



INFLUENCE D'UNE ONDE DE SURFACE PROGRESSIVE SUR  
LES MODES PROPAGATIFS D'UN GUIDE D'ONDE \*

Manh-Hung PHAM, Luc KAZANDJIAN

THOMSON-SINTRA Activités Sous-Marines - 1, avenue Aristide Briand - 94117 ARCUEIL CEDEX

RESUME

Dans cette étude, on détermine la modification des modes normaux, en propagation libre (équation des ondes sans second membre) en basse fréquence dans un guide d'onde, lorsque la surface de la mer est parcourue par une onde progressive sinusoïdale de surface. L'amplitude de cette onde de surface est supposée petite devant la longueur d'onde acoustique. On utilise alors une méthode de perturbation classique et la méthode des échelles multiples pour étudier l'interaction entre l'onde de surface et les modes normaux acoustiques. L'interaction entre ces deux systèmes d'ondes génère des ondes acoustiques de fréquence et de nombre d'ondes différents de ceux du mode acoustique incident. Lorsque l'interaction est non résonnante, les ondes acoustiques générées ont une amplitude faible et peuvent être considérées comme des perturbations de la solution originelle en l'absence d'onde de surface. Lorsque des accords de phase adéquats sont satisfaits, une des ondes générées correspond à un mode normal du conduit océanique à une fréquence différente de l'onde acoustique excitatrice. Il en résulte un fort couplage entre ces deux modes acoustiques et un échange d'énergie d'un mode à l'autre pour de grandes distances horizontales dans la direction de progression de l'onde de surface.

SUMMARY

In this paper, we determine the change in the normal modes of a waveguide due to the presence of a monochromatic surface wave under conditions of free propagation (homogeneous wave equation) at low frequency. The amplitude of the surface wave is assumed to be small compared to the acoustic wavelength. A regular perturbation technique and a multiple-scale perturbation technique are employed to study the interaction between normal acoustic modes and the surface wave. This interaction generates two acoustic waves whose frequency and wavenumber are different from those of the unperturbed acoustic mode. If the interaction is non-resonant, the acoustic waves generated have a small amplitude and can be regarded as perturbations of the solution obtained in the absence of surface waves. If appropriate phase-matching conditions are satisfied, one of the waves generated corresponds to a normal mode of the waveguide at a new reference frequency. In this case, two acoustic normal modes get coupled, resulting in a large-scale periodic exchange of energy from one mode to another.

INTRODUCTION

La propagation acoustique dans une lame d'eau est traitée avec succès par la théorie des modes normaux. En acoustique sous-marine, il semble cependant quelque peu irréaliste de décrire la surface de la mer comme une surface plane immobile. La plupart des auteurs ont donc tenté d'améliorer la modélisation du conduit océanique en considérant la surface comme une surface rugueuse figée. Les analyses théoriques ont alors montré que les fluctuations de niveau à la surface introduisent essentiellement un coefficient d'atténuation supplémentaire pour chaque mode propagatif.

Il existe cependant des phénomènes physiques qui sont exclusivement liés aux oscillations temporelles de la surface. Le déplacement en fréquence du signal diffracté par rapport au signal incident a été observé par Eckart en 1953 [1] et a été abondamment repris et discuté depuis. Ainsi, l'influence du mouvement de la surface se doit d'être étudiée dans un environnement plus réaliste.

Dans cette étude, on se propose de déterminer l'influence d'une onde de surface sinusoïdale progressive sensée modéliser la houle sur la propagation libre en basse fréquence des modes normaux acoustiques d'un guide d'onde. On supposera l'amplitude de l'onde de surface petite devant la longueur d'onde acoustique de manière à utiliser les méthodes de perturbation régulière et singulière (échelles multiples dans ce dernier cas).

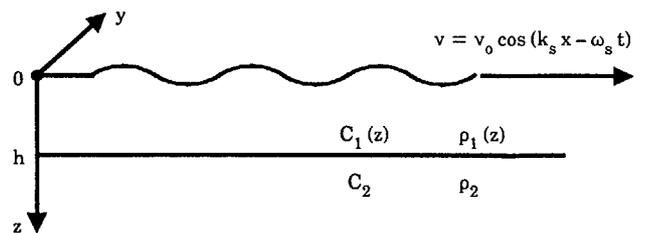
Lorsque l'interaction est non résonnante, l'amplitude et la phase du mode normal acoustique incident sont légèrement perturbées. L'interaction devient résonnante si des accords de phase adéquats sont satisfaits. Il en résulte un fort couplage entre deux modes acoustiques associés à des fréquences différentes, phénomène qui correspond à un échange d'énergie d'un mode à l'autre pour de grandes distances horizontales.

