



Sur une Classe Générale d'Extensions Affines de la Distribution de Wigner-Ville

Patrick Flandrin

Ecole Normale Supérieure de Lyon

Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS)

46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07

et

GdR 0134 CNRS *Traitement du Signal et Images*

Résumé

Parallèlement à la classe de Cohen des représentations temps-fréquence, la classe générale des représentations temps-échelle bilinéaires énergétiques peut se paramétrer à l'aide d'une fonction arbitraire agissant comme une corrélation affine sur la distribution de Wigner-Ville. On s'intéresse ici à une sous-classe pour laquelle cette fonction arbitraire est localisée en fréquence et on étudie les conditions pour que la distribution associée satisfasse des contraintes importantes (transition vers Wigner-Ville à bande étroite, marginales, localisation, retard de groupe). Ceci permet à la fois de se rattacher à des travaux antérieurs (Bertrand, Unterberger) en en fournissant une interprétation nouvelle et de proposer une définition originale.

Abstract

In close connection with Cohen's Class of time-frequency distributions, the general class of bilinear time-scale energy distributions can be parameterized by means of an arbitrary function which acts as an affine correlation on the Wigner-Ville distribution. We consider here a specific subclass for which this arbitrary function is localized in frequency and we study the conditions which guarantee various important constraints (restriction to Wigner-Ville in the narrowband case, marginals, localization, group delay) to hold for the associated distributions. This allows both to establish connections with prior work (Bertrand, Unterberger) within a new interpretation framework and to propose an original definition.

1 Introduction

Parallèlement au développement des méthodes *temps-fréquence*, l'analyse des signaux non-stationnaires s'est récemment enrichie de méthodes *temps-échelle* liées au concept d'*ondelette* [1]. L'objet de ces méthodes est, entre autres, de suivre l'évolution temporelle des signaux à différentes échelles d'observation, ou encore de mettre en évidence des lois d'échelle qui les structurent, et ceci de manière locale. La très grande majorité des travaux relatifs à ces méthodes a été réalisée dans un cadre *linéaire* avec tous les avantages habituels que cela présente. Cependant, lorsque l'on se trouve en situation d'*analyse* seule, on constate que des descriptions énergétiques simples ont souvent leur utilité, celles-ci étant en fait généralement déduites d'une transformée en ondelettes à la manière dont un *spectrogramme* est calculé à partir d'une transformée de Fourier à court-terme, i.e. par une opération de module au carré. La théorie des représentations temps-fréquence nous ayant appris [2] que, suivant les circonstances, des distributions bilinéaires plus judicieuses peuvent se substituer efficacement au spectrogramme, on est alors en droit de se demander si des représentations temps-échelle bilinéaires plus générales que le *scalogramme* (i.e.

le module carré d'une transformée en ondelettes) ne pourraient exister. La réponse est positive et offre un champ de possibilités encore faiblement exploré auquel cet article se propose de contribuer.

La voie suivie ici se situe dans le droit fil de celle ouverte par Bertrand [3] [4] [5] [6] et repose de manière centrale sur un principe de covariance par rapport aux transformations du groupe affine. A la différence de [5] [6] où la paramétrisation temps-échelle est explicite, nous nous rattacherons ici au concept de *représentation temps-fréquence affine* destinée plus particulièrement à des signaux large-bande [4]. Nous retiendrons cependant de [5] [6] le principe de rapporter la classe générale des distributions considérées à la distribution de Wigner-Ville, de manière toute parallèle à ce qu'offre la classe de Cohen [2] en temps-fréquence.

2 Une classe générale

On sait [5][6] que la classe générale des représentations temps-échelle bilinéaires d'un signal temporel $x(t)$ peut



s'écrire

$$\Omega_x(t, a; \Pi) = \int \int W_x(u, n) \Pi\left(\frac{u-t}{a}, an\right) du dn, \quad (1)$$

où W_x est la distribution de Wigner-Ville, a le paramètre d'échelle et Π une fonction de paramétrisation arbitraire : elle possède ainsi une structure de *corrélation affine* agissant sur la distribution de Wigner-Ville. Une première famille, étudiée dans [5] et naturelle pour préciser certains liens et passages entre temps-fréquence et temps-échelle, correspond aux cas qui mettent en jeu une fonction Π suffisamment douce pour que cette corrélation prenne la forme d'un *lissage*. Cette situation n'épuise cependant pas les possibilités offertes, le champ étant *a priori* laissé libre à des fonctions de paramétrisation de structure (et d'interprétation) plus complexe(s).

