

IDENTIFICATION DES SIGNAUX AR NON-GAUSSIENS NONSTATIONNAIRES VIA LES CUMULANTS.

M. BAKRIM*, D.ABOUTAJDINE*, M. NAJIM**
et M. SALHI*

*LEESA Faculté des sciences, BP 1014, Rabat, Maroc.

**ENSERB 351 Cours de la libération 33405 Talence.

Dans cet article, nous présentons une nouvelle procédure d'estimation globale des paramètres AR variables de type évolutif basée sur les cumulants. Pour évaluer ses performances, nous la testons sur un signal AR synthétique non-Gaussien dont les paramètres varient par saut en l'absence et en présence d'un bruit blanc Gaussien. En présence de bruit, la méthode que nous proposons, en utilisant un critère approprié, donne de meilleurs résultats pour la poursuite de paramètres que la méthode classique d'autocorrélation au prix d'une grande complexité de calcul.

In this paper, we present a new cumulant-based evolutive-type method for time-varying AR parameter estimation. The evaluation of this technique is performed through simulation on synthetic AR non-Gaussian signal, which parameters change abruptly, in free-noise case and when data are contaminated by an additive, zero-mean, Gaussian white noise. We compare this approach to the autocorrelation one. The obtained results show, when using an appropriate criterion, the superiority of cumulant-based evolutive method in noisy environment over its autocorrelation-based counterpart at expense of a great computational complexity.

INTRODUCTION

L'hypothèse de la stationnarité utilisée pour l'identification des processus paramétriques est souvent adéquate, mais elle reste non satisfaisante pour tenir compte du caractère nonstationnaire des signaux réels. L'analyse de cette classe de signaux se fait par deux voies principales: 1) les algorithmes adaptatifs standards tels que LMS ou les moindres carrés pondérés (à fenêtre glissante ou à facteur d'oubli); ces méthodes permettent, sous l'hypothèse de la quasi-stationnarité, une poursuite satisfaisante. Mais il est difficile d'assurer le compromis inhérent à quelque chose précision-poursuite. 2) Les méthodes évolutives qui se basent sur la représentation des paramètres variables par des modèles déterministes ou stochastiques. Ces diverses techniques exploitent presque exclusivement les statistiques du second ordre du signal observé à cause de leur relative simplicité mathématique. Cependant, ces outils statistiques ne tiennent compte ni de l'aspect non-Gaussien, ni de l'information sur la phase des processus traités. En outre, ils sont très sensibles aux effets des bruits additifs. Pour résoudre ces problèmes, dans un environnement non-Gaussien, les statistiques d'ordre supérieur, connues par les

cumulants dans le domaine temporel et par polyspectres dans le domaine fréquentiel, ont attiré récemment une attention considérable dans diverses disciplines du traitement du signal et de la théorie des systèmes [8], [9].

Dans la littérature, les techniques traitant les processus AR causaux, non-Gaussiens et nonstationnaires au moyen des cumulants sont encore peu nombreux, on peut néanmoins citer la version en treillis de l'algorithme ORIV basée sur les cumulants "1-D slice" d'ordre $m > 2$, qui a été développée par Swami et Mendel [12]. Par ailleurs, l'application des méthodes stationnaires, qui sont en général de nature globale pour les modèles AR, sur une fenêtre glissante introduit une grande variance sur l'estimation des cumulants sur une courte fenêtre. Pour remédier à ces problèmes, on propose d'étendre l'approche par les cumulants aux méthodes évolutives [1]-[7] en se basant sur les résultats de Swami, Giannakis et Mendel [11] relatifs aux processus ARMA "multicanaux stationnaires". Nous présenterons ensuite des résultats de simulations numériques qui permettent d'évaluer les performances de cette approche vis-à-vis de sa contrepartie basée sur l'autocorrélation. Nous nous renvoyons aux références [8], [9] pour les détails



concernant la définition et les propriétés des cumulants.

1. METHODE EVOLUTIVE

Soit un signal $y(k)$ non-Gaussien et nonstationnaire représenté par un modèle autorégressif (AR) d'ordre p suivant:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p a_i(k).y(k-i) + x(k) \quad (1-1)$$

$$\text{et } z(k) = y(k) + n(k) \quad (1-2)$$

où $x(k)$ est une excitation non-Gaussienne supposée stationnaire, indépendante et identiquement distribuée (i.i.d), de moyenne nulle, de variance σ_x^2 finie et ayant au moins un cumulant d'ordre $m > 2$ ($\gamma_{m,x}$) non nul; $n(k)$ est un bruit additif blanc ou corrélé de type Gaussien, indépendant de $y(k)$.

