



PAQUETS CONTINUS D'ONDELETTES ET DECOMPOSITION OPTIMALE

P. REYNAUD

B. TORRESANI

Centre de Physique Théorique, UPR 7061
CNRS - Luminy - Case 907
13288 Marseille Cedex 9, France

RÉSUMÉ

Les représentations temps-fréquence linéaires usuelles (i.e. ondelettes ou Fourier à fenêtre) sont canoniquement associées à des descriptions (ou géométries) particulières du plan temps-fréquence. Nous décrivons et illustrons par des applications numériques des exemples de nouvelles représentations linéaires temps-fréquence continues généralisant les précédentes. Ceci pose en particulier le problème de sélection de la meilleure procédure d'analyse d'un signal donné, c'est à dire de la description correspondante du plan temps-fréquence.

ABSTRACT

All usual linear time-frequency representations (such as wavelet or short-time Fourier representations) are canonically associated with peculiar descriptions (or geometries) of the time-frequency plane. We describe and illustrate by numerical applications some examples of new linear continuous time-frequency representations that generalize the previous ones. This opens the problem of selecting the best analysis procedure for a given signal, otherwise stated the best geometrical description of the time-frequency plane.

Différentes géométries du plan temps-fréquence

Les représentations temps-fréquence constituent des outils de base pour l'analyse d'une large classe de signaux, comme par exemple les signaux modulés en fréquence, ou les signaux présentant des singularités. En particulier, les représentations bilinéaires, comme la représentation de Wigner-Ville ou ses versions lissées ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Nous nous intéresserons ici aux représentations linéaires, du type représentation de Fourier à court terme ou représentation en ondelettes.

Nous nous restreindrons donc au formalisme général suivant: étant donné un signal $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$ (que nous supposons non-échantillonné dans un premier temps pour simplifier), on souhaite le représenter sous la forme suivante:

$$s = \int_{\Omega} T_s(b, \omega) g_{(b, \omega)} d\mu(b, \omega).$$

Ici, Ω représente le plan temps-fréquence, muni d'une mesure $d\mu$. Les fonctions $g_{(b, \omega)}$ sont des "atomes temps-fréquence", c'est à dire des fonctions bien localisées autour d'un point $(t(b, \omega), \xi(b, \omega)) \in \Omega$ (i.e. possédant de bonnes propriétés de décroissance quand l'on s'éloigne de ce point dans Ω). Les coefficients de la décomposition $T_s(b, \omega)$ forment une transformée temps-fréquence de $s(t)$, et donnent des informations sur la localisation de $s(t)$ dans Ω .

Nous nous restreindrons plus particulièrement aux cas où les coefficients de la décomposition sont obtenus comme les produits scalaires du signal contre les fonctions $g_{(b, \omega)}$ elles-mêmes:

$$T_s(b, \omega) = \langle s, g_{(b, \omega)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{g_{(b, \omega)}(t)} dt.$$

C'est le cas en particulier de l'analyse de Gabor, pour laquelle:

$$g_{(b, \omega)}^{Gabor}(t) = e^{i\omega(t-b)} g(t-b)$$

et

$$d\mu^{Gabor}(b, \omega) = db d\omega,$$

et de l'analyse par ondelettes, où (en identifiant a et $\frac{\omega_0}{\omega}$ pour une certaine constante ω_0):

$$g_{(b, \omega)}^{Ondelettes}(t) = \frac{1}{a} g\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

et

$$d\mu^{Ondelettes}(b, a) = db \frac{da}{a}.$$

Les fonctions de Gabor (ou gaborettes) $g_{(b, \omega)}^{Gabor}$ sont ainsi obtenues par translation et modulation d'une fonction de base g , supposée appartenir à $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Ce sont donc des fonctions de taille constante, et ce des deux cotés de la transformée de Fourier (les fonctions de Gabor fournissent une analyse à largeur de bande absolue constante). Elles donnent donc du signal analysé la description suivante. Les coefficients $T_s(b, \omega) = \langle s, g_{(b, \omega)}^{Gabor} \rangle$ décrivent le contenu de $s(t)$ dans une cellule élémentaire (dont la taille est donnée par la taille de $g(t)$), centrée sur le point de coordonnées (b, ω) dans Ω . De plus, à différentes valeurs de (b, ω) correspondent des cellules différentes, qui sont néanmoins de taille et de forme constantes (voir figure 1).