Dans cette deuxième direction, on a montré dans [5][6] qu'une sous-classe particulièrement intéressante de (1) était fournie par les fonctions Π_δ dont l'expression fréquence-temps s'écrit

$$\begin{aligned} f_\delta(n, \tau) &= \int \int \Pi_\delta(t, \nu) e^{i2\pi(n\tau + \nu t)} dt d\nu \\ &\equiv G(n) e^{-i2\pi\tau F(n)}, \end{aligned}$$

où $F(n)$ et $G(n)$ sont deux fonctions arbitraires.

La classe des représentations temps-échelle associées s'écrit alors (pour les échelles positives)

$$\Omega_x(t, a; \Pi_\delta) =$$

$$\frac{1}{a} \int G(n) X\left(\frac{1}{a}[F(n) - \frac{n}{2}]\right) X^*\left(\frac{1}{a}[F(n) + \frac{n}{2}]\right) e^{-i2\pi \frac{t}{a} n} dn. \quad (2)$$

Si l'on suppose que $x(t)$ est analytique, i.e. que sa transformée de Fourier $X(\nu)$ n'existe que pour les fréquences positives, seules les échelles a positives sont autorisées et une première condition d'admissibilité pour $F(n)$ est

$$F(n) \geq \frac{|n|}{2},$$

de façon à ne mettre en jeu que les seules fréquences positives dans le calcul de (2).

La classe (2) est écrite en temps-échelle mais il est possible de la ramener formellement à une formulation temps-fréquence moyennant l'identification

$$\nu = \frac{\nu_0}{a},$$

où ν_0 est une fréquence arbitraire non-nulle. On obtient alors

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) &= \Omega_x(t, a = \frac{\nu_0}{\nu}; \Pi_\delta) = \\ &\nu \int G(\nu_0\gamma) X\left(\nu\left[\frac{F(\nu_0\gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2}\right]\right) X^*\left(\nu\left[\frac{F(\nu_0\gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2}\right]\right) e^{-i2\pi\nu t\gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Remarquons que, moyennant un changement de paramétrisation, il est possible de se ramener ainsi au cadre de travail choisi dans [4]. La formulation (3) permet alors d'envisager un certain nombre de contraintes sur F et G pour que $\tilde{\Omega}_x$ satisfasse à des propriétés données.

3 Propriétés et contraintes

Si l'on suppose que le signal analysé est à bande étroite, le domaine d'existence de sa transformée de Fourier est de faible extension autour de sa fréquence centrale. Par suite, l'intégration utile dans (3) est restreinte à un domaine tel que

$$\frac{F(\nu_0\gamma)}{\nu_0} \pm \frac{\gamma}{2} \approx 1.$$

En limitant F et G à leur développement au premier ordre autour de 0, on se convainc aisément que

$$\tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) \approx W_x(t, \nu)$$

si

$$F(0) = \nu_0; G(0) = 1; \dot{F}(0) = \dot{G}(0) = 0. \quad (4)$$

Pour toutes les distributions (3) caractérisées par (4), la distribution de Wigner-Ville apparaît donc comme limite à bande étroite. En ce sens, les distributions correspondantes de la classe (3) peuvent être considérées comme des *extensions à large bande* de la distribution de Wigner-Ville.

En étendant les résultats donnés dans [6], il est possible de caractériser différentes contraintes par des propriétés que doivent satisfaire F et G . Un certain nombre de ces contraintes, et leurs conséquences, sont résumées dans le Tableau I. C'est de la satisfaction simultanée de plusieurs d'entre elles que peuvent alors être construites différentes définitions. Celles-ci sont rassemblées dans le Tableau II, ainsi que leurs propriétés principales dans le Tableau III.