Les méthodes de perturbation furent appliquées par A.H. Nayfeh et O.R. Asfar ([2] et [3]) pour traiter la propagation d'ondes électro-magnétiques ou acoustiques dans des réseaux périodiques. Récemment G.V. Anand et M.K. George [4] en ont vérifié l'applicabilité à un guide d'onde bidimensionnel, isocélère, et de densité uniforme avec une condition de fond de type Dirichlet.

\* Cette étude a été financée par la DRET dans le cadre du contrat n° 8801504.

Les résultats obtenus ici représentent une extension de ce dernier travail à un guide d'onde tridimensionnel avec bathycélérimétrie et densimétrie quelconques surmontant un fond sédimentaire fluide.

1. FORMULATION DU PROBLEME ET ADIMENSIONNEMENT



On considère la propagation d'une onde plane monochromatique de fréquence angulaire  $\omega$  dans un guide d'onde océanique de bathycélérimétrie et densimétrie quelconques surmontant un fond fluide homogène. On appelle  $h$  la profondeur d'eau lorsque la surface de la mer n'est pas perturbée par l'onde de surface. La pression  $p(x, y, z, t)$  doit vérifier l'équation de propagation :

$$\rho(z) \nabla \left( \frac{1}{\rho(z)} \nabla p \right) - \frac{1}{C^2(z)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

La surface de la mer est supposée perturbée par une onde de surface monochromatique sinusoïdale d'équation :

$$v(x, y, t) = v_0 \cos(k_s x - \omega_s t) \tag{2}$$



Sans rien enlever à la généralité du problème, on a considéré une onde de surface progressant dans la direction  $Ox$ .  $v$  est le déplacement vertical de la surface de la mer. ( $\omega_s, k_s$ ) sont liés par la loi de dispersion propre aux ondes de gravité :

$$\omega_s^2 = k_s g \tanh(k_s h) \quad (3)$$

Les conditions aux limites pour la pression  $p$  s'écrivent :

$$p(x, y, z, t) = 0 \quad z = v(x, y, t) \quad (4)$$

$$p \text{ et } \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \text{ continues en } z = h \quad (5)$$

$$p \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \quad (6)$$

La condition à la limite (4) en  $z = v$  peut être remplacée par une condition en  $z = 0$  via un développement en série de Taylor. Cette série de Taylor peut être approximée par ses deux premiers termes sous l'hypothèse d'une amplitude de l'onde de surface faible devant la longueur d'onde acoustique.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \ll \lambda = \frac{C_{\text{ref}}}{f} \\ (C_{\text{ref}} : \text{célérité de référence}) \end{array} \right. \quad (7)$$

Dans ces conditions, l'équation (3) peut être remplacée par la condition limite approchée :

$$p(x, y, z, t) + v_0 \left[ \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z, t) \right]_{z=0} \cos(k_s x - \omega_s t) = 0 \text{ en } z = 0 \quad (8)$$

Pour l'utilisation des techniques de perturbation, on se doit d'adimensionner le problème en utilisant les variables et fonctions adimensionnées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = k l \text{ (l coordonnées ou longueur)} \\ P = p/(\rho(0) C_{\text{ref}}^2) \\ \Omega = \omega_s/k \\ K = k_s/k \\ \varepsilon = k_s v_0 \text{ (paramètre de perturbation)} \\ T = \omega t \end{array} \right. \quad (9)$$

$$R(Z) = \begin{cases} \frac{\rho_1(Z/k)}{\rho(0)}, & Z \leq H \\ \frac{\rho_2}{\rho(0)}, & Z > H \end{cases} \quad N(Z) = \begin{cases} \frac{C_{\text{ref}}}{C_1(Z/k)}, & Z \leq H \\ \frac{C_{\text{ref}}}{C_2}, & Z > H \end{cases} \quad (10)$$