Les paramètres AR peuvent varier lentement, rapidement, ou par saut. L'hypothèse de base des méthodes évolutives consiste alors à approcher leur trajectoire par le développement suivant:

$$a_i(k) = \sum_{j=0}^d b_{i,j}.f_j(k) \quad (1-3)$$

où $b_{i,j}$, ($i = 1, \dots, p$ et $j = 0, \dots, d$), sont des coefficients constants à estimer, $f_j(k)$, ($j = 0, \dots, d$), sont des fonctions du temps connues a priori, et d étant le degré de la base de fonctions.

Cette représentation fournit un modèle lissé pour l'évolution des paramètres. Dans la littérature, les $a_i(k)$ sont généralement exprimés dans l'une des quatre bases suivantes: Puissances du temps [5], Polynômes de Legendre [1], [6], [7], Séries de Fourier [4], [5], et Fonctions sphéroidales aplaties à temps discret [10].

Pour le choix des fonctions $f_j(t)$, on se base soit sur une connaissance a priori des propriétés du signal traité, soit par sélection d'une représentation parmi celles précitées, au moyen d'un critère de type Akaike ou l'écart quadratique moyen [4]. Grenier et Aboutajdine [4] ont fait une étude comparative des trois dernières bases entre elles, et avec des méthodes de représentation temps-fréquence paramétriques et nonparamétriques de signaux nonstationnaires.

Le modèle (1-1) se réécrit alors:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^d b_{i,j}.f_j(k).y(k-i) + x(k) \quad (1-4)$$

pour des raisons de commodité pour l'estimation, on utilise la forme synchrone suivante:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^d b_{i,j}.f_j(k-i).y(k-i) + x(k) \quad (1-5)$$

qui peut s'écrire sous la forme:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p \theta_i.Y(k-i) + x(k) \quad (1-6)$$

où $\theta_i = [b_{i,0}, \dots, b_{i,d}]^T$, vecteur d'ordre $(d+1)$, et $Y(k-i) = [f_0(k-i).y(k-i), \dots, f_d(k-i).y(k-i)]^T$, vecteur projection de $y(k-i)$ sur la base de fonctions $f_j(k-i)$.

En supposant alors $f_0(k) = 1$, le signal traité $y(k)$ peut être considéré comme la première composante d'un processus vectoriel $Y(k)$ régit par le modèle AR(p) suivant:

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^p A(i).Y(k-i) + X(k) \quad (1-7)$$

où $A(i)$ est une matrice carrée d'ordre $(d+1)$, dont la première ligne est composée par le vecteur θ_i , et $X(k)$ est un processus vectoriel d'ordre $(d+1)$, dont le premier élément correspond à l'excitation non-Gaussienne $x(k)$.

Pour ce signal vectoriel non-Gaussien $Y(k)$, Swami, Giannakis et Mendel [11] ont montré que la séquence des cumulants d'ordre $m \geq 2$ obéit à une équation de type Yule-Walker de la forme suivante:

$$\sum_{i=0}^p A(i).\bar{C}_{m,Y}(\tau_1, \dots, \tau_{m-2}, \tau-i) = 0. \quad (\tau > 0) \quad (1-8)$$

où $\bar{C}_{m,Y}(\cdot)$ est une matrice rectangulaire d'ordre $(d+1) \times (d+1)^{m-1}$, et $\tau_1, \dots, \tau_{m-2}$ sont des entiers arbitraires.

Pour $m = 2$, ce qui correspond à la méthode d'autocorrélation, l'équation (1-8) devient:

$$\sum_{i=1}^p A(i).\bar{C}_{2,Y}(\tau-i) = -\bar{C}_{2,Y}(\tau) \quad (\tau > 0) \quad (1-9)$$

où $\bar{C}_{2,Y}(\cdot)$ est une matrice carrée d'ordre $(d+1)$.

