



RESTAURATION D'IMAGES ET ESTIMATION DU FLOU PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE AVEC CONTRAINTES.

L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu.

LASSY - UA CNRS 814, Université de NICE
41 Bd Napoléon III 06041 Nice Cédex, FRANCE

RESUME

Le problème traité dans cet article est la restauration d'images floues et plus particulièrement l'estimation du flou. Les méthodes de restauration font l'hypothèse que la dégradation subie par l'image est connue, ce qui n'est souvent pas le cas en pratique.

La structure en banc de filtres en parallèle est utilisée dans la procédure d'estimation et restauration, afin de réduire le volume des calculs. Le problème 2D est transformé en N problèmes 1D décorrélés, par transformation de Fourier de l'image suivant une direction. L'utilisation de l'image avec son miroir entraîne une réduction des problèmes de bord dans cette direction et de meilleurs résultats.

En supposant que le flou est linéaire et spatialement invariant, l'équation d'observation est la convolution de l'image d'origine avec une fonction de flou, de support fini, appelée Point Spread Function (PSF). Dans la deuxième partie, nous posons le problème de l'estimation des paramètres du modèle AR sur l'image et de la PSF (partie MA). Du fait de la sensibilité de la qualité de la restauration aux paramètres de la PSF, l'estimation par des méthodes classiques conduit à des résultats décevants lorsque la longueur de la PSF devient grande (ce qui est le cas le plus fréquent expérimentalement). On propose une reparamétrisation de cette P.S.F. où les coefficients sont liés par une loi supposée connue a priori.

Après avoir effectué un choix sur les données utiles pour l'estimation, on fixe l'ordre de la partie AR et on estime simplement l'ordre de la PSF. On recherche ensuite les 3 ou 4 hyperparamètres en maximisant une fonction de vraisemblance.

La procédure globale fait intervenir récursivement le filtre de Kalman pour restaurer l'image et l'optimisation de la fonction de vraisemblance pour le calcul des paramètres. La fonction de vraisemblance étant non linéaire par rapport aux paramètres à estimer, une méthode de Gradient est utilisée pour l'optimisation.

Nous présenterons des résultats de simulation de cette méthode sur des images numériques noir et blanc (256x256) artificiellement rendues floues.

SUMMARY

The problem stated in this paper is blur estimation for image restoration. In real-life applications, the characteristics of the blur are usually unknown, and the Point Spread Function (PSF) has to be estimated from the degraded image.

The identification and restoration procedure uses the fast parallel Kalman filter structure. Processing on columns is decorrelated by first applying FFT on the rows. In order to get ride of the boundary condition problems involved in this procedure, a mirror image is used. Then the 2D identification and restoration problem is transformed into a set of N 1D identification and restoration problems on the columns.

By assuming that the blur is linear and spatially invariant, the blur identification problem results in the Point Spread Function coefficients estimation. The PSF extends over a limited but large number of pixels, thus the specific problem of high number of parameter estimation is stated. Usual procedures for ARMA parameter estimation have failed in image parameter estimation, mainly due to the MA part size. The MA parameter estimator diverges on most of the scalar signals (columns).

Then parameters are constrained to be smooth by assuming that they are on a continuous function, such as a gaussian, polynomial, or wavelet function. Thus the estimation consists in hyperparameter estimation, computed by optimization of a Likelihood Function. The Maximum Likelihood technic is useful when a priori information and constraints such as energy conservation, PSF form have to be introduced. The log-likelihood function is minimized using a gradient-based procedure, with numerical computation.

The global processing consists in recursively estimating the unknown parameters using the Maximum Likelihood procedure, and restoring the image using the Kalman filter. With the estimated coefficients the image is restored, and using this restored image, the parameters are optimized.

Some results on a grey-level image artificially blurred are presented.

INTRODUCTION :

La restauration d'image a pour but l'amélioration de la qualité des images numériques dégradées. Les dégradations peuvent être d'origines multiples (transmission, mauvaises conditions d'acquisition...) et différents modèles sont alors utilisés (bruit additif, multiplicatif, convolution de l'image par une fonction de flou...)

Nous nous intéressons dans cet article à des dégradations modélisées par la convolution de l'image d'origine avec une fonction représentant la dégradation. Sous l'hypothèse de linéarité et d'invariance par translation de la dégradation, cette fonction est de réponse impulsionnelle finie, communément appelée "Point Spread Function" (PSF) [1]. Les dégradations ainsi modélisées sont du type suivant: bougé, défocalisation, mauvais état de l'appareil photographique...

