



## ANALYSES TEMPS-FREQUENCES DE LA PROPAGATION

## D'ONDES DE SURFACE NON LINEAIRES

B. CHAPRON et A. RAMAMONJIARISOA

Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence  
12, Avenue du Général Leclerc - 13003 Marseille, France

## RESUME

Les traitements des données expérimentales relatives aux mouvements des ondes à la surface de la mer s'appuient le plus souvent sur l'analyse spectrale classique, à base de transformation de Fourier. Il est bien connu que cette technique découple systématiquement les deux espaces duaux distincts, à savoir, l'espace temporel d'une part, et l'espace fréquentiel d'autre part. Ces traitements s'avèrent ainsi insuffisants pour analyser les mécanismes d'instabilités dont les trains d'ondes sont le siège à cause d'effets non linéaires. Un des aspects fondamentaux de ces instabilités est la présence, au cours de la propagation, de modulations simultanées des amplitudes et des phases (ou de la fréquence).

L'Analyse Spectrale Différentielle (ASD), l'Analyse Spectrale Paramétrique Evolutive (ASPE) et la "Transformation en ondelettes" ont été mises en oeuvre dans le cadre d'une étude approfondie des mécanismes d'instabilités en question.

Les potentialités propres à chacune des méthodes ci-dessus mais également leur complémentarité sont mises en évidence. En disposant des informations précises sur les amplitudes et les fréquences (ou phases) instantanées, on a abouti à une meilleure identification des processus physiques qui influencent le plus l'évolution des trains d'ondes. Des résultats nouveaux importants ont été obtenus sur les effets relatifs de la dispersion, de la non linéarité, de la dissipation et éventuellement de l'apport d'énergie par le vent.

## SUMMARY

Most of the published experimental work on water surface waves evolution used the classical Fourier transform at the basis of data processing. As well known, this technique systematically separates the dual spaces, namely the time space and the frequency space. Then, such processing appear to be not fully appropriate to better understand the wave train unstabilities due to nonlinear effects. One of the fundamental feature of the unstability is the occurrence of simultaneous amplitude and phase (or frequency) modulations.

Differential Spectral Analysis (DSA), Evolutive Parametric Analysis (EPSA) and "Wavelets Transform" were extensively used during an experimental work adressed to the above cited unstability mechanisms.

The individual performances of the techniques above but also their complementarity are first specified. The accurate informations obtained about the instantaneous amplitude and frequency (or phase) make it possible to identify some of the most important physical processes during the wave trains propagation. New results are obtained on the relative effects of dispersion, non linearity and eventually energy input from the wind.

## 1. INTRODUCTION - PROCEDURE EXPERIMENTALE

Les trains d'ondes dont les évolutions ont été étudiées ont été produits par un générateur de houle dans un canal à eau de 40m de long, 3m de large et environ 1m de profondeur. Les trains comportent à l'origine  $N = 14$  crêtes comptées au fur et à mesure de leur passage en un point fixe. La fréquence centrale a été choisie égale à  $n_0 = 2$  Hz (période de  $T_0 = 0.5$  sec), ce qui permet de suivre l'évolution pendant un laps de temps pouvant atteindre 150 périodes. D'après les résultats d'études analytiques et numériques [Lo and Mei, 1985], ce laps de temps est nécessaire pour observer les processus fondamentaux associés aux effets non linéaires.

Les données de base sur les évolutions sont constituées par les niveaux instantanés de la surface de l'eau en différents endroits en aval du générateur de houle lors du passage du train. C'est sur le traitement de ces signaux que l'essentiel du travail porte.

Les travaux théoriques, partiellement confirmés par les expériences suggèrent que l'évolution se traduit essentiellement par des modulations simultanées en amplitude et en phase. A un certain niveau de non linéarité (caractérisé par le rapport amplitude/longueur d'ondes), les modulations sont gouvernées par l'équation cubique de Shrödinger :



$$\frac{\partial A}{\partial t} \omega_0 + \frac{\partial A}{2k_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{2k_0^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 |A|^2 A = 0 \quad (1)$$

où A est l'amplitude complexe,  $\omega_0$ ,  $k_0$  la pulsation et le nombre d'ondes centraux, t et x sont respectivement le temps et la distance mesurés à partir de la position initiale.