De (1-9), nous pouvons donc tirer l'équation de Yule-Walker régissant le processus scalaire $y(k)$:

$$\sum_{i=1}^p E \left[\begin{array}{c} y_1(k).y_1(k+\tau-i) \dots y_1(k).y_{d+1}(k+\tau-i) \\ \vdots \\ y_{d+1}(k).y_1(k+\tau-i) \dots y_{d+1}(k).y_{d+1}(k+\tau-i) \end{array} \right] .\theta_i = - E \left[\begin{array}{c} y_1(k).y_1(k+\tau) \\ \vdots \\ y_{d+1}(k).y_1(k+\tau) \end{array} \right] \quad (1-10)$$

où $y_j(k)$ est la jème composante du vecteur $Y(k)$, et $E(\cdot)$ est l'espérance mathématique.

En concaténant (1-10) pour $n = 1, \dots, p$, on obtient une équation matricielle semblable à celle obtenue par

Grenier [3], où le vecteur $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$ des paramètres désirés peut être retrouvé par application d'une méthode standard d'inversion de matrices. Mais en présence d'un bruit additif, il apparaît un biais sur les paramètres du prédicteur. Pour réduire ce biais dans le cas des signaux Gaussiens, Barlaud et al. [2], et Zerubia et al. [13] ont proposé des méthodes de correction basées sur l'estimation de la variance du bruit additif supposé blanc Gaussien en

utilisant les paramètres biaisés. En fait cela n'est pas nécessaire lorsqu'on utilise les cumulants dans le cas non-Gaussien même si le bruit est corrélé.

Pour $m = 3$, ce qui correspond aux cumulants d'ordre 3, l'équation (1-8) se réécrit:

$$\sum_{i=1}^p A(i) \cdot \bar{C}_{3,Y}(\tau_1, \tau - i) = -\bar{C}_{3,Y}(\tau_1, \tau) \quad (\tau > 0) \quad (1-11)$$

où $\bar{C}_{3,Y}(\cdot)$ est une matrice d'ordre $(d+1) \times (d+1)^2$, et τ_1 est un entier arbitraire $\in \{-p, \dots, 0\}$.

En effectuant certains arrangements élémentaires, l'équation de type Yule-Walker du processus scalaire $y(k)$ basée sur les cumulants d'ordre 3 devient:

$$\sum_{i=1}^p E \left[\begin{array}{c} y_j(k) \cdot y_1(k+\tau_1) \cdot y_1(k+\tau-i) \dots y_j(k) \cdot y_1(k+\tau_1) \cdot y_{d+1}(k+\tau-i) \\ \vdots \\ y_j(k) \cdot y_{d+1}(k+\tau_1) \cdot y_1(k+\tau-i) \dots y_j(k) \cdot y_{d+1}(k+\tau_1) \cdot y_{d+1}(k+\tau-i) \end{array} \right] \cdot \theta_i = -E \left[\begin{array}{c} y_j(k) \cdot y_1(k+\tau_1) \cdot y_1(k+\tau) \\ \vdots \\ y_j(k) \cdot y_{d+1}(k+\tau_1) \cdot y_1(k+\tau) \end{array} \right] \quad (1-12)$$

où j est un entier arbitraire $\in \{1, \dots, d+1\}$

La concaténation de (1-12) pour $n = 1, \dots, p+M$ ($M \geq 0$) donne un système d'équations linéaires dont la résolution fournira les paramètres cherchés. Notons que les techniques SVD (Singular Value Decomposition) ou TLS (Total Least Squares) peuvent être appliquées pour améliorer la qualité des estimés. Cette solution reste théoriquement insensible aux effets d'un bruit additif de nature Gaussienne.

Cette méthode, explicitée pour les cumulants d'ordre 3, peut être étendue d'une manière directe aux cumulants d'ordre 4 pour traiter les signaux non-Gaussiens à distribution symétrique, rencontrés par exemple en communication numérique et en sismique.

Les valeurs théoriques des séquences d'autocorrélation et des cumulants sont en réalité inconnues alors on leur substitue en pratique leurs estimations biaisées.