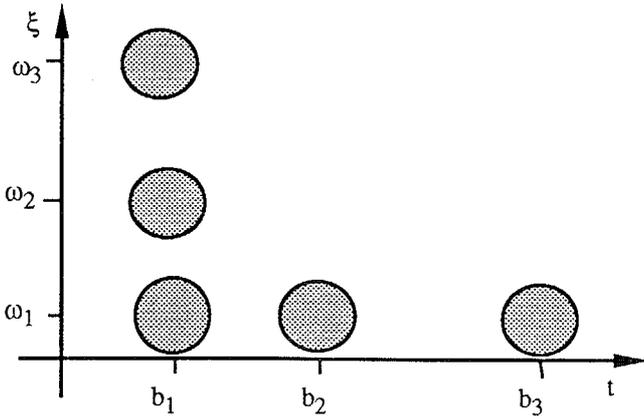


Figure 1: localisation temps-fréquence des gaborettes $g_{(b,\omega)}^{Gabor}$

En revanche, tel n'est pas le cas des ondelettes usuelles $g_{(b,\omega)}^{Ondelettes}$. Supposant par exemple comme dans [3] (pour simplifier; une autre version est décrite dans [1]) que $c_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$, on obtient ainsi une famille de fonctions engendrées par translations et dilatations de $g(t)$. Ces fonctions sont de forme constante, et de taille variable (les ondelettes fournissent une analyse à largeur de bande relative constante). Les coefficients $T_s(b, \omega) = \langle s, g_{(b,\omega)}^{Ondelettes} \rangle$ décrivent le contenu de $s(t)$ dans une cellule élémentaire, centrée sur le point de coordonnées $(b, \frac{\omega_0}{a})$ dans Ω . Ces cellules sont maintenant des cellules d'aire constante, mais de forme variable. La cellule centrée sur $(b, \frac{\omega_0}{a})$ est dilatée (resp. contractée) dans la variable ξ (resp. t) d'un facteur a (voir figure 2).

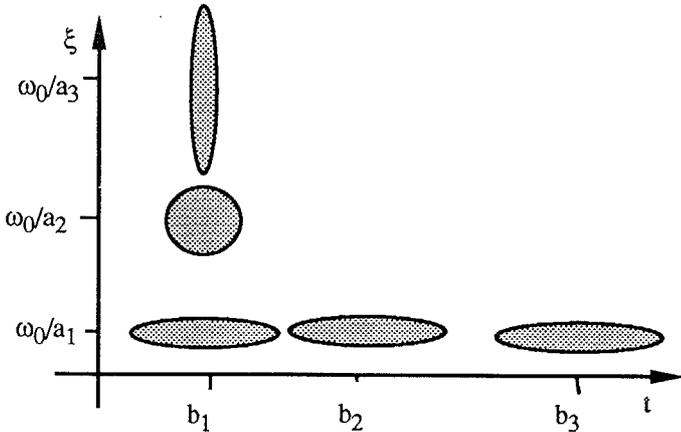


Figure 2: localisation temps-fréquence des ondelettes $g_{(b,\omega)}^{Ondelettes}$

Une discrétisation des paramètres b et ω doit tenir compte de ces différentes caractéristiques géométriques [2], et on est ainsi naturellement conduit à des pavages différents de Ω .

On peut maintenant se poser la question suivante: laquelle de ces deux décompositions est la meilleure, pour un signal donné? En d'autres termes, quel est la géométrie de Ω la mieux adaptée à un signal à analyser donné?