A d'autres niveaux de non linéarité, d'autres équations ont été établies [Dysthe, 1979]. Les travaux expérimentaux visent essentiellement à situer le degré de validité de ces modèles théoriques. Il est clair que ceci nécessite des estimations précises de A, d'où l'utilité des représentations temps-fréquence.

II - REPRESENTATIONS TEMPS-FREQUENCE (OU PHASE)

II.1. Par Analyse Spectrale Différentielle (ASD)

Cette technique est une application simple et directe de l'analyse classique de Fourier par fenêtres glissantes. La mise en oeuvre consiste à calculer la transformation de Fourier à travers une fenêtre réelle d'énergie spectrale confinée dans les basses fréquences et dont la position sur l'axe assure la localisation temporelle souhaitée. Cette notion de spectre instantané peut conduire à des calculs très allégés par le choix d'une fenêtre rectangulaire de longueur correspondante à une période ou pseudo-période moyenne du signal [Gibiati et al., 1982]. Sur chacune de ces fenêtres la décomposition de Fourier fournit une représentation du signal échantillonné  $x(m)$  à partir des coefficients :

$$C_n(N_0) = \frac{1}{N} \sum_{m=N_0}^{N_0+N-1} x(m) e^{-2i m\pi n/N} \quad (2)$$

N: longueur de la fenêtre,  $N_0$  : indice de départ, n : ordre de l'harmonique. On obtient le coefficient à l'indice  $N_0+1$  par la relation :

$$C_n(N_0+1) = C_n(N_0) + \frac{1}{N} [x(N_0+N) - x(N_0)] e^{-2 N_0\pi n/N} \quad (3)$$

Utilisant les formules approchées :

$$A_n(N_i + N/2) \cong 2 |C_n(N_i)| \quad (4)$$

$$\theta_n(N_i + N/2) \cong \text{Arg } C_n(N_i)$$

on obtient l'amplitude  $A_n$  et la phase  $\theta_n$  associées à l'harmonique n. Le décalage  $N/2$  correspond au choix logique du centre de la fenêtre comme positionnement temporel.

En toute rigueur, et pour mieux comprendre les limites de cette technique, on peut rappeler que l'ASD est une opération de filtrage sur des bandes spectrales de largeur  $1/N\Delta t$ . Elle peut conduire aux mêmes inconvénients que la transformée de Fourier classique : perte d'énergie par effets des lobes latéraux introduits par le fenêtrage rectangulaire ainsi que séparation des fréquences.

Cependant l'évaluation simple et économique des amplitudes et phases instantanées associées peut servir de base avant la mise en oeuvre de techniques plus sophistiquées.

II.2. Par Analyse Spectrale Paramétrique Evolutive (ASPE)

Pour décrire de manière plus précise le contenu fréquentiel du signal, on peut chercher à étendre l'analyse par fenêtre glissante par des méthodes dites paramétriques dont on connaît les avantages et la grande efficacité pour les analyses de signaux stationnaires de durées courtes [Kay et Marple, 1981].

En utilisant l'hypothèse de stationnarité locale, on cherche alors à adapter un modèle linéaire classique autorégressif (AR) [Martin, 1984], ou pour notre cas un modèle de Pisarenko.

Sur chaque tranche de signal, ce modèle consiste à identifier le signal avec une somme de fréquences pures décorréliées et un bruit blanc. Soit :

$$x(n) = \sum_i A_i \exp(j 2\pi \nu_i n \Delta t + \phi_i) + b(n) \quad (5)$$

La distinction avec l'analyse de Fourier provient du fait que la valeur de ces fréquences n'est plus prédéterminée par le peigne  $\nu_k = k/N$ , mais obtenue à partir des données elles-mêmes.

La procédure utilisée pour déterminer ces fréquences consiste à utiliser la diagonalisation de la matrice d'autocorrélation de la tranche de signal pour décomposer celle-ci en deux espaces orthogonaux [Tufts et Kumaresan, 1982]. L'espace image des sources est associé aux valeurs propres non nulles. Le rang de la matrice détermine la dimension de cet espace et ainsi le nombre de fréquences pures.