2. RESULTATS EXPERIMENTAUX

La méthode proposée a été testée sur un signal synthétique non-Gaussien de type AR d'ordre 2 commutant à des instants données sur un autre signal AR de même ordre en l'absence et en présence d'un bruit additif blanc de type Gaussien. En adoptant un critère basé sur les spectres instantanés de la réponse impulsionnelle du système AR réel et son estimé, inspiré du critère proposé par Grenier et Aboutajdine [4]. Ce critère s'écrit:

$$d^2(\hat{S}, S) = N^{-1} \cdot \Omega^{-1} \cdot \sum_{t=1}^N \sum_{w=0}^{\Omega-1} \{10 \cdot \log[S(w,t)] - 10 \cdot \log[\hat{S}(w,t)]\}^2 \quad (2-1)$$

où $S(w,t)$ est la réponse fréquentielle instantanée d'amplitude du système AR, son expression est de la forme:

$$S(w, t) = \left| 1 + a_1(t) \cdot z^{-1} + \dots + a_p(t) \cdot z^{-p} \right|_{z=e^{-j \cdot w}}^{-2} \quad (2-2)$$

et $\hat{S}(w,t)$ est l'estimé de $S(w, t)$

Dans ce qui suit, on se contentera de représenter uniquement l'allure du premier paramètre AR réel et son estimé.

On génère $N=6000$ échantillons d'un signal nonstationnaire de type AR d'ordre 2 régi par l'équation suivante:

$$y(k) = -a_1(k) \cdot y(k-1) - a_2(k) \cdot y(k-2) + x(k) \quad (2-3)$$

et $z(k) = y(k) + n(k)$

où $x(k)$ est une excitation non-Gaussienne normalisée de moyenne nulle et dont le cumulants

d'ordre 3 ($\gamma_{3,x}$) ≈ 1.6 , $n(k)$ est un bruit additif blanc

Gaussien de variance σ_n^2 tel que le rapport signal à bruit

SNR=12 dB (on définit le SNR par

$$10 \cdot \log \left[\frac{\sum_{k=1}^N y^2(k)}{\sum_{k=1}^N n^2(k)} \right], \text{ et } a_1(k) \text{ et } a_2(k) \text{ sont}$$

les paramètres réels évoluant par saut de la manière suivante:

$$a_1(k) = -1.5 \text{ et } a_2(k) = 0.8$$

pour $k \in [1, M] \cup [2.M+1, 3.M]$

et $a_1(k) = -0.9$ et $a_2(k) = 0.2$ pour $k \in [M+1, 2.M] \cup [3.M+1, 4.M]$, avec $M=1500$.

Dans cette méthode, on prendra $j=1$ et $\tau_1=0$ (voir équation (1-12)), et on utilisera pour fonction de base: la seconde forme de la base de Fourier [4] de dimension $d = 5$, c'est-à-dire $f_0(k)=1$, $f_1(k)=\cos(\pi \cdot k/N)$, $f_2(k)=\sin(\pi \cdot k/N)$, $f_3(k)=\cos(2 \cdot \pi \cdot k/N)$, $f_4(k)=\sin(2 \cdot \pi \cdot k/N)$, et $f_5(k)=\cos(3 \cdot \pi \cdot k/N)$.

Les variations du paramètre réel $a_1(k)$ ainsi que ses

estimés $\hat{a}_1(k)$ par l'autocorrélation et les cumulants sont illustrés sur les figures 1 et 2 respectivement en l'absence et en présence du bruit $n(k)$. Le calcul du critère (2-1) pour les différents cas est résumé dans le tableau suivant:

SNR en dB	Valeur de d^2	
	Autocorrélation	Cumulant
∞	1.2428	1.8162
12	3.7385	1.8785

On peut donc conclure qu'en l'absence du bruit l'autocorrélation assure une meilleure poursuite que les cumulants car l'estimation de ces derniers met en jeu un nombre d'opérations plus élevé (erreurs numériques), par contre en présence de bruit, c'est l'inverse qui se passe à cause de la sensibilité des statistiques du second ordre aux bruits additifs.

3. CONCLUSION



Dans cet article, on a développé une méthode évolutive basée sur les cumulants, et on a justifié par des simulations sur un signal synthétique non-Gaussien que l'approche proposée semble être une procédure adéquate pour le traitement global des signaux AR non-Gaussiens nonstationnaires perturbés par des bruits Gaussiens, mais au prix d'une grande complexité de calcul comparée à sa contrepartie utilisant la séquence d'autocorrélation.