4 Définitions

4.1 Bertrand

On a montré en [5] qu'imposer la localisation en temps et la formule de Moyal conduisait (avec la normalisation associée à la marginale en fréquence) à

$$F(n) = \nu_0 \cdot \left(\frac{n}{2\nu_0}\right) \coth\left(\frac{n}{2\nu_0}\right); G(n) = \frac{\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)}$$

et donc à la distribution

$$B_x(t, \nu) = \int \lambda(\gamma) X\left(\lambda(\gamma)e^{-\frac{\gamma}{2}}\right) X^*\left(\lambda(\gamma)e^{\frac{\gamma}{2}}\right) e^{-i2\pi\nu t\gamma} d\gamma,$$

avec

$$\lambda(\gamma) = \nu \frac{(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)},$$

i.e. à la distribution de Bertrand [4]. Il est clair, d'après le Tableau I, que la satisfaction de la formule de Moyal exclut celle de la marginale en temps puisque $G(n) \neq 1$.

4.2 Unterberger

Si l'on choisit

$$F(n) = \sqrt{\nu_0^2 + \frac{n^2}{4}}; G(n) = 1,$$

il est facile de voir que l'on obtient

$$U_x^a(t, \nu) = \nu \int_0^\infty X(\nu\gamma) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi\nu t(\gamma - \frac{1}{\gamma})} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma,$$

i.e. une des distributions d'Unterberger (forme "active") [7]. Celle-ci admet l'écriture équivalente

$$U_x^a(t, \nu) = 2\nu \operatorname{Re} \int_0^1 X(\nu\gamma) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi\nu t(\gamma - \frac{1}{\gamma})} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma. \quad \text{d'où l'équation}$$

A la différence de B_x , U_x^a ne vérifie pas la formule de Moyal.

Une façon de modifier U_x^a pour lui faire satisfaire la marginalité en temps est de conserver $F(n)$ et d'imposer à $G(n)$ de satisfaire la condition

$$G(n) = \frac{1}{\nu_0} [F(n) - n\dot{F}(n)].$$

On obtient alors

$$F(n) = \sqrt{\nu_0^2 + \frac{n^2}{4}}; G(n) = \frac{\nu_0}{\sqrt{\nu_0^2 + \frac{n^2}{4}}},$$

ce qui fournit la distribution

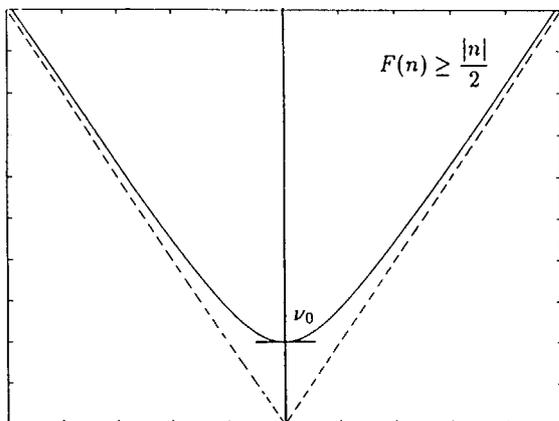
$$U_x^p(t, \nu) = \nu \int_0^\infty X(\nu\gamma) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi\nu t(\gamma - \frac{1}{\gamma})} \frac{1}{\gamma} d\gamma,$$

i.e. la distribution "passive" d'Unterberger [7]. (On trouvera aussi une discussion relative à cette distribution dans [8].) Celle-ci admet la forme équivalente

$$U_x^p(t, \nu) = 2\nu \operatorname{Re} \int_0^1 X(\nu\gamma) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi\nu t(\gamma - \frac{1}{\gamma})} \frac{1}{\gamma} d\gamma.$$

4.3 Une proposition

En se restreignant à la fonction $F(n)$ et à ses propriétés d'admissibilité les plus simples, on doit observer un comportement du type de celui de la figure ci-dessous.