Le simple fait de poser ces questions montre la nécessité de disposer d'autres décompositions continues, c'est à dire d'autres descriptions du plan temps-fréquence. De telles décompositions ont été développées dans [3], et nous en donnons maintenant une description (un problème similaire avait été traité auparavant dans le cadre de l'analyse multirésolution et des bases orthonormées d'ondelettes [4]).

Les paquets continus d'ondelettes

L'idée de base de la construction qui suit est d'adapter la largeur de bande des fonctions d'analyse $g_{(b,\omega)}$ au signal analysé, pour chaque valeur de ω . Il existe une manière très simple de faire cela, en utilisant simultanément des modulations et des dilatations. En effet, partant d'une fonction $f(t)$ donnée, de largeur de bande B , et de transformée de Fourier centrée en $\xi = \omega_0$, on voit immédiatement qu'une contraction de $f(t)$ par un facteur a change B en aB et ω_0 en $a\omega_0$, alors qu'une modulation n'affecte que la valeur de ω_0 . Ainsi, une combinaison de ces deux opérations permet d'obtenir les valeurs désirées pour ces paramètres.

Considérons donc une fonction $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, et une fonction β (appelée section dans [3]). On introduit le filtre de l'analyse $\chi(t)$, défini par sa transformée de Fourier (la fonction de transfert du filtre):

$$\hat{\chi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} |\hat{\psi}(\beta(\omega)(\xi - \omega))|^2 |\beta'(\omega)(\xi - \omega) - \beta(\omega)| d\omega$$

(nos conventions pour la transformée de Fourier sont les suivantes: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-i\xi t} dt$, de sorte que la transformée de Fourier divisée par $\sqrt{2\pi}$ est une isométrie sur L^2) Nous dirons que le couple (ψ, β) est admissible si l'on peut trouver deux constantes K_1 et K_2 telles que:

$$0 < K_1 \leq \hat{\chi}(\xi) \leq K_2 < \infty$$

pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$.

Dans ces conditions, considérons les fonctions:

$$\psi_{(b,\omega)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\beta(\omega)|}} e^{i\omega t} g\left(\frac{t-b}{\beta(\omega)}\right)$$

dont la transformée de Fourier est donnée par:

$$\widehat{\psi}_{(b,\omega)}(\xi) = \sqrt{|\beta(\omega)|} e^{-i(\xi-\omega)b} \hat{\psi}(\beta(\omega)(\xi - \omega))$$

Les paquets d'ondelettes sont alors définis par:

$$g_{(b,\omega)}(\xi) = \widehat{\psi}_{(b,\omega)}(\xi) \sqrt{\frac{|\beta'(\omega)(\xi - \omega) - 1|}{\hat{\chi}(\xi)}}$$

et on a le théorème de représentation suivant: tout signal $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$ peut être décomposée comme:

$$s = \int_{\Omega} T_s(b, \omega) g_{(b,\omega)} db d\omega,$$

où

$$T_s(b, \omega) = \langle s, g_{(b,\omega)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{g_{(b,\omega)}(t)} dt$$

Ceci implique en particulier que la transformée T_s est de carré intégrale sur Ω , et que l'on a une formule de Plancherel:

$$\int_{\mathbf{R}^2} |T_s(b, \omega)|^2 db d\omega = \int_{\mathbf{R}} |s(t)|^2 dt = \|s\|^2$$

de sorte que:

$$\rho(b, \omega) db d\omega = \frac{|T_s(b, \omega)|^2}{\|s\|^2} db d\omega$$

est une mesure de probabilités (c'est à dire d'intégrale unité et de densité partout positive ou nulle). Nous serons amenés à revenir sur cette remarque un peu plus loin.

Remarque: La procédure d'analyse-synthèse décrite dans cette section a en fait été spécialement construite dans le but d'obtenir une densité de probabilités canoniquement associée à l'analyse. Il en existe de multiples variantes, comme montré dans [3].

Exemples

On peut facilement remarquer que la condition d'admissibilité imposée à la paire (β, ψ) et en fait très peu restrictive en pratique, en ce sens qu'elle n'interdit que des paires (β, ψ) que l'on songerait difficilement à utiliser. En effet, elle impose essentiellement que la section β ne présente pas un caractère trop oscillant (plus précisément ne présente pas d'accumulation d'oscillation en un point, ou à l'infini). Un critère plus précis est développé dans [3].