La restauration est alors un problème de déconvolution, qui a fait l'objet d'importantes recherches ces dernières années, donnant lieu à diverses méthodes. Une des difficultés est le coût en calcul très élevé des algorithmes. Pour réduire ce coût, une technique alors proposée consiste à exploiter la structure de Toeplitz des matrices du système: celles-ci sont approximées par des matrices circulantes, pour être simplement diagonalisées par FFT; l'utilisation de matrices diagonales et de données décorréélées dans l'espace de Fourier, réduit de façon considérable la complexité des algorithmes. Cette technique a été largement utilisée pour la mise en oeuvre de méthodes comme le filtrage inverse, la méthode des Moindres Carrés, et de filtrage de Wiener [1]. Jain [3] puis Biemond [4] l'ont utilisée afin de décorréler les données dans une direction, verticale ou horizontale, et filtrer dans l'autre direction.



Les méthodes de restauration supposent en général la PSF connue a priori ce qui n'est souvent pas le cas en pratique. Le second point délicat de la restauration est l'estimation de la fonction de flou, à partir de l'image dégradée observée. Le problème est de pouvoir discerner dans l'image floue, la part effective de signal et celle de la PSF. Les méthodes classiques d'estimation de modèles ARMA conduisent à des résultats décevants lorsque la PSF (donc la partie MA) est de dimension importante, ce qui est un cas fréquent expérimentalement. Nous proposons, dans ces conditions, une reparamétrisation de la PSF, en liant les paramètres par une loi fixée a priori.

Dans un premier temps, nous rappelons comment obtenir des données décorrelées dans une direction [4], pour appliquer N filtres récursifs de Kalman 1D dans la direction orthogonale, et obtenir ainsi une réduction significative des coûts en calcul.

Nous montrons qu'il est possible d'obtenir un système dynamique vectoriel à matrices effectivement circulantes, en considérant l'image et son miroir.

Dans un deuxième temps nous nous intéressons à l'estimation de la P.S.F. et du modèle de l'image. Une analyse globale des données permet de sélectionner les zones de l'image propices à l'estimation du flou et du modèle sur l'image. Ces zones sont caractérisées par la propriété d'observabilité simultanée du flou et du signal image.

Nous montrons ensuite comment obtenir de manière simple et efficace une estimée de l'ordre de la PSF. L'estimation consiste alors, après reparamétrisation, en la recherche de 3 à 4 hyperparamètres, par maximisation de la fonction de vraisemblance.

Enfin, nous proposons quelques résultats de simulations de l'algorithme d'identification et restauration décrit.

MODELES ET REDUCTION DE LA DIMENSION

Modèle de l'image et modèle du flou:

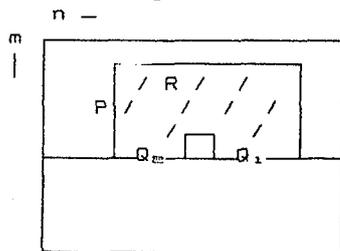
En supposant que l'image peut être représentée par un champs aléatoire Markovien, homogène gaussien de moyenne nulle, elle est modélisée par une équation d'interpolation linéaire du type [2]:

$$x(m, n) = \sum_{(p, q) \in R} a(p, q) \cdot x(m-p, n-q) + u(m, n) \tag{1}$$

où x(m,n) est l'intensité du pixel (m,n) de l'image et R définit le support du modèle. Nous choisissons R tel que le modèle soit semi-causal (cf éq. (2) et fig. 1), afin de bénéficier d'une possibilité de traitement récursif des données [3], dans une direction, verticale ou horizontale.

$$R = \{ (p, q) / (0 \leq p \leq P, -Q_1 \leq q \leq Q_2) \text{ et } (p, q) \neq (0, 0) \} \tag{2}$$

Figure 1



R = Support du modèle semi-causal

Le modèle est dit semi-causal puisqu'il est causal en m et non causal en n. Le traitement récursif des données se fera donc dans le sens vertical (m).

u(m,n) est le bruit d'entrée, indépendant des données x(m,n).

L'observation dégradée y(m,n) de l'image d'origine x(m,n), est modélisée par:

$$y(m, n) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} \sum_{l=-L_1}^{L_2} c(k, l) \cdot x(m-k, n-l) + w(m, n) \tag{3}$$

où c(k,l) est la fonction de flou (PSF) et w(m,n) est le bruit d'observation supposé blanc gaussien et non corrélé avec les données.

