

**ANALYSE BISPECTRALE DES PROCESSUS  
LINEAIRES-QUADRATIQUES A SPECTRE DE RAIES**

**P. DURAND**

**CEPHAG-ENSIEG, BP 46 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France**

**RÉSUMÉ**

**Résumé.** A partir d'un modèle de processus linéaire-quadratique (LQ) à spectre de raies, nous traitons le problème de la détection d'un couplage quadratique entre trois composantes fréquentielles, en utilisant la bicohérence du processus. Nous définissons une mesure de la participation d'une composante à la partie quadratique du signal. Cette mesure est appliquée à la surveillance d'un système d'engrenages.

**ABSTRACT**

**Abstract.** From a model of a linear-quadratic (LQ) process with line spectrum, we deal with the detection of a quadratic coupling between three frequency components by using the process bicoherency. We define a measure of the contribution of one component to the quadratic part of the process. That measure is applied to the gears supervision.

**1 INTRODUCTION**

Un des paramètres les plus caractéristiques des machines tournantes est leur état vibratoire. Plusieurs méthodes de traitement du signal sont déjà utilisées pour faire un diagnostic sur le fonctionnement ou l'état de ces machines en utilisant leurs vibrations. Etudions sommairement les vibrations d'une machine tournante particulière : un système d'engrenages. Un système d'engrenages simple est constitué d'une roue dentée menante et d'une autre menée. Deux caractéristiques du spectre d'un engrenage sont la fréquence de rotation  $f_r$  qui est liée à la vitesse angulaire de la roue, et la fréquence d'engrènement  $f_e$  qui est le produit de la fréquence de rotation par le nombre de dents de la roue. Le bruit propre d'un système d'engrenages parfait est le signal d'engrènement c'est-à-dire la prise de contact entre une dent de la roue menante et une dent de la roue menée. Ce signal est périodique de fréquence  $f_e$  ; son spectre est distribué sur la fréquence  $f_e$  et sur un certain nombre d'harmoniques de  $f_e$ . Pour un système d'engrenages réel, à ce signal d'engrènement s'ajoutent ou se combinent d'autres composantes dues aux imperfections du système. Par exemple, les défauts des éléments tournants (roues, axes, roulements) entraînent une modulation d'amplitude du signal d'engrènement par le signal des éléments tournants distribué sur la fréquence de rotation et ses harmoniques. Nous proposons dans ce papier une méthode de surveillance des engrenages basée sur la détection de ces non linéarités en utilisant la bicohérence des vibrations.

**2 BISPECTRE ET BICOHERENCE**

Soit  $\{x_n\}$  un signal aléatoire à valeurs réelles de la variable discrète  $n$ , non déterministe, ergodique, centré et stationnaire d'ordre trois (les statistiques d'ordre un, deux et trois ne dépendent pas de l'origine de la variable  $n$ ).  $\{x_n\}$  a une bicorrélation qui est le moment croisé du signal à trois instants  $l$ ,  $l+m$  et  $l+n$ , qui peut s'écrire uniquement en fonction des deux retards  $m$  et  $n$  :

$$R_3(m,n) = E\{x_l x_{l+m} x_{l+n}\}$$

Le bispectre de  $\{x_n\}$  est la transformée de Fourier (TF) bidimensionnelle de sa bicorrélation [1] :

$$(1) \quad B(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_3(m,n) \exp\{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)\}$$

La condition d'existence du bispectre est que la bicorrélation soit absolument intégrable. A partir de la représentation spectrale de Cràmer du signal

$$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(j\omega n) dZ(\omega)$$

nous pouvons définir la densité spectrale de puissance (DSP)  $S(\omega)$  et le bispectre de  $\{x_n\}$  de la manière suivante [2] :

$$E\{dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)\} = \begin{cases} S(\omega_1)d\omega_1/2\pi & \omega_1 + \omega_2 = 0 \text{ mod}(2\pi) \\ 0 & \omega_1 + \omega_2 \neq 0 \text{ mod}(2\pi) \end{cases}$$

$$(2) \quad E\{dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)\} = \begin{cases} B(\omega_1, \omega_2)d\omega_1 d\omega_2/2\pi & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \text{ mod}(2\pi) \\ 0 & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0 \text{ mod}(2\pi) \end{cases}$$

La nullité de la densité spectrale en dehors de la famille de droites parallèles  $\omega_1 + \omega_2 = 0 \text{ mod}(2\pi)$ , et la nullité de la densité bispectrale en dehors de la famille de plans parallèles  $\omega_3 + \omega_1 + \omega_2 = 0 \text{ mod}(2\pi)$ , sont dues à la stationnarité du processus. Ces deux sous-espaces sont respectivement les multiplicités stationnaires d'ordre deux et trois.