On peut en fait trouver une famille de sections β telles que (β, ψ) soit admissible pour toute $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Cette famille est donnée par:

$$\beta_{(\sigma, \tau)}^\alpha(\omega) = |\sigma\omega + \tau|^\alpha \quad \omega \neq -\frac{\tau}{\sigma}$$

On appelle cette famille de sections famille interpolante, pour la raison suivante. $\alpha = 0$ correspond bien évidemment à l'analyse de Fourier à court terme usuelle (on ne dilate pas les fonctions d'analyse). On montre de plus [3] que $\alpha = -1$ conduit exactement à une analyse par ondelettes. Les valeurs intermédiaires fournissent donc une famille de décompositions qui interpolent entre l'analyse par ondelettes et l'analyse de Fourier à court terme. En particulier, le cas $\alpha = -1/2$ correspond à l'analyse par paquets d'ondes, qui a prouvé son utilité dans un contexte différent.

Pour cette famille interpolante, il est facile d'obtenir des expressions explicites pour le filtre χ , ou plutôt sa transformée de Fourier. Nous nous restreindrons ici aux valeurs intermédiaires $-1 \leq \alpha \leq 0$. Dans ces conditions, en posant pour tout $\Gamma \subset \mathbf{R}$

$$\Xi_\psi(\Gamma) = \int_\Gamma |\hat{\psi}(\gamma)|^2 d\gamma$$

et

$$\gamma_c(\xi) = -\frac{\alpha}{\sigma(\alpha+1)^2}(\sigma\xi + \tau)|\sigma\xi + \tau|^\alpha,$$

on a les expressions suivantes:

$$\hat{\chi}(\xi) = 2\pi\|\psi\|^2 + 2\Xi_\psi(\cdot) - \infty, \gamma_c(\xi)(\cdot) \quad \forall \xi < -\frac{\tau}{\sigma}$$

$$\hat{\chi}(\xi) = 6\pi\|\psi\|^2 \quad \xi = -\frac{\tau}{\sigma}$$

$$\hat{\chi}(\xi) = 2\pi\|\psi\|^2 + 2\Xi_\psi(\cdot) \gamma_c(\xi), \infty(\cdot) \quad \forall \xi > -\frac{\tau}{\sigma}.$$

On obtient des expressions similaires pour les autres valeurs de α .

Résultats numériques

Nous ne décrivons ici que quelques résultats numériques effectués sur des fonctions académiques (singularités, modulations de fréquence simples), dans le but d'illustrer la méthode et de mettre en évidence la similitude avec l'analyse par ondelettes et l'analyse de Fourier à court terme, ainsi que d'en signaler les spécificités. Nous nous restreindrons à la famille interpolante de paquets d'ondelettes.

Il est néanmoins bon de remarquer que les paquets d'ondelettes ont une expression considérablement plus simple dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. En conséquence, il semble plus judicieux d'effectuer la majeure partie des calculs numériques dans le domaine spectral, en se basant sur des procédures de FFT.

Nous utiliserons la représentation suivante. $|T_s(b, \omega)|$ est représenté en niveaux de gris, dans le bas des figures l'axe horizontal est celui des translations, et l'axe vertical est celui des fréquences (croissantes de haut en bas). Le signal est représenté en haut de la figure.

Notre premier exemple est l'analyse d'une fonction carrée, avec les paramètres suivants: $\alpha = -0.5$, $\sigma = 1.0$ et $\tau = 0.0$ (analyse par paquets d'onde) et un ψ Gaussien.