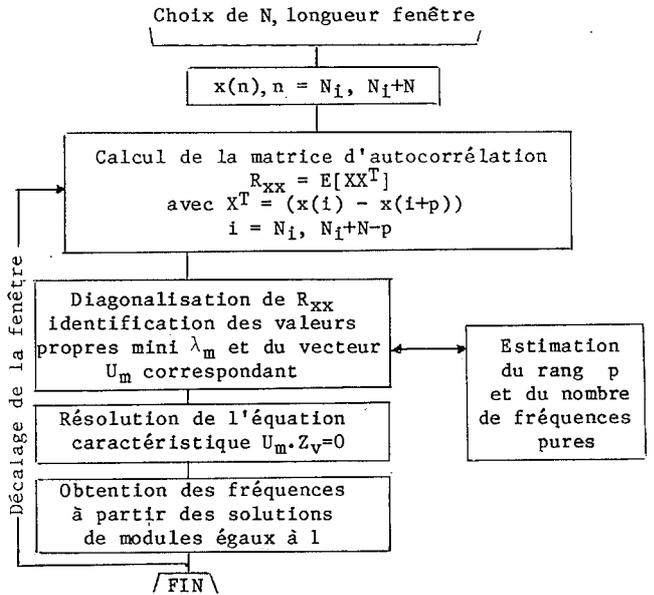
L'espace noyau est associé aux valeurs propres quasi nulles. L'ensemble des vecteurs propres constituant cet espace est orthogonal à l'ensemble des vecteurs-fréquences. On peut alors écrire à partir du vecteur propre  $U_m$  correspondant à la valeur propre minimale  $\lambda_m$ , que :

$$Z^T U_m \cdot Z = 0 \quad (6)$$

avec  $Z^T = [1, z, \dots, z^p]$   $z = e^{2i\pi\nu\Delta t}$

La puissance d'erreur obtenue est alors directement proportionnelle à  $\lambda_m$ .

La mise en oeuvre de cette méthode peut être schématisée par le diagramme ci-dessous :



Cette succession de calculs, bien que lourde, permet cependant de mieux caractériser l'évolution du contenu fréquentiel en associant cette technique avec une première ASD.

II.3. Par Transformation en Ondelettes

A un instant donné, ou à une position donnée, une simple observation visuelle permet de constater que les oscillations associées aux ondes de surface comportent de nombreuses échelles temporelles ou spatiales. En installation de laboratoire on peut ainsi aller de longueurs d'ondes allant du centimètre (ondes capillaires) au mètre (ondes de gravité courtes). Il est important de quantifier au cours de la propagation les présences simultanées ou successives de ces échelles. Il est clair qu'à ces propos, les méthodes précédentes possèdent des limitations imposées par la longueur minimale de la fenêtre d'analyse. Dans la présente étude, cette longueur est associée à la période centrale des trains d'ondes.

On sait qu'il existe aujourd'hui des procédures permettant d'adapter la longueur de la fenêtre à l'échelle à identifier. Une fenêtre gaussienne est généralement choisie à cause des avantages bien connus qu'elle possède.

La procédure consiste à considérer l'ensemble des fenêtres obtenues en dilatant ou en contractant un motif gaussien initial  $g(t)$  :

$$a \in \mathbb{R}^*_1 \quad g^a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g(t/a) \quad (7)$$

$$\text{et} \quad \text{TF}(g^a(t)) = \hat{g}^a(\omega) = \sqrt{a} \hat{g}(\omega)$$

$a > 1$  caractérisera une contraction, d'où la localisation des hautes fréquences,

$a < 1$  caractérisera une dilatation, d'où la localisation des basses fréquences.