La formule de Parseval, nous donne une interprétation physique de la densité spectrale de puissance  $S(\omega)$  d'un processus réel : c'est la distribution de la puissance du signal sur l'ensemble des couples de composantes fréquentielles de fréquences opposées. Prenons la TF inverse de la définition (1) et posons  $m=n=0$  :

$$E\{x_l^3\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

Le bispectre apparaît comme la distribution de  $E\{x_n^3\}$  sur la multiplicité stationnaire d'ordre trois.

Le bispectre a les propriétés de symétrie suivantes

$$(3) \quad B(\lambda_1, \lambda_2) = B(\lambda_1, -\lambda_1 - \lambda_2) = B(\lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2) = B(\lambda_2, \lambda_1)$$



$$=B^*(-\lambda_1, -\lambda_2)$$

et la propriété de double périodicité

$$(4) \quad B(\lambda_1, \lambda_2) = B(\lambda_1 + 2\pi, \lambda_2 + 2\pi)$$

La multiplicité stationnaire est l'ensemble des points [3]

$$\Delta = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) / \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \pmod{2\pi}\}$$

En utilisant (3) et (4), cet ensemble de définition peut être réduit aux deux domaines suivants :

$$\Delta_1 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) / -\pi \leq \lambda_i \leq \pi \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$$

$$\Delta_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) / -\pi \leq \lambda_i \leq \pi \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\pi\}$$

Grâce aux propriétés (3), ces deux domaines sont réduits chacun à un triangle représentés dans le même plan Figure 1 :

$$\Delta_1 = \text{Triangle}[(0,0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (0,\pi)]$$

$$\Delta_2 = \text{Triangle}[(\pi, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})]$$

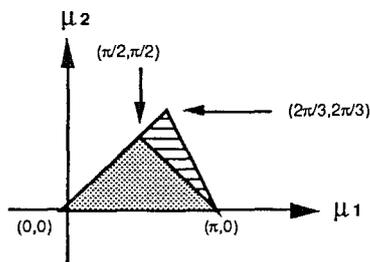


Figure 1 : domaine  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$

Lorsque le processus est numérisé en respectant la condition de Shannon, le bispectre est nul sur  $\Delta_2$ .  $\Delta_1$  suffit alors à la connaissance totale du bispectre.

Définissons la bicohérence de  $\{x_n\}$  de la manière suivante [4] :

$$(5) \quad b_C(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta\nu} \beta(\omega_1, \omega_2)$$

$$(6) \quad \beta(\omega_1, \omega_2) =$$

$$\left[ \frac{\int_{\omega_1 - \Delta\nu}^{\omega_1 + \Delta\nu} \int_{\omega_2 - \Delta\nu}^{\omega_2 + \Delta\nu} B(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2}{\int_{\omega_1 - \Delta\nu}^{\omega_1 + \Delta\nu} S(\mu_1) d\mu_1 \int_{\omega_2 - \Delta\nu}^{\omega_2 + \Delta\nu} S(\mu_2) d\mu_2 \int_{\omega_1 + \omega_2 - \Delta\nu}^{\omega_1 + \omega_2 + \Delta\nu} S(\mu_3) d\mu_3} \right]^2$$

Avec les conditions sur  $\{x_n\}$ , cette limite tend vers la définition classique [2]

$$(7) \quad b_C(\omega_1, \omega_2) = \frac{|B(\omega_1, \omega_2)|^2}{S(\omega_1)S(\omega_2)S(\omega_1 + \omega_2)}$$

### 3 PROCESSUS LQ A SPECTRE DE RAIES

Le processus  $\{x_n\}$  qui nous a servi à définir les outils statistiques a une DSP continue. Considérons un processus à spectre de raies, constitué de modèles simples tel celui ci

$$(8) \quad y_n = A_1 \cos(2\pi\lambda_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi\lambda_2 n + \phi_2) + A_{3L} \cos(2\pi\lambda_3 n + \phi_{3L}) + A_{3Q} \cos(2\pi\lambda_3 n + \phi_{3Q})$$

Les  $A_i$  sont des constantes ;  $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$  ;  $\phi_{3Q} = \phi_1 + \phi_2$  ;  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_{3L}$  sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur  $[-\pi, \pi]$ . Supposons que

$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1/2$  et  $\lambda_3 \leq 1/2$  (fréquences réduites) pour nous situer dans le domaine  $\Delta_1$ . La quatrième sinusoïde est liée aux deux premières par la relation de phase  $\phi_{3Q} = \phi_1 + \phi_2$  ; cette relation s'explique par un couplage quadratique des deux premières sinusoïdes. Les troisième et quatrième sinusoïdes représentent à la fréquence  $\lambda_3$ , respectivement la partie linéaire et la partie quadratique due au couplage des deux premières sinusoïdes.

