1/2 \sum_{1 \leq k, l \leq n} q_{kl} [v^e(k, l) - v(k, l)]^2, \quad (3.12)$$

avec $v(k, l)$ coefficient de Fourier de l'image estimée à la fréquence \mathbf{u}_{kl} . Les coefficients q_{kl} pondèrent les données en fonction du rapport signal-à-bruit sur chaque ligne de base. On retrouve une forme de critère classique associant un terme quadratique d'adéquation aux données et un terme régularisateur contenant notre information *a priori* sur l'image cherchée [4].

Une simple reformulation de ce nouveau problème permet d'utiliser à nouveau l'approche duale [7], et le critère dual s'écrit

$$J_\lambda(\mathbf{w}) = \lambda \sum_{1 \leq p \leq n} \phi_F(\mathbf{w} * \xi_p) - \lambda \mathbf{w} * \mathbf{v}^e + \lambda^2/2 \mathbf{w} * \mathbf{w}. \quad (3.13)$$

La seule modification à apporter à la procédure décrite précédemment est l'addition d'un coefficient λ sur la diagonale de \mathbf{D} , ce qui garantit sa positivité, et par voie de conséquence l'existence d'une solution duale $\hat{\mathbf{w}}$ unique. Bien entendu cette solution est désormais un compromis entre les données et *a priori*

qui dépend du choix (difficile) du paramètre de régularisation, choix dont nous ne discuterons pas ici.

Nous avons décrit une procédure qui nous permet de reconstruire une image à partir d'un jeu de coefficients de Fourier \mathbf{v}^e définis par l'équation (3.1). Il nous faut maintenant corriger les données observées des aberrations de phase (équation 2.5).

4. CORRECTIONS DE PHASE

Compte-tenu des hypothèses précisées dans le premier paragraphe, les données observées définissent les coefficients de Fourier de l'image à un jeu de paramètres près, notés α . Pour déterminer la valeur de ces paramètres, nous allons utiliser une fois encore le principe du maximum d'entropie. On peut montrer que cela revient à optimiser le critère J_λ défini dans le paragraphe précédent, considéré comme une fonction de deux jeux de paramètres : les multiplicateurs de Lagrange \mathbf{w} d'une part, et les coefficients d'aberration de phase α , qui interviennent dans la définition des données estimées \mathbf{v}^e (équation 3.1), d'autre part [5].

L'optimisation est effectuée alternativement sur chaque jeu de paramètres. Dans ce paragraphe, nous nous plaçons après une étape d'optimisation en \mathbf{w} , qui a conduit à la solution duale $\hat{\mathbf{w}}(\alpha)$, fonction implicite de la valeur courante α des paramètres de phase. C'est l'unicité de la solution du problème exposé au paragraphe précédent qui nous autorise à écrire cette relation fonctionnelle. Notre but est de calculer le pas $\Delta\alpha$ qui conduira à une nouvelle diminution du critère J_λ . Posons :

$$G_\lambda(\alpha) = J_\lambda(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{v}^e(\alpha)), \mathbf{v}^e(\alpha))/\lambda. \quad (4.1)$$

Cette fonction constitue un critère entropique sur les seuls paramètres de phase α , que nous allons minimiser. Pour cela nous calculons les caractéristiques locales de G_λ en commençant par les exprimer par rapport à \mathbf{v}^e . Le gradient s'obtient en dérivant l'expression (3.13)

$$\left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial v_{kl}^e}\right) = -\hat{w}_{kl}^* + \sum_{1 \leq k, l \leq n_a} \left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial w_{kl}}\right) \left(\frac{\partial w_{kl}}{\partial v_{kl}^e}\right), \quad (4.2)$$

à un point stationnaire de $J_\lambda(\bullet, \mathbf{v}^e)$, le second terme s'annule, et

$$\text{grad}_{\mathbf{v}^e} G_\lambda = -\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{v}^e)^*. \quad (4.3)$$

C'est en fait un résultat classique des problèmes à maximum d'entropie : à l'optimum, la dérivée de l'entropie par rapport à une contrainte est le paramètre de Lagrange correspondant [8].