En reportant, on obtient le problème adimensionné :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - N^2(Z) \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P + \varepsilon \left( \frac{\partial P}{\partial Z} \right)_0 \cos(KX - \Omega T) = 0 \end{array} \right. \text{ en } Z = 0 \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P}{\partial Z} \text{ continues en } Z = H \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (14)$$

## 2. PERTURBATION REGULIERE ET INTERACTION NON RESONNANTE

On utilise une méthode de perturbation régulière pour rechercher la solution du problème (11). La solution est alors cherchée sous la forme d'un développement asymptotique à l'ordre  $\varepsilon$ .

$$P(X, Y, Z, T) = P_0(X, Y, Z, T) + \varepsilon P_1(X, Y, Z, T) \quad (15)$$

En remplaçant  $P$  par son développement asymptotique dans (11 - 14), on aboutit à deux systèmes avec conditions aux limites pour  $P_0$  et  $P_1$ .

Ordre  $\varepsilon^0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial Y^2} + R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P_0}{\partial Z} \right) - N^2(Z) \frac{\partial^2 P_0}{\partial T^2} = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 0 \end{array} \right. \text{ en } Z = 0 \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P_0}{\partial Z} \text{ continues en } Z = H \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (19)$$

Ordre  $\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial Y^2} + R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P_1}{\partial Z} \right) - N^2(Z) \frac{\partial^2 P_1}{\partial T^2} = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = - \left( \frac{\partial P_0}{\partial Z} \right)_{Z=0} \cos(KX - \Omega T) \end{array} \right. \text{ en } Z = 0 \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P_1}{\partial Z} \text{ continues en } Z = H \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (23)$$

Le problème à l'ordre  $\varepsilon^0$  est identique à celui qui serait posé en l'absence de perturbation de surface. Le problème non perturbé peut être décrit avec succès par la théorie modale. On rappelle quelques résultats fondamentaux.

Un mode vertical  $\psi_m(Z, F)$  à la fréquence adimensionnée  $F$  et de nombre d'onde horizontal correspondant  $K_{mF}$  vérifie le problème adimensionné :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(Z) \left[ \frac{d}{dZ} \left( \frac{1}{R(Z)} \frac{d}{dZ} \psi_m(Z, F) \right) \right] + (N^2(Z) F^2 - k_{mF}^2) \psi_m(Z, F) = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_m(Z, F) = 0 \end{array} \right. \text{ en } Z = 0 \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_m \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{d\psi_m}{dZ} \text{ continues en } Z = H \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_m \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (27)$$

On sait que les modes sont orthogonaux ; on peut de plus les choisir normés d'où :

$$\int_0^\infty \frac{1}{R(Z)} \psi_i(Z, F) \psi_j(Z, F) dZ = \delta_{ij} \quad (28)$$

On s'intéresse à l'interaction d'un mode unique  $\Psi_m$  de nombre d'onde horizontal  $K_{mF}$  à la fréquence adimensionnée  $F$  avec l'onde de surface modélisant la houle. La solution  $P_0$  s'écrit donc :

$$P_0(X, Y, Z, T) = A_m \psi_m(Z, F) e^{i(K_{mx} X + K_{my} Y) - i T} \quad (29)$$

$$\text{avec } K_{mx}^2 + K_{my}^2 = K_m^2 \quad (30)$$

Elle correspond à une onde acoustique représentant un mode vertical associé à une onde plane se propageant dans le plan horizontal dans la direction  $(K_{mx}, K_{my})$ .

Compte tenu de (29), l'équation (21) s'écrit :

$$P_1 = - \frac{1}{2} A_m \frac{d\psi_m}{dZ}(0) e^{i K_{my} Y} \quad (31)$$

$$\left[ e^{i(K_{mx} + K) X} e^{-i(1+M\Omega)T} + e^{i(K_{mx} - K) X} e^{-i(1-M\Omega)T} \right]$$

La condition à la limite (31) impose de rechercher la solution de (20 - 23) sous la forme :

$$P_1(X, Y, Z, T) = - \frac{1}{2} A_m \frac{d\psi_m}{dZ}(0) e^{i K_{my} Y} \sum_{\alpha = \pm 1} \beta_\alpha(Z) e^{i(K_{mx} + \alpha K) X} e^{-i(1 + \alpha\Omega)T} \quad (32)$$