La DSP du modèle est un résultat classique :

$$(9) \quad S(\mu) = \frac{1}{4} \left[ A_1^2 [\delta(\mu - \lambda_1) + \delta(\mu + \lambda_1)] + A_2^2 [\delta(\mu - \lambda_2) + \delta(\mu + \lambda_2)] + [A_{3L}^2 + A_{3Q}^2] [\delta(\mu - \lambda_3) + \delta(\mu + \lambda_3)] \right]$$

L'expression (9) montre bien que l'ordre deux ne nous permet pas de conclure sur une éventuelle relation de phase ( $A_{3Q} \neq 0$ ) :

la puissance linéaire  $A_{3L}^2/4$  et la puissance quadratique  $A_{3Q}^2/4$  à

la fréquence  $\lambda_3$  ne sont pas découplées.

La bicorrélation du modèle (8) est

$$(10) \quad R_3(k, l) = \frac{A_1 A_2 A_3 Q}{4} \left[ \cos(2\pi(\lambda_2 k - \lambda_3 l)) + \cos(2\pi(\lambda_1 k - \lambda_3 l)) + \cos(2\pi(\lambda_3 k - \lambda_2 l)) + \cos(2\pi(\lambda_3 k - \lambda_1 l)) + \cos(2\pi(\lambda_1 k + \lambda_2 l)) + \cos(2\pi(\lambda_2 k + \lambda_1 l)) \right] + \frac{A_1 A_2 A_3 L}{4} E \left\{ \cos(2\pi(\lambda_2 k - \lambda_3 l) + \phi_{3L} - \phi_{3Q}) + \cos(2\pi(\lambda_1 k - \lambda_3 l) + \phi_{3L} - \phi_{3Q}) + \cos(2\pi(\lambda_3 k - \lambda_2 l) + \phi_{3Q} - \phi_{3L}) + \cos(2\pi(\lambda_3 k - \lambda_1 l) + \phi_{3Q} - \phi_{3L}) + \cos(2\pi(\lambda_1 k + \lambda_2 l) + \phi_{3L} - \phi_{3Q}) + \cos(2\pi(\lambda_2 k + \lambda_1 l) + \phi_{3L} - \phi_{3Q}) \right\}$$

et son bispectre a pour expression dans  $\Delta_1$ ,

$$(11) \quad B(\mu_1, \mu_2) = \frac{A_1 A_2 A_3 Q}{8} \delta(\mu_1 - \lambda_2) \delta(\mu_2 - \lambda_1)$$

Le bispectre est donc une impulsion de Dirac au point  $(\lambda_2, \lambda_1)$ .

De la composante de fréquence  $\lambda_3$ , seul le terme quadratique intervient dans l'expression du bispectre.

En utilisant (9) et (11) dans la définition (5) de la bicohérence, nous voyons que pour notre modèle cette fonction tend vers l'infini au point  $(\lambda_2, \lambda_1)$ . Pour les processus à spectre de raies, la définition de la bicohérence qui doit être utilisée est

$$(12) \quad b_D(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \beta(\omega_1, \omega_2)$$

Pour notre modèle simple, cette bicohérence normalisée, au point  $(\lambda_2, \lambda_1)$ , est égale à

$$(13) \quad b_D(\lambda_2, \lambda_1) = \frac{A_{3Q}^2}{A_{3L}^2 + A_{3Q}^2}$$

qui est le rapport de la puissance quadratique sur la puissance totale à la fréquence  $\lambda_3$ . Nous appelons ce rapport le coefficient de couplage quadratique R des trois composantes.