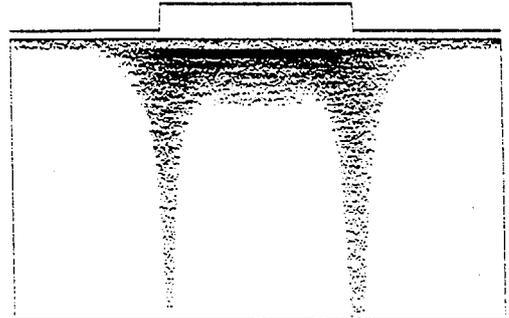


Figure 3: analyse par paquets d'onde d'une fonction carrée

On y retrouve (voir figure 3) les caractéristiques de l'analyse par ondelettes, à savoir l'excellente localisation des singularités.

La figure 4 représente $|T_s(b, \omega)|$ pour un signal $s(t) = \cos(\nu t + \gamma t^2/2)$, $\nu = 10.0$, $\gamma = 1.0$ par des paquets continus d'ondelettes avec une fonction ψ Gaussienne, $\alpha = -0.5$, $\sigma = 1.0$ et $\tau = 0.0$, ce qui correspond à l'analyse par paquets d'onde.

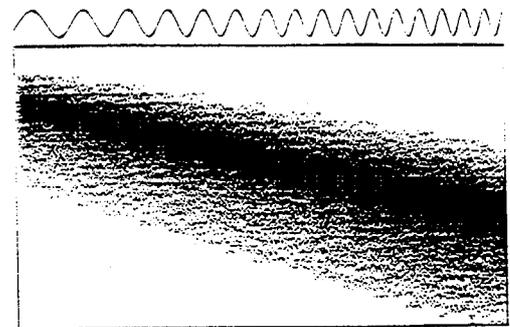


Figure 4: analyse par paquets d'ondes d'un chirp linéaire



On y retrouve les caractéristiques générales de l'analyse temps-fréquence, à savoir la localisation de l'énergie au voisinage de la courbe de fréquence instantanée.

Enfin, il est nécessaire de faire un commentaire sur la localisation des fonctions $g_{(b,\omega)}$ dans Ω . La première remarque est que $\hat{g}_{(b,\omega)}$ n'est pas différentiable en $\xi = \nu + \frac{\beta'(\omega)}{\beta(\omega)}$, de sorte que $g_{(b,\omega)}(t)$ décroît génériquement en $\mathcal{O}(t^{-2})$ à l'infini. La seconde remarque est que dans le cas $\alpha = -1.0$ (i.e. le cas des ondelettes), $g_{(b,\omega)}(t) = \phi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ pour une certaine fonction ϕ [3]. De plus, $\hat{\phi}(\xi)$ se comporte comme $\sqrt{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)$ au voisinage de $\xi = 0$. Donc, pour que les ondelettes $\phi_{(b,a)}$ puissent être considérées comme un bon banc de filtres passe-bande, il importe de renforcer l'annulation de $\hat{\phi}(\xi)$ en $\xi = 0$, en partant d'un $\hat{\psi}$ possédant lui aussi un zéro d'un certain ordre en 0 (ce faisant, on améliore aussi la localisation des ondelettes dans le domaine temporel, car on évite la discontinuité de $\hat{\phi}(\xi)$ en 0). Si tel n'est pas le cas, la localisation de l'énergie dans Ω est de piètre qualité, ce qui est évident sur la figure 5: $s(t) = \cos(\nu t + \gamma t^2/2)$, $\nu = 10.0$, $\gamma = 1.0$ analysé par un ψ Gaussien, avec $\alpha = -1.0$, $\sigma = 1.0$ et $\tau = 0.0$.

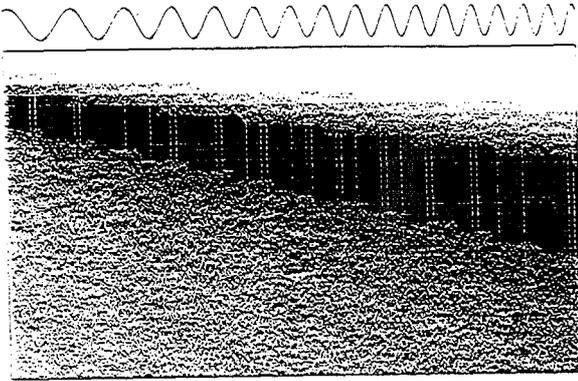


Figure 5: analyse par ondelettes d'un chirp linéaire

Vers une notion de 'meilleure analyse'