Il en est bien ainsi pour les fonctions $F(n)$ des paragraphes 4.1 et 4.2, mais d'autres solutions sont possibles. Ainsi, si l'on impose la satisfaction simultanée de la marginalité et de la localisation en temps, il faut alors vérifier simultanément

$$F(n) - n\dot{F}(n) = \nu_0 G(n)$$

et

$$F^2(n) - \frac{n^2}{4} = \nu_0^2 G^2(n).$$

Avec la condition $F(n) \geq |n|/2$, on peut écrire

$$\nu_0 G(n) = F(n) - n\dot{F}(n) = \sqrt{F^2(n) - \frac{n^2}{4}},$$

$$\frac{F(n)}{n} + \sqrt{\left[\frac{F(n)}{n}\right]^2 - \frac{1}{4}} = \dot{F}(n).$$

Sous contrainte de réalité, on a nécessairement $F(n) = F(-n)$ et il suffit de trouver une solution à l'équation précédente pour $n \geq 0$. On trouve alors

$$F(n) = \nu_0 \left[1 + \left(\frac{n}{4\nu_0}\right)^2\right]$$

et

$$G(n) = 1 - \left(\frac{n}{4\nu_0}\right)^2,$$

d'où la définition finale

$$D_x(t, \nu) = \nu \int \left[1 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2\right] X\left(\nu\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^2\right) X^*\left(\nu\left(1 + \frac{\gamma}{4}\right)^2\right) e^{-i2\pi\nu t\gamma} d\gamma.$$

5 Conclusion

L'ensemble des représentations bilinéaires temps-échelle fournit une vaste classe, simplement paramétrable, et dans laquelle il est loisible de puiser pour trouver des alternatives au scalogramme (i.e. au module carré de la transformée en ondelettes). Il est clair que ces distributions trouvent *a priori* un intérêt particulier dans l'analyse de signaux possédant des lois d'échelle bien définies (cas des processus auto-similaires). Ainsi, on vérifie aisément que si un signal $x(t)$ est tel que

$$x(t_0 + \tau) - x(t_0) \sim \tau^{h(t_0)}, \tau \rightarrow 0,$$

on a, sans restriction sur Π ,

$$\Omega_x(t_0, a; \Pi) \sim a^{2h(t_0)+1}, a \rightarrow 0,$$

ce qui généralise la situation relative à la transformée en ondelettes [9], et donc au scalogramme. Dans ce contexte, les (éventuelles) propriétés supplémentaires de localisation temporelle de distributions plus générales les destinent tout particulièrement à la caractérisation de signaux pour lesquels les lois d'échelle sont susceptibles d'évoluer au cours du temps (auto-similarité locale) [10].

Références

- [1] J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian (eds.), *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase-Space*, Springer Verlag, New-York, 1989.



- [2] L. Cohen. "Time-Frequency Distribution - A Review", *Proc. IEEE*, Vol. 77, No. 7, pp. 941-981, 1989.
- [3] J. Bertrand, P. Bertrand, "Représentation temps-fréquence des signaux", *C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 1, Série I, pp. 635-638, 1984.
- [4] J. Bertrand, P. Bertrand, "Time-Frequency Representations of Broad-Band Signals", *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-88*, New York (NY), pp. 2196-2199, 1988. (aussi dans [1], pp. 164-171.)
- [5] P. Flandrin, O. Rioul, "Affine Smoothing of the Wigner-Ville Distribution", *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-90*, Albuquerque (NM), pp. 2455-2458, 1990.
- [6] O. Rioul, P. Flandrin, "Time-Scale Energy Distributions - A General Class Extending Wavelet Transforms", *IEEE Trans. on Signal Proc.*, à paraître.
- [7] A. Unterberger, "The Calculus of Pseudo-Differential Operators of Fuchs Type", *Comm. in Part. Diff. Eq.*, Vol. 9, pp. 1179-1236, 1984.
- [8] A. Grossmann, B. Escudé, "Une représentation bilinéaire en temps et échelle des signaux d'énergie finie", *13ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Juan-les-Pins, 1991.
- [9] A. Arnéodo, G. Grasseau, M. Holschneider, "Wavelet Transform Analysis of Invariant Measures of Some Dynamical Systems", in [1], pp. 182-196.
- [10] P. Flandrin, P. Gonçalves, *en préparation*.