L'expression (2) se généralise ainsi par :

$$C_n/a(N_0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m \in I_a} x(m) g\left(\frac{m-N_0}{a}\right) e^{-2i\pi m \frac{n}{a}/N} \quad (8)$$

$$I_a \text{ étant le rapport temporel de la fenêtre. Soit :} \\ C_a(N_0) = \sum_{m \in I_a} x(m) \psi^{a, N_0}(m) \quad (9)$$

avec

$$\psi^{a, N_0}(m) = \psi^a(m - N_0)$$

et

$$\psi(m) = e^{-(m \Delta t)^2/2} e^{i \Omega m \Delta t}$$

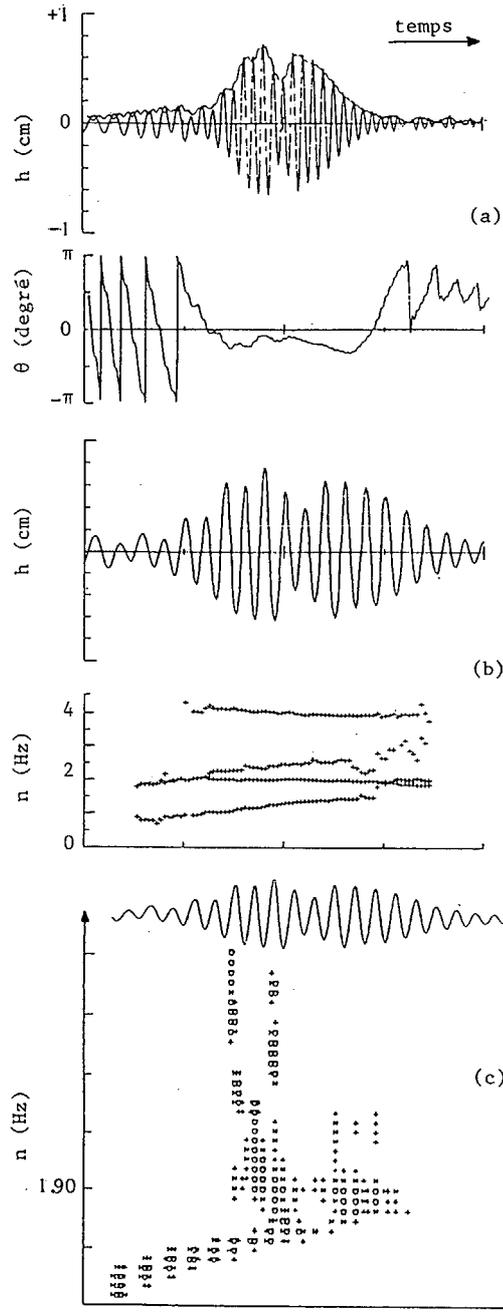
Le signal  $x$  est mesuré au sens du produit propre (9) dans l'espace décrit par une "fonction analysante" unique  $\psi$ , dilatée, contractée et translatée. En fait, on sait que cette décomposition peut être étendue à d'autres fonctions analysantes sur la base de la définition plus générale de la transformation en ondelettes [Grossman et Morlet, 1984; Meyer, 1986]. Dans notre cas, on s'est borné à une analyse par l'ondelette gaussienne dite de Morlet, qui préserve le caractère pseudo-périodique des signaux. L'analyse obtenue couvre ainsi l'ensemble de la bande spectrale intéressante et peut être interprétée comme une succession de filtrages de résolution  $\Delta\nu/\nu$  constante.

### III. RESULTATS ET DISCUSSIONS

L'ensemble des figures 1, 2, et 3 illustrent les résultats obtenus pour un train d'ondes de cambrure initiale égale à 12%. On se contentera ici de relever certains faits principaux révélés par les traitements, les discussions correspondantes sur le plan de l'hydrodynamique ne pouvant être abordées, faute de place.

Les figures 1 correspondent au stade initial du train. "L'A.S.D." révèle que le train est uniforme (phase quasi-constante) avec une bonne approximation. Ce point est confirmé par "l'A.S.P.E." (fréquence stable à 2 Hz) qui de plus met en évidence, par la présence de la fréquence 4 Hz, également stable, le caractère non linéaire du train. D'autres fréquences, non stables, caractérisent les perturbations. La transformation en ondelettes, comportant 6 octaves avec six voies par octave, révèle la présence de plusieurs fréquences autres que les multiples ou sous-multiples de la fréquence centrale 2 Hz.