En reportant (32) dans l'équation (20) et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient le système vérifié par  $\beta_\alpha$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(Z) \frac{d}{dZ} \left[ \frac{1}{R(Z)} \frac{d\beta_\alpha}{dZ} \right] + [N^2(Z)(1 + \alpha\Omega)^2 - (K_{mx} + \alpha K)^2 - K_{my}^2] \beta_\alpha = 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\alpha(Z) = 1 \end{array} \right. \quad (Z = 0) \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\alpha \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{d\beta_\alpha}{dZ} \text{ continues} \end{array} \right. \quad (Z = H) \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\alpha \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (Z \rightarrow +\infty) \quad (36)$$

Dans la pratique, le problème pour  $\beta_\alpha$  est abordé numériquement grâce à une méthode de différences finies en amorçant le schéma en  $Z = H$  avec la connaissance de la fonction  $\beta_\alpha$  pour  $Z \geq H$  ( $N(Z) = N_0 = \text{cte}$ ). Cependant il subsiste un problème lorsque des accords de phase adéquats sont satisfaits, auquel cas la solution  $\beta_\alpha$  n'existe pas ou devient infinie. On se propose de déterminer de manière "théorique" la fonction  $\beta_\alpha$  par décomposition sur une base modale complète. La base modale utilisée est la base des modes normaux à la fréquence  $(1 + \alpha\Omega)$  ; ses vecteurs de base sont notés  $\psi_{n\alpha}$ .



Tous calculs faits :

$$\beta_a(Z) = 1 + \sum_n C_{na} \psi_{na}(Z) \quad (37)$$

$$C_{na} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{R(Z)} \left[ (K_{mx} + \alpha K)^2 + K_{my}^2 - N^2(Z)(1 + \alpha\Omega)^2 \right] \psi_{na}(Z) dZ}{K_{na}'^2 - (K_{mx} + \alpha K)^2 - K_{my}^2} \quad (38)$$

où  $K_{na}'$  est le nombre d'onde horizontal associé à  $\psi_{na}$ .

Le coefficient  $C_{na}$  devient infini lorsque :

$$(K_{mx} + \alpha K)^2 + K_{my}^2 = K_{na}'^2 \quad (39)$$

L'interaction devient alors résonnante. La résonance intervient donc lorsque le nombre d'onde de l'onde acoustique générée  $\left( (K_{mx} + \alpha K)^2 + K_{my}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  correspond ou devient presque égal au nombre d'onde horizontal  $K_{na}'$  d'un mode propre  $\psi_{na}$  à la fréquence  $(1 + \alpha\Omega)$ .

Lorsque l'interaction est non résonnante,  $\beta_a$  peut être recherché sans problème aucun par une méthode numérique de différences finies. Ainsi l'interaction à l'ordre  $\varepsilon$  entre l'onde acoustique et l'onde de surface génère deux modes acoustiques avec des amplitudes faibles (d'ordre  $\varepsilon$ ). Ces modes générés ne sont pas des modes normaux. Ils correspondent à une fréquence  $(1 + \alpha\Omega)$  et à des nombres d'onde horizontaux en X et Y donnés par le couple  $(K_{mx} + \alpha K, K_{my})$  où  $\alpha = \pm 1$ .

Lorsque la condition de résonance (39) est satisfaite, l'onde de surface et le mode acoustique incident excitent un des modes normaux du guide d'onde et le développement asymptotique ne devient plus bien ordonné. En effet, la solution  $\varepsilon P_1$  devient alors du même ordre de grandeur que  $P_0$ .

### 3. INTERACTION RESONNANTE ET ECHELLES MULTIPLES

#### 3.1. FORMALISME

Pour déterminer l'influence de l'interaction résonnante, on utilise une méthode de perturbation singulière, la méthode des échelles multiples.

Afin d'obtenir des solutions correctes au premier ordre en  $\varepsilon$ , il est nécessaire d'employer deux échelles pour décrire la propagation dans la direction de la vague :

- une échelle rapide  $X_0 = X$  qui va permettre de décrire les nombres d'onde horizontaux des modes normaux,
- une échelle lente  $X_1 = \varepsilon X$  qui va permettre de caractériser les fluctuations spatiales de l'amplitude et de la phase de ces modes.