Nous avons donc maintenant à notre disposition une large famille de décompositions temps-fréquence (ne serait-ce qu'en nous restreignant aux paquets d'ondelettes interpolants). Se pose alors le problème du choix de la meilleure analyse possible d'un signal donné (si une telle notion a un sens). Il est alors nécessaire de se doter d'un critère de sélection, et il existe de nombreux choix différents possibles. En fait, et ceci est très naturel, le critère doit dépendre du problème posé. Par exemple, si l'objectif visé est la compression des données (bien que les représentations continues ne soient pas a priori les mieux adaptées à ce problème), l'on peut se fixer le critère suivant: l'analyse optimale est celle pour laquelle le nombre de coefficients $T_s(b,\omega)$ dépassant un certain seuil est minimal. On peut aussi choisir de minimiser une fonctionnelle donnée de la transformée T_s . A titre d'exemple, considérons le critère suivant (voir [3],[5]): la décomposition optimale (au sens de la localisation de l'énergie dans Ω) est celle pour laquelle la fonction $|T_s|$ est la plus concentrée, c'est à dire la mieux localisée dans Ω . Utilisant le fait que la fonction $\rho(b,\omega)$ précédemment introduite est une densité de probabilités, on lui associe canoniquement [6] une "mesure de concentration", à savoir l'entropie de la représentation T_s :

$$S_s[\beta] = - \int_{\Omega} \rho(b,\omega) \ln_2[\rho(b,\omega)] dbd\omega .$$

Les propriétés mathématiques d'une telle fonctionnelle sont bien connues [6], ainsi que sa signification physique [7]. Dans ce cas, le problème de sélection de l'analyse optimale se ramène au problème de la minimisation de S_s .

Conclusions

Nous avons décrit dans cet article une nouvelle famille de représentations linéaires continues temps-fréquence, généralisant l'analyse par ondelettes et l'analyse de Fourier à court terme. Cette nouvelle procédure semble ouvrir de nouvelles perspectives, dans la mesure où elle semble être en mesure de permettre la sélection de l'analyse la mieux adaptée à un signal donné.

Il convient néanmoins de signaler un désavantage important de cette procédure, au moins dans sa version actuelle. Une modification de la section β , aussi mineure soit-elle, contraint à recalculer intégralement les nouveaux coefficients $T_s(b,\omega)$, sans pouvoir les déduire simplement des précédents. Ceci, ajouté à l'absence d'algorithme rapide pour le calcul des coefficients, complique singulièrement l'implémentation numérique d'une procédure de recherche du meilleur β pour un signal donné (contrairement à ce qui se passe dans les algorithmes décrits dans [5]). Un tel désagrément semble pouvoir être évité avec les nouvelles décompositions continues proposées dans [8].

Références

- [1]: A. Grossmann, J. Morlet, *Decomposition of Hardy functions into wavelets of constant shape*, SIAM. J. Math. Anal. 15 (1984) p.783.
- [2]: I. Daubechies, *The wavelet transform, time-frequency analysis, and signal analysis*, IEEE Trans. Inf. Th. 36 (1990) p.961.
- [3]: B. Torrèsani, *Time-frequency representations: wavelet packets and optimal decompositions*, à paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique (1991).
- [4]: R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, M.V. Wickerhauser, *Signal processing and compression with wavelet packets*, YALE University preprint (1990).
- [5]: V. Wickerhauser, *INRIA lectures on wavelet packets algorithms*, YALE University preprint (1991).
- [6]: E. Lieb, *Some convexity and subadditivity properties of entropy*, Bull. A.M.S. 81 (1975) p.1.
- [7]: C. Shannon, W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, the University of Illinois Press (1984).
- [8]: M. Duval-Destin, M.A. Muschietti, B. Torrèsani, *From continuous wavelets to wavelet packets*, en préparation.