Les figures 2 montrent les modifications subies par le train d'ondes après un temps de propagation de l'ordre de  $74 T_0$ . Le premier fait est que le taux de modulation en amplitude atteint pratiquement 100%. "L'A.S.D." montre la présence d'un saut de phase à un noeud de la modulation d'amplitude. Ce saut paraît en fait être la réponse de la phase à une brusque variation de la modulation d'amplitude associée à un mécanisme de déferlement (dissipation d'énergie). Il est à noter que les modulations d'amplitude et de phase, d'abord décorréliées, deviennent corrélées à un certain stade de l'évolution [Chapron, 1988]. Les signaux révèlent la tendance à la formation de "solitons". Ceci est parfaitement confirmé par "l'A.S.P.E." (présences de fréquences très voisines). Ces solitons sont disposés selon leurs fréquences, "basse fréquence" à l'avant, "fréquence centrale" au centre et "haute fréquence" à l'arrière.



Figures 1 (a) A.S.D. ; (b) A.S.P.E. ; (c) Ondelettes

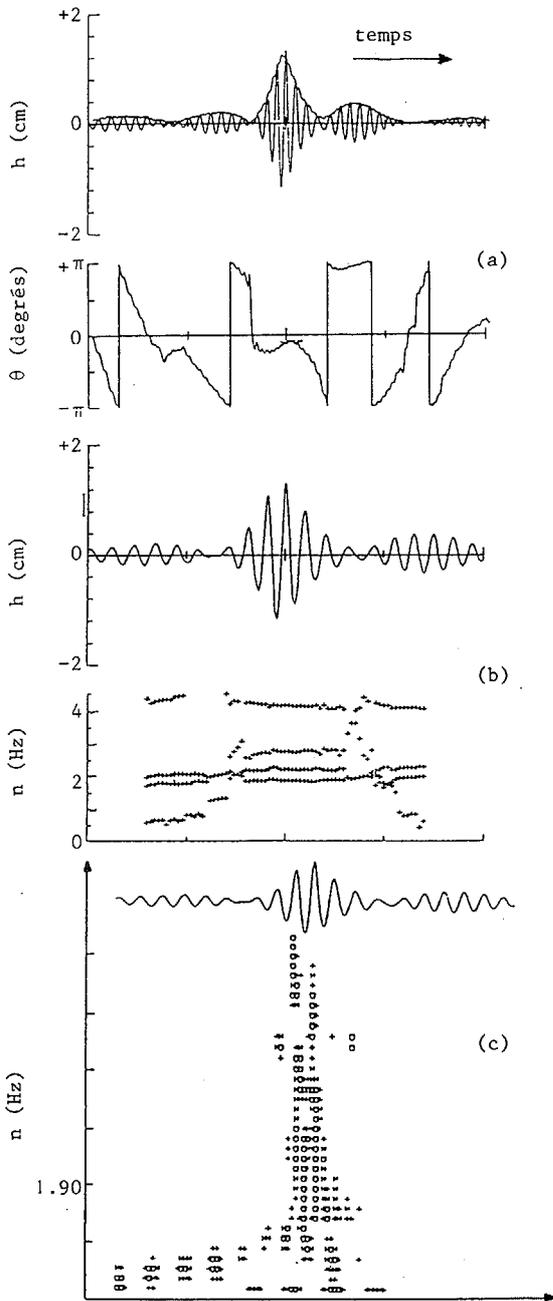
o	.9 < coeff/coeff max < 1
*	.8 < - id - < .9
+	.7 < - id - < .8

à l'arrière. Cette disposition est conforme à la dispersion des ondes de gravité en profondeur infinie. La présence de ces solitons signifierait l'existence d'une certaine compensation entre les effets de la dispersion et ceux de la non linéarité. La transformation en ondelettes illustre la signature de la structure cohérente que constitue un soliton.

Au stade final de l'évolution ( $154 T_0$ ) (figures 3), un fait remarquable inattendu est mis en relief. En effet, d'après ce qui précède, on pouvait s'attendre à une désintégration du train d'ondes en un certain nombre de solitons. Or, au contraire, on observe un regroupement sous la forme d'un nouveau train unique. Cependant, l'évolution des fréquences, montrées par l'A.S.D. et l'A.S.P.E. dans ce train diffère totalement de celle qui existait initialement (figures 1). Les fréquences évoluent d'une manière quasi-linéaire du front à l'arrière du train, en allant des basses aux hautes valeurs. Ceci atteste que la dispersion est devenue prépondérante. La transformation en ondelettes paraît bien confirmer ce fait.