Les dérivations par rapport à X sont de ce fait remplacées par :

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial X_0 \partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \quad (41)$$

On recherche un développement asymptotique de la solution sous la forme :

$$P(X, Y, Z, T) = P_0(X_0, X_1, Y, Z, T) + \varepsilon P_1(X_0, X_1, Y, Z, T) \quad (42)$$

En substituant l'expression asymptotique de P dans l'équation aux dérivées partielles et en tenant compte de la relation (41), on aboutit à deux problèmes pour  $P_0$  et  $P_1$  :

Ordre  $\varepsilon^0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P_0}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial Y^2} + R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P_0}{\partial Z} \right] - N^2(Z) \frac{\partial^2 P_0}{\partial T^2} = 0 \quad (43) \\ P_0 = 0 \quad (Z = 0) \quad (44) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuité de } P_0 \text{ et } \frac{1}{R} \frac{\partial P_0}{\partial Z} \quad (Z = H) \quad (45) \end{array} \right\}$$

$$P_0 \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \quad (46)$$

Ordre  $\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P_1}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial Y^2} + R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial P_1}{\partial Z} \right] - N^2(Z) \frac{\partial^2 P_1}{\partial T^2} = -2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial X_0 \partial X_1} \quad (47) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = - \frac{\partial P_0}{\partial Z} \Big|_{Z=0} \cos(KX - \Omega T) \quad (Z = 0) \quad (48) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuité de } P_1 \text{ et } \frac{1}{R} \frac{\partial P_1}{\partial Z} \quad (Z = H) \quad (49) \end{array} \right\}$$

$$P_1 \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \quad (50)$$

L'onde acoustique générée qui est d'amplitude faible dans le cas non résonnant correspond à un mode  $\psi_{nM}$  ( $M = \pm 1$ ) à la fréquence  $(1 + M\Omega)$  dans le cas résonnant. Cette onde acoustique doit donc coexister avec le mode normal incident. Cela nous amène à poser  $P_0$  sous la forme :

$$P_0(X_0, X_1, Y, Z, T) = A_m(X_1) \psi_m(Z, 1) e^{i(K_{mx} X_0 + K_{my} Y)} e^{-iT} + A_n(X_1) \psi_n(Z, 1 + M\Omega) e^{i(K'_{nx} X_0 + K'_{ny} Y)} e^{-i(1 + M\Omega)T} \quad (51)$$

sous condition de résonance approchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} K'_{ny} = K_{my} \\ K'_{nx} = \pm \sqrt{K_n'^2 - K_{my}^2} \\ K_{mx} + MK = K'_{nx} + \varepsilon \sigma \quad \sigma = 0(1) \end{array} \right. \quad (52)$$

où  $\sigma$  mesure l'écart à la résonance exacte.

En reportant (51) dans l'équation (48), on voit facilement que l'équation à la limite fait intervenir les termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ i \left( K'_{nx} X_0 + K_{my} Y - (1 + M\Omega)T \right) \right] \\ \exp \left[ i \left( K_{mx} X_0 + K_{my} Y - T \right) \right] \\ \exp \left[ i \left\{ (K_{mx} - MK) X_0 + K_{my} Y - (1 - M\Omega)T \right\} \right] \\ \text{et } \exp \left[ i \left\{ (K'_{nx} - MK) X_0 + K_{my} Y - (1 + 2M\Omega)T \right\} \right] \end{array} \right.$$

Ainsi, au regard de l'équation à la limite (48), on recherche une solution  $P_1$  de la forme :

$$P_1 = -i B_m(X_1, Z) e^{i \left[ K_{mx} X_0 + K_{my} Y - T \right]} - i B_n(X_1, Z) e^{i \left[ K'_{nx} X_0 + K_{my} Y - (1 + M\Omega)T \right]} - i D_1(X_1, Z) e^{i \left[ (K_{mx} - MK) X_0 + K_{my} Y - (1 - M\Omega)T \right]} - i D_2(X_1, Z) e^{i \left[ (K'_{nx} + MK) X_0 + K_{my} Y - (1 + 2M\Omega)T \right]} \quad (53)$$