### 4 ESTIMATION DU COEFFICIENT R

En estimant la DSP par le périodogramme moyenné,

$$(14) \quad \hat{S}(\mu) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{M} |\hat{Y}_i(\mu)|^2$$

et le bispectre par le bipériodogramme moyenné,



$$(15) \quad \hat{B}(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{M} \hat{Y}_i(\mu_1) \hat{Y}_i(\mu_2) \hat{Y}_i^*(\mu_1 + \mu_2)$$

nous obtenons l'estimateur suivant de la bicohérence normalisée,

$$(16) \quad \hat{b}_D(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{M} \frac{|\hat{B}(\mu_1, \mu_2)|^2}{\hat{S}(\mu_1) \hat{S}(\mu_2) \hat{S}(\mu_1 + \mu_2)}$$

où K est le nombre de réalisations du processus, M est le nombre d'échantillons par réalisation et  $\hat{Y}_i(\mu)$  est la transformée de Fourier discrète (TFD) de la  $i^{\text{ème}}$  réalisation. Le filtre (irréalisable) de gain unité et de largeur  $2\Delta\nu$  utilisé dans la définition (12) est remplacé par la fenêtre spectrale de la fonction rectangulaire de longueur M et d'amplitude unité. On montre que lorsque  $M \rightarrow \infty$ , cet estimateur est consistant. Notons que l'estimateur de (5) est obtenu en multipliant (16) par M.

En utilisant la DDP du bipériodogramme moyenné [5] nous obtenons un estimateur non biaisé de R en corrigeant (16) :

$$(17) \quad \hat{R} = \frac{K \hat{b}_D(\lambda_2, \lambda_1) - 1}{K - 1} = A + B\chi + Ca$$

où A, B et C sont des constantes dépendant de R et de K, et où

$\chi$  et a sont respectivement une variable de chi-deux à deux degrés de liberté et une variable normale centrée réduite, décorréelées. La variance de l'estimateur est,

$$(18) \quad \text{Var} \left\{ \hat{R} \right\} = \frac{(1 - R)(1 - R + 2KR)}{(K - 1)^2}$$

Notons que cette variance tend vers 0 lorsque K augmente et que cette variance est nulle quelque soit  $K \geq 2$  lorsque  $R=1$ , c'est-à-dire lorsque la composante de fréquence  $\lambda_3$  est totalement due au couplage quadratique des deux autres composantes.

## 5 DETECTION DE COUPLAGES DEGRÉ DE COUPLAGE

En considérant  $\chi$  et a indépendantes, nous obtenons une approximation de la densité de probabilité (DDP) de  $\hat{R}$  :

$$(19) \quad f(\hat{R} / R) = F.D. \text{erf} \left\{ \frac{C}{2B} - \frac{\hat{R} - A}{C} \right\} \exp \left\{ -\frac{\hat{R} - A}{2B} \right\}$$

erf(x) est la fonction d'erreur. D est une constante dépendant de R et de K, et F est un coefficient de normalisation.

Connaissant la DDP de  $\hat{R}$  conditionnée par la vraie valeur R, on peut calculer la probabilité de détection d'un couplage de coefficient R donné, qui sera la probabilité pour que l'estimateur  $\hat{R}$  ait une valeur supérieure à un seuil de détection :

$$(20) \quad P_D(R) = \text{Prob} \left[ \hat{R} \geq \text{seuil} / R \neq 0 \right] = \int_{\text{seuil}}^{+\infty} f(\hat{R} / R \neq 0) d\hat{R}$$

La probabilité de fausse alarme sera, lorsqu'aucun couplage n'existe ( $R=0$ ), la probabilité que l'estimateur  $\hat{R}$  ait une valeur supérieure au seuil de détection :

$$(21) \quad P_{FA} = \text{Prob} \left[ \hat{R} \geq \text{seuil} / R=0 \right] = \int_{\text{seuil}}^{+\infty} f(\hat{R} / 0) d\hat{R}$$

Avec un seuil égal à  $n/(K-1)$ , n entier, alors

$$(22) \quad P_{FA} = \text{Prob} \left[ \chi \geq 2(n+1) \right]$$

Ainsi, pour  $n=2$ ,  $P_{FA} \approx 0.05$ .

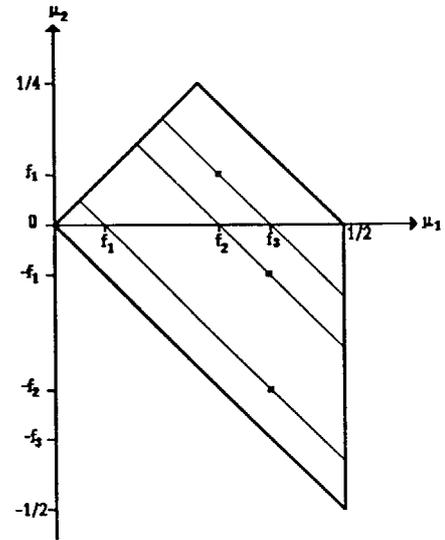


Figure 2

En pratique, lorsqu'un couplage est détecté, il existe trois solutions pour l'identité de la composante qui résulte en partie ou totalement du couplage des deux autres. La puissance quadratique de chacune des fréquences peut donc seulement être maximisée.