Le hessien de G_λ par rapport à \mathbf{v}^e s'obtient en dérivant les composantes de \mathbf{w} , ce qui conduit à

$$M(k, l; i, j) = -D^{-1}(-k, -l; i, j). \quad (4.4)$$

On constate maintenant un autre avantage de l'algorithme dual : toutes ces informations sont obtenues directement à la dernière étape de la procédure de Newton-Raphson sur \mathbf{w} décrite au paragraphe 3. Pour passer aux paramètres de phase α on utilise

$$dv^e(k, l) = iv^e(k, l)[i(d\alpha(k) - d\alpha(l)) - 1/2(d\alpha(k) - d\alpha(l))^2]. \quad (4.5)$$

On obtient donc l'approximation quadratique de G_λ au voisinage de la valeur courante des paramètres α

$$dG_\lambda = d\alpha^* \mathbf{g} + (1/2) d\alpha^* \mathbf{H} d\alpha. \quad (4.6)$$

Pour calculer le pas $\Delta\alpha$ nous utilisons la méthode de la région de confiance [9] qui consiste à calculer le minimum de (4.6) sur une boule de rayon $n_a r$ centrée en α dans laquelle l'approximation est valable. Pour un rayon donné, il faut déterminer $\epsilon \leq 0$ de telle sorte que la matrice du système linéaire :

$$\sum_k (H(k, l) + \epsilon \delta(k, l)) \Delta\alpha(k) = -g_l \quad 1 \leq l \leq n_a \quad (4.7)$$



soit définie positive, et que $\Delta\alpha$ appartienne à la région de confiance. Une modification de la décomposition de Cholesky permet de calculer efficacement ϵ (Sarrazin, communication personnelle, 1990). Si le minimum se trouve effectivement dans la région de confiance, alors $\epsilon = 0$ et on obtient le pas de la méthode de Newton-Raphson, sinon on est rejeté sur la frontière de la boule. Cette méthode permet d'atteindre un point où le hessien est défini positif et le gradient nul, donc un minimum local de G_λ . Lorsque les données le permettent, on peut obtenir une solution pour λ tendant vers 0.

Nous avons décrit un algorithme pour déterminer un maximum local de l'entropie par rapport aux paramètres d'aberration de phase α . A chaque étape, il faut utiliser l'algorithme du paragraphe 3 pour calculer la nouvelle valeur du critère et les données locales. Il faut noter que le problème d'optimisation sur α est de dimension $(n_a - 1)$, donc inférieur d'un ordre de grandeur au nombre de données $n_a(n_a - 1)/2$.

5. RÉSULTAT DE SIMULATION

Nous présentons des résultats obtenus pour un réseau simulé comprenant 14 antennes dans une configuration non redondante : nous disposons de mesures sur 91 fréquences spatiales appartenant à une grille rectangulaire, ce qui nous permet d'utiliser la TFR. L'image à reconstruire est représentée en figure 1 sur deux niveaux de contours et 36×36 pixels. Pour simuler le processus d'observation, nous avons généré des phases d'aberrations d'antennes suivant une loi gaussienne centrée d'écart-type 60° , puis les coefficients de Fourier de l'image ont été modifiés par ces aberrations suivant le modèle (2.4)-(2.5) et bruitées avec un RSB de 10 dB. La figure 2 représente la reconstruction à maximum d'entropie sans itérations en phase, c'est-à-dire l'application de la procédure décrite au paragraphe 3 directement sur les données. La figure 3 représente l'image obtenue après convergence de l'algorithme global sur les paramètres de phase. Dans les deux cas on a utilisé l'entropie de Boltzmann $\gamma_F(t) = -t \ln(t/e)$. On constate que les positions des pics de l'image originale sont retrouvées à un décalage près qui correspond à l'indétermination du problème sur l'origine.

6. CONCLUSION

Nous avons présenté un algorithme d'auto-calibration par utilisation d'un critère entropique sur les paramètres de correction des données en phase. De nombreuses extensions sont prévues, en particulier pour traiter le cas d'un réseau fournissant plusieurs séries de données, le cas de données redondantes et enfin pour corriger les dégradations intervenant sur le module.

7. RÉFÉRENCES

- 1 R. Thompson, J. M. Moran, G. W. Swenson Jr., Interferometry and synthesis in radio-astronomy, John Wiley & Sons, New-York, 1986.
- 2 A. Lannes, "Phase and amplitude calibration in aperture synthesis. Algebraic structures," *Inverse Problems*, vol. 7, pp. 261-298, 1991.
- 3 J. R. Fienup, "Phase retrieval algorithms : a comparison," *Applied optics*, vol. 21, 15, pp. 2758-2769, August 1982.
- 4 R. Narayan & R. Nityananda, "Maximum entropy image restoration in astronomy," *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 24, pp.127-170, 1986.
- 5 J. Navaza, "On the maximum-entropy estimate of the electron density function," *Acta Cryst.*, vol. A41, pp. 232-244, 1985.
- 6 F. Gamboa, "Méthode du maximum d'entropie sur la moyenne et applications," Thèse, D ep^l. de mathématiques, Univ. de Paris-Sud, 1989.