On remplace (53) dans les équations 47 à 50 pour aboutir aux 4 problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial B_m}{\partial Z} \right) + \left( N^2(Z) - K_m^2 \right) B_m = 2 \frac{dA_m}{dX_1} K_{mx} \psi_m(Z) \\ B_m = - \frac{1}{2} i A_n(X_1) \frac{d\psi_n}{dZ}(0) e^{-i\sigma X_1} \quad (Z = 0) \\ \text{Continuité de } B_m \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial B_m}{\partial Z} \quad (Z = H) \\ B_m \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (54)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial B_n}{\partial Z} \right) + \left( N^2(Z)(1 + M\Omega)^2 - K_n'^2 \right) B_n = 2 \frac{dA_n}{dX_1} K_{nx}' \psi_n(Z) \\ B_n = -\frac{1}{2} i A_m(X_1) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) e^{i\sigma X_1} \quad (Z=0) \\ \text{Continuité de } B_n \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial B_n}{\partial Z} \quad (Z=H) \\ B_n \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial D_1}{\partial Z} \right] + \left[ N^2(Z)(1 - M\Omega)^2 - (K_{mx}' - MK)^2 - K_{my}'^2 \right] D_1 = 0 \\ D_1 = -\frac{1}{2} i A_m(X_1) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \quad (Z=0) \\ \text{Continuité de } D_1 \text{ et } \frac{1}{R} \frac{\partial D_1}{\partial Z} \quad (Z=H) \\ D_1 \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{1}{R(Z)} \frac{\partial D_2}{\partial Z} \right] + \left[ N^2(Z)(1 + 2M\Omega)^2 - (K_{nx}' + MK)^2 - K_{my}'^2 \right] D_2 = 0 \\ D_2 = -\frac{1}{2} i A_n(X_1) \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \quad (Z=0) \\ \text{Continuité de } D_2 \text{ et } \frac{1}{R} \frac{\partial D_2}{\partial Z} \quad (Z=H) \\ D_2 \text{ rayonne ou est évanescant à l'infini} \end{array} \right. \quad (57)$$

Les problèmes (54) et (55) correspondent à un système d'équations différentielles inhomogènes couplées avec conditions aux limites. Il apparait dans chaque problème un terme résonnant qui rend  $B_m$  ou  $B_n$  infini. Cependant, ces termes séculaires peuvent être éliminés par des choix adéquats des fonctions arbitraires  $A_m(X_1)$  et  $A_n(X_1)$ . Ces choix sont déterminés par les conditions de solvabilité. Ces conditions sont obtenues en multipliant les équations différentielles dans (54) et (55) par :

$$\frac{1}{R(Z)} \psi_m(Z) \text{ et } \frac{1}{R(Z)} \psi_n(Z)$$

respectivement, en intégrant de 0 à l'infini et en tenant compte des conditions aux limites en  $Z=0$  et  $Z=H$ , des conditions de rayonnement à l'infini et de la condition de normalisation des modes.

On obtient, tous calculs faits, les deux conditions de solvabilité :

$$\frac{dA_m}{dX_1} = -\frac{i}{4K_{mx}'} \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \exp(-i\sigma X_1) A_n(X_1) \quad (59)$$

$$\frac{dA_n}{dX_1} = -\frac{i}{4K_{nx}'} \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \exp(i\sigma X_1) A_m(X_1) \quad (60)$$

La résolution du système (59 - 60) conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_m(X_1) = \left[ a_{1m} \exp\left(\frac{i}{2} u X_1\right) + a_{2m} \exp\left(-\frac{i}{2} u X_1\right) \right] \exp\left(-\frac{i}{2} \sigma X_1\right) \\ A_n(X_1) = \left[ a_{1n} \exp\left(\frac{i}{2} u X_1\right) + a_{2n} \exp\left(-\frac{i}{2} u X_1\right) \right] \exp\left(\frac{i}{2} \sigma X_1\right) \end{array} \right. \quad (61)$$

où :

$$\left\{ u = \left[ \sigma^2 + \frac{\left( \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \right)^2}{4K_{mx}' K_{nx}'} \right]^{1/2} \right. \quad (62)$$

et  $a_{1m}$ ,  $a_{2m}$ ,  $a_{1n}$ ,  $a_{2n}$  sont des constantes arbitraires dépendant des conditions initiales.