La Figure 2 présente la bicohérence normalisée du modèle simple sur  $\Delta_1$  plus un triangle inférieur qui apporte une information redondante. Dans ce domaine, sur une droite d'équation  $\mu_1 + \mu_2 = f$ , nous trouvons tous les coefficients de couplage liés à la fréquence f. Nous aurons une mesure de la participation de la composante de fréquence f à la partie quadratique du processus, par le nombre  $N_d(f)$  des maxima locaux de la bicohérence normalisée et corrigée sur cette droite. Ce compteur peut être normalisé par le nombre  $N_p(f)$  de points de cette droite. Nous définissons ainsi le degré de couplage, compris entre 0 et 1, par

$$(23) \quad ddc(f) = \frac{N_d(f)}{N_p(f)}$$

Cette mesure est appliquée à des enregistrements espacés dans le temps des vibrations d'engrenages afin de détecter les variations de la distribution des couplages dans la multiplicité stationnaire.

## 6 APPLICATION

**L'expérience.** Deux réducteurs à engrenages sont reliés par un axe ayant une vitesse angulaire de 1000 tr/mn ( $f_r \approx 17\text{Hz}$ ). Le premier réducteur a un rapport de dents de 40/42 et le second à un rapport de dents de 20/21. Les fréquences d'engrènement sont donc respectivement de 333Hz et 666Hz. Les signaux d'engrènement sont donc superposés. Un capteur accélérométrique est placé sur le palier du second réducteur qui fonctionne avec une pression d'une roue sur l'autre forte afin d'obtenir une usure rapide. La cassure d'une dent se produit au 11<sup>ème</sup> jour. Nous disposons d'enregistrements quotidiens de ~1s numérisés à 12KHz soit ~15000 échantillons.

**Traitement.** Un enregistrement quotidien est découpé en 29 segments de 512 points. Le périodogramme moyenné et le bipériodogramme moyenné sont calculés sur ces 29 segments.



La bicohérence normalisée puis corrigée est ensuite calculée. La figure 3 représente le degré de couplage de la première fréquence d'engrènement (333Hz) et de ses huit premiers harmoniques en fonction du jour, avec un seuil de détection de 0.05. La probabilité de fausse alarme est alors de 0.09. La Figure 4 est la moyenne de ces neuf courbes ; elle semble montrer que les variations quotidiennes des degrés de couplage des neuf harmoniques sont décorréliées. En fait toutes les composantes du signal ont été prises en compte à exception de la fréquence 0 de puissance nulle. L'information utile est polluée par un grand nombre de fausses alarmes dues à un bruit additif faible et au bruit de calcul.

Les figures 5 et 6 sont obtenues de la même façon que les Figures 3 et 4, mais en tenant compte uniquement des couplages détectés entre des composantes de puissance supérieure à -25dB du maximum de la DSP. Nous éliminons ainsi les fausses alarmes dues au bruit. Nous voyons très nettement que les variations quotidiennes des degrés de couplages des neuf composantes sont corrélées. Nous observons une augmentation du nombre de couplages jusqu'au huitième jour, puis une diminution les deux jours précédant la cassure. Ce résultat s'explique de la manière suivante : la bicohérence augmente lorsque les défauts apparaissent, puis lorsque les défauts deviennent nombreux le bruit qui leur est propre tend à être de distribution gaussienne et la bicohérence diminue [6].

## 7 CONCLUSION

Pour un modèle de processus LQ à spectre de raies, nous avons défini une fonction qui mesure à chaque fréquence le degré de participation de la composante à la partie quadratique du signal. Cette fonction, le degré de couplage, est un compteur normalisé des couplages quadratiques dans lesquels intervient la composante, détectés par la bicohérence du processus.

Le degré de couplage, s'il ne mesure pas directement la puissance quadratique à une fréquence, permet de détecter une modification de la distribution des couplages quadratiques dans la multiplicité stationnaire au cours du temps. La méthode présentée s'applique à des processus stationnaires sur la durée d'un enregistrement. Nous avons appliqué la méthode à la surveillance d'un réducteur à engrenages et les résultats que nous avons obtenus sont cohérents avec ce que nous savons déjà sur le vieillissement des engrenages.