| <i>propriétés</i> | | <i>contraintes</i> |
|------------------------|--|---|
| réalité | $\tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) \in \mathbf{R}$ | $F(n) = F(-n)$ $G(n) = G(-n)$ |
| énergie | $\int \int \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) dt d\nu = E_x$ | $F(0) = \nu_0 G(0)$ |
| marginale en fréquence | $\int \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) dt = X(\nu) ^2$ | $F(0) = \nu_0; G(0) = 1$ |
| marginale en temps | $\int \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) d\nu = x(t) ^2$ | $F(n) - nF(n) = \nu_0 G(n)$ |
| formule de Moyal | $\int \int \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) \tilde{\Omega}_y^*(t, \nu; \Pi_\delta) dt d\nu = \int x(t)y^*(t)dt ^2$ | $F(n) - nF(n) = \nu_0 G^2(n)$ |
| localisation en temps | $X(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{-i2\pi\nu t_0} U(\nu) \Rightarrow \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) = \frac{1}{\nu} \delta(t - t_0)$ | $F^2(n) - (\frac{n}{2})^2 = \nu_0^2 G^2(n)$ |
| retard de groupe | $\int t \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) dt / \int \tilde{\Omega}_x(t, \nu; \Pi_\delta) dt = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\nu} \arg X(\nu)$ | $F(0) = \nu_0; G(0) = 1$ $\dot{F}(0) = \dot{G}(0) = 0$ |

Tableau I

| $F(n)$ | $G(n)$ | <i>distributions</i> | <i>réf.</i> |
|--|--|--|-------------|
| $\nu_0 \left(\frac{n}{2\nu_0}\right) \coth\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$ | $\frac{\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)}$ | $B_x(t, \nu) = \nu \int \frac{\gamma}{\sinh \frac{\gamma}{2}} X\left(\nu \frac{\gamma e^{-\frac{\gamma}{2}}}{\sinh \frac{\gamma}{2}}\right) X^*\left(\nu \frac{\gamma e^{\frac{\gamma}{2}}}{\sinh \frac{\gamma}{2}}\right) e^{-i2\pi\nu t \gamma} d\gamma$ | [3] |
| $\sqrt{\nu_0^2 + \frac{n^2}{4}}$ | 1 | $U_x^a(t, \nu) = \nu \int_0^{+\infty} X(\nu\gamma) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi\nu t(\gamma - \frac{1}{\gamma})} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma$ | [7] |
| $\sqrt{\nu_0^2 + \frac{n^2}{4}}$ | $\frac{\nu_0}{\sqrt{\nu_0^2 + \frac{n^2}{4}}}$ | $U_x^p(t, \nu) = \nu \int_0^{+\infty} X(\nu\gamma) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi\nu t(\gamma - \frac{1}{\gamma})} \frac{d\gamma}{\gamma}$ | [7] |
| $\nu_0 \left[1 + \left(\frac{n}{4\nu_0}\right)^2\right]$ | $1 - \left(\frac{n}{4\nu_0}\right)^2$ | $D_x(t, \nu) = \nu \int \left[1 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2\right] X\left(\nu \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^2\right) X^*\left(\nu \left(1 + \frac{\gamma}{4}\right)^2\right) e^{-i2\pi\nu t \gamma} d\gamma$ | |

Tableau II

| <i>distributions</i> | <i>propriétés</i> | | | | | | |
|----------------------|-------------------|----------------|--------------------|--------------------|--------------|-------------------|-------------------|
| | <i>réalité</i> | <i>énergie</i> | <i>marg./fréq.</i> | <i>marg./temps</i> | <i>Moyal</i> | <i>loc./temps</i> | <i>retard gr.</i> |
| $B_x(t, \nu)$ | oui | oui | oui | non | oui | oui | oui |
| $U_x^a(t, \nu)$ | oui | oui | oui | non | non | oui | oui |
| $U_x^p(t, \nu)$ | oui | oui | oui | oui | non | non | oui |
| $D_x(t, \nu)$ | oui | oui | oui | oui | non | oui | oui |

Tableau III