- 7 A. Decarreau, D. Hilhorst, C. Lemaréchal & J. Navaza, "Dual methods in entropy maximization: application to some problems in crystallography," soumis à *SIAM J. on Control and Optimization.*, 1991.
- 8 E.T. Jaynes, Papers on probability, statistics and statistical physics, ed. R. D. Rosenkrantz, Reidel, Dordrecht, 1983.
- 9 J. Moré, "Recent developments in algorithms and software for trust region methods," Mathematical Programming. The state of the Art, A. Bachem, Grötschel, Korte, p. 258, Springer Verlag, Heidelberg, 1983.

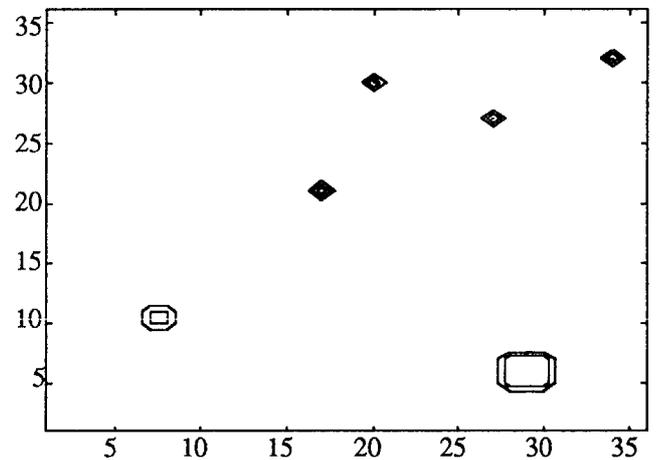


Figure 1 — Image de synthèse originale (2 niveaux entre min = 0 et max = 1).

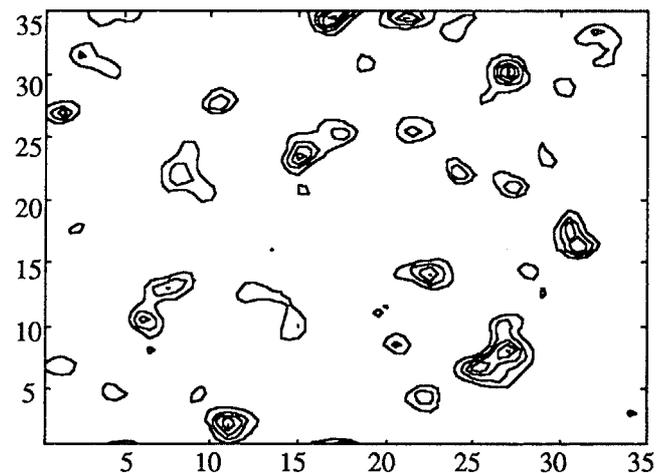


Figure 2 — Résultat par maximum d'entropie sans optimisation en phase (9 contours entre les niveaux min = $1.e^{-4}$ et max = 0.24).

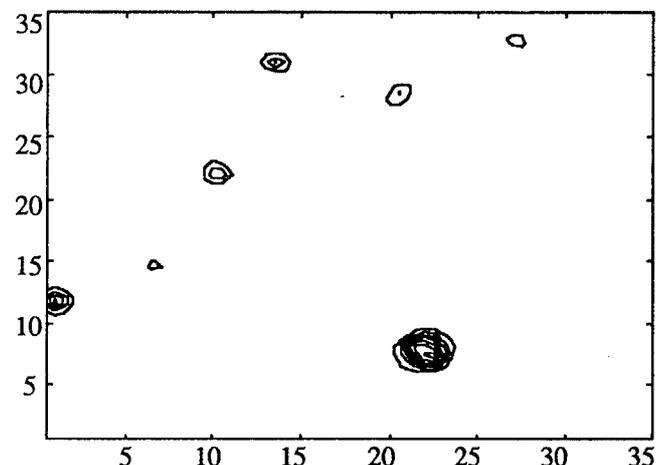


Figure 3 — Résultat par maximum d'entropie après optimisation en phase (9 contours entre les niveaux min = $1.e^{-4}$ et max = 0.7).