L'écriture vectorielle (X(m)=[x(m,1),...,x(m,N)]^T m=1..N) des équations (1) et (3), fait intervenir un modèle vectoriel AR de prédiction (équation 4.a).

$$\sum_{p=0}^P A(p) \cdot X(m-p) = U(m) \tag{4.a}$$

$$Y(m) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} C(k) \cdot X(m-k) + W(m) \tag{4.b}$$

Il est alors possible d'envisager un filtrage récursif du type Kalman sur ce modèle vectoriel, c'est-à-dire dans le sens vertical, dès l'instant où l'on a décorrélé les données dans le sens horizontal, c'est-à-dire où les matrices A(p) et C(k) sont diagonales. Or ces matrices sont des matrices bande de Toeplitz. Il est donc possible de les approximer par des matrices circulantes afin de les diagonaliser simplement par l'application d'une Transformée de Fourier Discrète (TFD). En appliquant une TFD sur les lignes de l'image, on décorrèle les colonnes de l'image transformée [4]. On obtient ainsi N systèmes 1D décorrelés, indicés par la variable de fréquence j=1..N, sur lesquels on applique N filtres de Kalman 1D en parallèle.

L'image miroir

Nous utilisons cet algorithme de réduction du système 2D à N systèmes 1D décorrelés. Pour améliorer les résultats, nous travaillons sur des vecteurs lignes de l'image et son miroir [5]. La construction est la suivante (la variable m de ligne est omise pour simplification d'écriture):

si x = [x(1), x(2) , x(N)]^T est un vecteur contenant une ligne de l'image, on construit le vecteur X de longueur 2N tel que:

$$X = [x(1) , \dots , x(N) , Z, x(N) , x(N-1) , \dots , x(2)]$$

où Z est le point central de la séquence par rapport auquel elle est symétrique. Z est calculé par interpolation polynômiale avec les points l'avoisinants x(m,N-1) et x(m,N-2).

On accole à droite de chaque ligne son symétrique, ce qui revient à prendre l'image miroir de l'image d'origine.

Chaque ligne peut ainsi être considérée comme étant infinie, 2N périodique, sans qu'il apparaisse de point de discontinuité [5]. L'image avec son miroir peut alors être considérée non plus dans le plan mais sur un cylindre, ce qui réduit les problèmes de bords dans le sens horizontal.

Avec ces conditions de bords, les matrices A(p) et C(k) sont circulantes par construction. L'approximation n'est plus nécessaire, et le système est exact sur l'image miroir.

Enfin l'utilisation de l'image miroir dans l'algorithme permet de travailler sur des données réelles. Les N systèmes 1-D obtenus après les transformées de Fourier des lignes symétriques sont entièrement réels, dès l'instant où les coefficients de la PSF sont horizontalement symétriques.

Or, les PSF sont souvent isotropes, donc symétriques dans toutes les directions (par exemple une défocalisation). Dans le cas particulier d'un bougé, elle sera symétrique dans la direction orthogonale à celle du bougé.

On remarque qu'avec le miroir, nous traitons N systèmes réels, et sans le miroir, nous traitons N/2 systèmes complexes. Le volume d'information est le même dans les deux cas.

Sur ces N systèmes 1D réels, on applique en parallèle N filtres 1D de Kalman pour la restauration. On applique ensuite N transformées de Fourier inverses sur les N lignes filtrées pour obtenir l'image restaurée.

On peut remarquer pour conclure que la transformée d'une ligne de l'image et son miroir est très proche de la Transformée en Cosinus Discrète (TCD) de la ligne. Du point de vue de la diagonalisation des matrices du systèmes ou de la décorrélation des colonnes de l'image, une étude théorique a montré que les deux algorithmes sont pratiquement équivalents [11].

IDENTIFICATION DES PARAMETRES

Nous nous proposons dans cette partie d'établir une méthode d'estimation du flou pour l'algorithme de restauration, à partir de l'observation dégradée.

En supposant que le bruit d'observation est négligeable, le problème est l'identification d'un modèle ARMA 2-D sur l'image floue. Il est remplacé, comme le problème de la restauration, par l'identification de N modèles ARMA 1-D sur les colonnes après TFD des lignes de l'image avec son miroir. Après décalage de K₁ échantillons sur les observations [5], pour le filtre de Kalman, les N modèles ARMA 1D sont:

$$Y(m, j) - \sum_{p=1}^P a(p, j) \cdot Y(m-p, j) = \sum_{k=0}^{K_1+K_2} c(k, j) \cdot U(m-k, j) \tag{5}$$

Les coefficients a(p,j) de la partie AR correspondent aux coefficients transformés du modèle sur l'image et les c(k,j) de partie MA correspondent aux coefficients transformés de la PSF [5].

Notons que la qualité de la restauration est peu sensible à une erreur sur les paramètres AR mais au contraire très sensible à une erreur sur les paramètres MA. La PSF devra être estimée avec le plus de précision possible.

Choix des données pour l'identification:

Dans ce but de précision pour l'estimateur des paramètres MA, il faut sélectionner parmi les N systèmes 1D disponibles, ceux pour lesquels la forme et la valeur de la PSF cherchée est correctement observable.