L'ensemble des résultats disponibles [Chapron, 1988] apparaît primordial pour discuter de la possibilité de récurrence au cours des évolutions des trains d'ondes. Cette question est largement contreversée aujourd'hui.

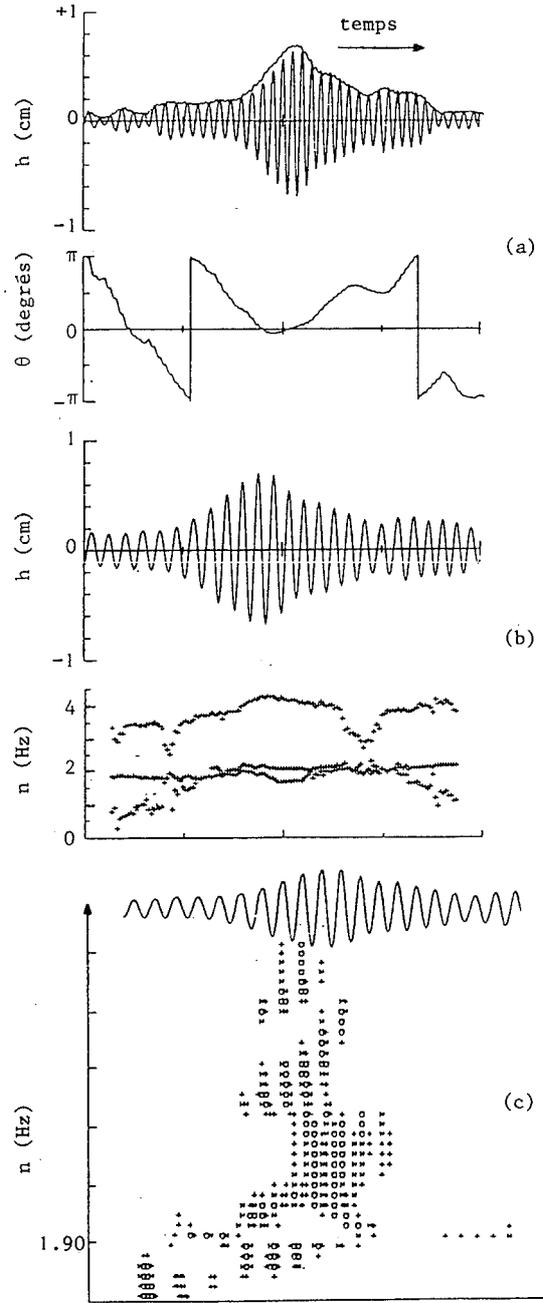


Figures 2 - Temps de propagation :  $74 T_0$

- (a) A.S.D. ; (b) A.S.P.E. ; (c) Ondelettes
- o .9 < coeff/coeff max < 1
- \* .8 < - id - < .9
- + .7 < - id - < .8

**BIBLIOGRAPHIE**

Lo and Mei (1985) - J. Fluid Mech., 150, 395-416.  
 Dysthe (1979) - Proc. Roy. Soc. Lond. A 369, 105-114.  
 Gibiat, Jardin et Wu (1982) - Acustica, vol.63.  
 Kay et Marple (1981) - Proc. IEEE, 69, 11.



Figures 3 - Temps de propagation =  $154 T_0$

- (a) A.S.D. ; (b) A.S.P.E. , (c) Ondelettes
- o .9 < coeff/coeff max < 1
- \* .8 < - id - < .9
- + .7 < - id - < .8

Martin (1984) - Développements de méthodes d'analyse spectrale autorégressive. Application à des signaux réels non stationnaires ou à n dimensions. Thèse de Docteur-Ingénieur, I.N.P. Grenoble.

Tufts and Kumaresan (1982) - Proc. IEEE, 70, n°9.

Grossman et Morlet (1984) - Siam., J. Math. An. 15, 723-736.

Meyer(1986) Séminaire Bourbaki 1985/1986, n°662.

Chapron (1988) - Une étude de la propagation et des instabilités des trains d'ondes de gravité en profondeur infinie. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-MarseilleII