### Références :

- [1] Brillinger D. R. : An introduction to polyspectra. *An. of Math. Stat.*, 1965, vol36.
- [2] Nikias C. L., Raghuveer M. R. : Bispectrum estimation : a digital signal processing framework. *Proc. IEEE*, 1987, vol75.
- [3] Brillinger D. R., Rosenblatt M. : Computation and interpretation of k-th order spectra. *Spectral Analysis of Time Series*. New-York : Wiley, 1967.
- [4] Durand P. : Théorie et estimation conventionnelle du bispectre. Application aux processus linéaires-quadratiques à spectre de raies. Thèse de doctorat de INPG, Grenoble, 1991.
- [5] Van Ness J. W. : Asymptotic normality of bispectral estimates. *An. of Math. Stat.*, 1966, vol37.
- [6] Sato T., Sasaki K., Nakamura D. : Real-time analysis of gear noise and its application to contactless diagnosis. *J. Acous. Soc. of Am.*, 1977, vol62, n°2.

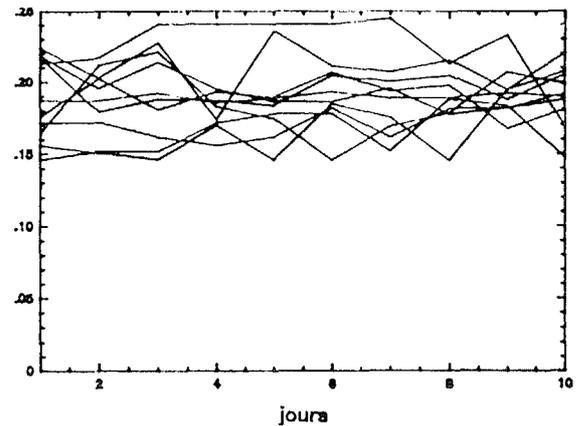


Figure 3

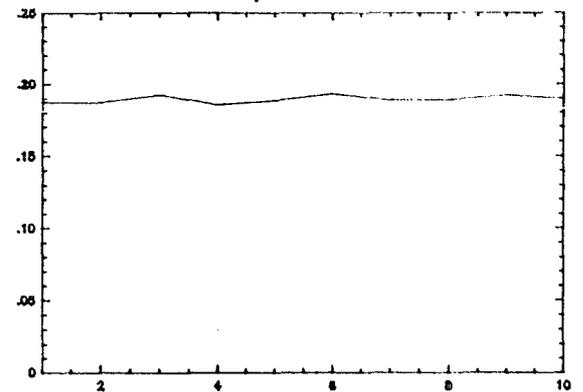


Figure 4

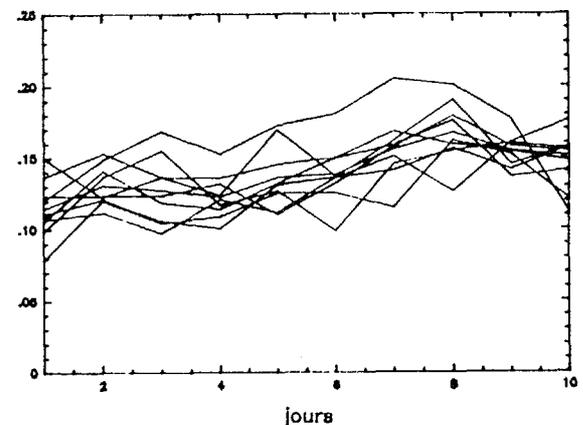


Figure 5

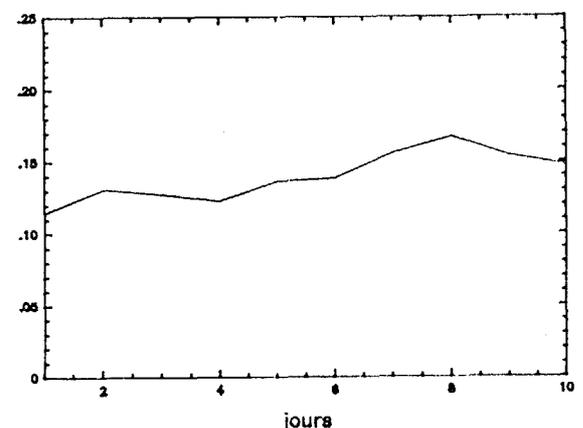


Figure 6