REFERENCES

- [1] D. Aboutajdine and M. Najim, "Time-Varying Linear Prediction- New Results," Moroccan/ Spanish/ Portuguese Workshop on Signal Processing and its applications, Marrakech, Maroc, Sept. 1984.
- [2] M. Barlaud, G. Alengrin, J. Menez, Y. Grenier et D. Aboutajdine, "Méthodes d'Identification Paramétriques pour des Signaux Nonstationnaires Perturbés par un Bruit Blanc," Onzième Colloque GRETSI, pp. 749-752, Nice, Juin 1987.
- [3] Y. Grenier, "Time-Dependent ARMA Modeling of Nonstationary Signals," IEEE Trans. ASSP, Vol. 31, pp. 899-911, August 1983.
- [4] Y. Grenier and D. Aboutajdine, "Comparaison des représentations temps-fréquence de signaux présentant des discontinuités spectrales," Ann. Télécomm., Tome 38, no 11-12, Nov.-Déc. 1983.
- [5] M. G. Hall, A. V. Oppenheim, and A. S. Willsky, "Time-Varying Parametric Modeling of Speech," Signal Processing, Vol.5, No.3, pp.267-285, May 1983.
- [6] M. J. Hinich and R. Roll, "Measuring Nonstationary in the Parameters of a Linear Model, with Applications to Asset Return," Rep. AD.A. 042137, 1977
- [7] F. Kozin, "Estimation and Modeling of nonstationary Time-Series," In Proc. Symp. Appl. Comput., Meth., Eng., Vol.1, Los Angeles, CA, pp.603-612, 1977.
- [8] J. M. Mendel, "Use of Higher-Order Statistics in Signal Processing and System theory: An Update," In Proc. SPIE Conf. on Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing III, San Diego, CA, pp. 126-144, 1988.
- [9] C. L. Nikias and M. R. Raghuveer, "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework," Proc. IEEE, Vol.75, pp. 869-891, July 1987.
- [10] D. Slepian, "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty-V: The Discrete Case," Bell. Syst. Tech. J., Vol.57, no.5, pp.1371-1430, 1978.
- [11] A. Swami, G. B. Giannakis and J. M. Mendel, "A Unified Approach to Modeling Multichannel ARMA Processes," In Proc. IEEE ICASSP-89, Glasgow, Scotland, U.K., pp.2182-2185, May 1989.
- [12] A. Swami and J. M. Mendel, "Adaptive System Identification Using Cumulants," In Proc. IEEE Int. Conf. ASSP, pp.2248-2251, April 1988.
- [13] J. Zerubia, M. Barlaud, J. Menez et G. Alengrin, "Amélioration de l'Estimation des Paramètres d'un Modèle Nonstationnaire: Application à des Signaux de Parole Bruitée," Onzième Colloque GRETSI, pp. 431-433, Nice, Juin 1987.

o: Paramètre Réel. +: Estim par Autocorré., x: Estim par Cumul.

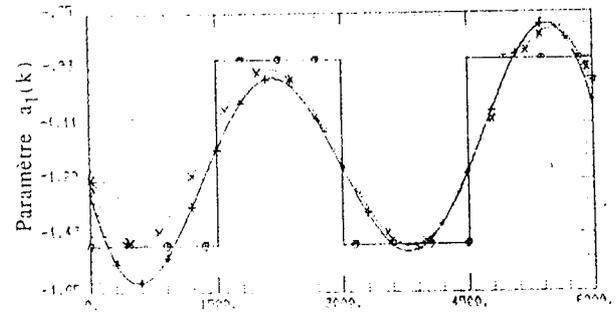


Fig. 1. Poursuite de Paramètre (Absence de Bruit)

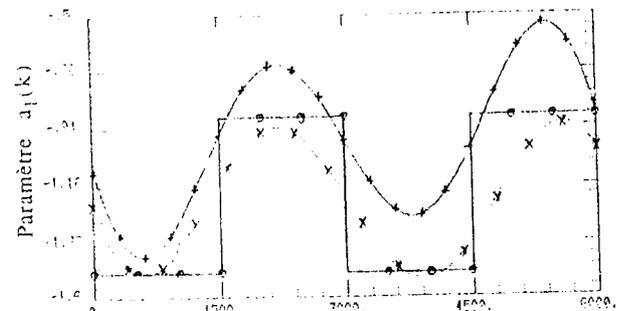


Fig. 2. Poursuite de Paramètre (Présence de Bruit)