### 3.2. VALIDITE DE LA SOLUTION

Lorsque l'une ou l'autre condition :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{mx}' K_{nx}' > 0 \\ K_{mx}' K_{nx}' < 0 \text{ et } |\sigma| > \frac{\left| \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \right|}{2 \left| K_{mx}' K_{nx}' \right|^{1/2}} \end{array} \right. \quad (63)$$

est satisfaite,  $u$  est réel, ce qui conduit à des variations de  $A_m$  et  $A_n$  de nature oscillatoire. De ce fait, leurs amplitudes restent bornées et la solution  $P_o(X_o, X_1, Y, Z, T)$  est uniformément valable. La première condition correspond à deux ondes se propageant dans le même sens. La seconde condition indique que, dans le cas de deux ondes se propageant en sens contraire, le paramètre  $\sigma$  doit rester supérieur à une certaine limite.

$$\text{Lorsque } K_{mx}' K_{nx}' < 0 \text{ et } |\sigma| < \frac{\left| \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \right|}{2 \left| K_{mx}' K_{nx}' \right|^{1/2}} \quad (65)$$

le paramètre  $u$  devient imaginaire pur. On ne garde alors que la solution exponentielle décroissante. Ainsi, les modes sont évanescents et s'atténuent à mesure qu'ils se propagent dans le guide d'onde. Ce phénomène correspond à une bande d'arrêt ou une bande d'atténuation en fréquence. La fréquence pour laquelle le comportement de la solution change d'une nature oscillatoire à une nature évanescence est notée fréquence de transition de la bande d'arrêt. Elle est solution de l'équation :

$$\sigma^2 - \frac{\left| \frac{d\psi_n}{dZ}(0) \frac{d\psi_m}{dZ}(0) \right|^2}{2 \left| K_{mx}' K_{nx}' \right|} = 0 \quad (66)$$

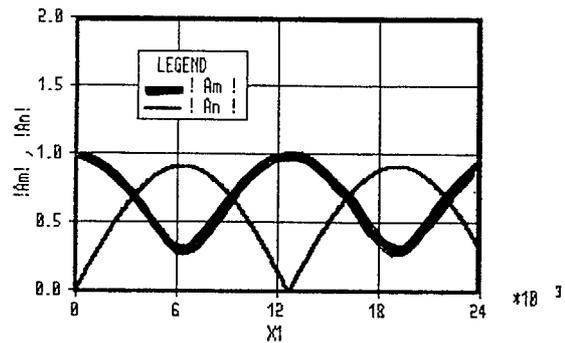
### 3.3. APPLICATION

Dans les conditions suivantes :

- lame d'eau homogène telle que  $C_1 = 1500$  m/s,  $\rho_1 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $h = 80$  m,
- fond fluide homogène tel que  $C_2 = 1800$  m/s,  $\rho_2 = 2000$  kg/m<sup>3</sup>,
- onde de surface telle que  $k_s = 5,3156 \cdot 10^{-2}$  m<sup>-1</sup>,  $f_s = 0,11491$  Hz,  $\varepsilon = 8,37 \cdot 10^{-2}$ ,
- fréquence = 200 Hz,
- $A_m(X_1) = 1$  et  $A_n(X_1) = 0$  en  $X_1 = 0$ ,

le 8ème mode à 200 Hz ( $k_s = 0,781766$  m<sup>-1</sup>) et le 2ème mode à 200,1149 Hz ( $k_s = 0,834913$  m<sup>-1</sup>) ont des amplitudes  $A_m(X_1)$  et  $A_n(X_1)$  qui varient de la façon montrée ci-dessous :

VARIATION D'AMPLITUDE



### REFERENCES

1. G. Eckart, "The scattering of sound from the sea surface", J. Acoust. Soc. Am 25, pp. 566 - 570 (1953).
2. O.R. Asfar and A.H. Nayfeh, "The application of the method of multiple scales to wave propagation in periodic structures", SIAM Vol. 25 n° 4 Oct 1983, pp. 455 - 480.
3. A.H. Nayfeh, "Sound waves in two-dimensional ducts with sinusoidal walls", J. Acoust. Soc. Am 56, pp. 768 - 770 (1974).
4. G.V. Anand and M.K. George, "Normal-mode sound propagation, in an ocean with sinusoidal surface waves", J. Acoust. Soc. Am 80, pp. 238 - 243 (1986).