Dans le domaine spatial, un flou n'est pas observable sur des zones unies de l'image. Les parties ne contenant aucune variation d'intensité sont éliminées. Ces zones correspondent à des basses fréquences donc aux systèmes (5) pour j proche de 1.

Dans les zones très agitées et très bruitées de l'image, correspondant à des hautes fréquences, le flou détruit pratiquement toute l'information. Le signal n'est plus observable dans les colonnes proches de $j=N$.

Nous ne conservons finalement qu'une partie des N équations 1D (5), pour lesquelles les données correspondent à des contours ($1 < j_{\min} \leq j \leq j_{\max} < N$)

Le choix est aussi limité supérieurement par les zéros de la PSF dans le domaine de Fourier. En présence d'un zéro sur une fréquence j , le système dynamique correspondant est inobservable. Il faut imposer J_{\max} strictement inférieur à la fréquence du premier zéro de la PSF. Plus la PSF sera étendue, plus le nombre de colonnes susceptibles de servir à l'identification sera réduit. Typiquement, nous limitons l'identification sur les systèmes d'indice j compris au plus entre les fréquences 20 et 80.

Longueur de la PSF

Dans un premier temps, nous déterminons la longueur de la partie MA, c'est-à-dire la dimension du support de la PSF. Les méthodes d'estimation de modèles ARMA supposent en général l'ordre des parties AR et MA connu et fixé. L'ordre usuel des modèles AR du type (1) sur l'image est de 1 ou 2. L'ordre de la partie AR étant fixée a priori, il est possible d'évaluer celui de la partie MA.

La méthode utilisée est basée sur l'étude de la corrélation des échantillons du signal. Une étude de cette méthode a été faite [6], dans le cadre de l'identification de flous représentés par des PSF à coefficients constants, où seule la longueur est alors utile. Là encore, le choix des données intervient de façon prépondérante.

Il s'agit d'ôter sur le signal flou la dépendance naturelle des échantillons entre eux, afin que la corrélation restante ne soit due qu'à la convolution par la PSF. Pour cela il suffit de calculer les résidus du modèle AR de l'image par filtrage inverse du signal flou, c'est-à-dire de calculer le membre de droite de l'équation (5).

La corrélation de ce signal résiduel, donne l'information sur la longueur de la séquence $c(k,j)$, au regard du membre de gauche de l'équation (5).

Dans la pratique, les paramètres AR ne sont pas disponibles. Ils sont estimés sur les colonnes $y(.,j)$, de l'image floue.

Nous présentons sur la figure 2 la séquence de corrélation de la sortie du filtre inverse obtenu. L'information de longueur de la PSF est disponible: elle correspond à un minimum dans la séquence de corrélation. En fait cette méthode n'est pas très sensible à la qualité de l'estimateur du modèle AR. Le point fondamental est que le spectre de la fonction de transfert du modèle AR représente un filtre passe-bas pour l'image, sans zéro dans la fonction de transfert.

Figure 2: Corrélation résiduelle pour $j=40$. a) Pour un Boug sur (1x8) pixels. b) Pour un flou sur (7x7) pixels.

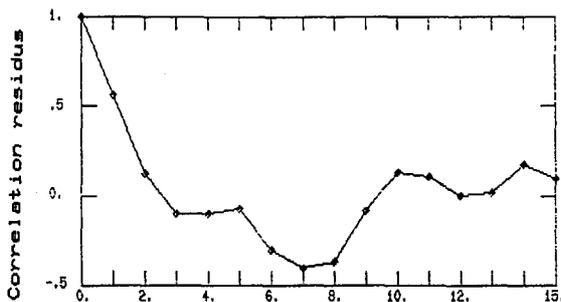


Figure 2.a.

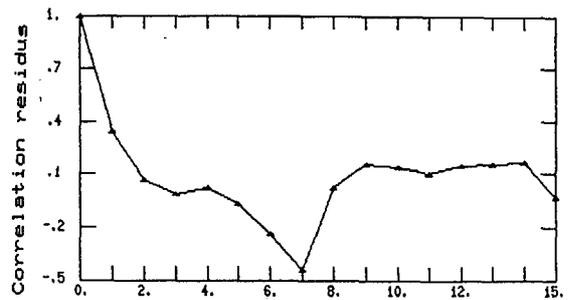


Figure 2.b.

Le Maximum de Vraisemblance avec contraintes

Une difficulté de l'estimation des paramètres est l'étendue du support de la PSF. La partie MA du modèle ARMA (4) peut être importante (5,10 voire 20 coefficients), et les méthodes d'estimation classiques des modèles ARMA [7,8] n'ont pas donné de résultats corrects. L'estimateur de la partie MA est instable et diverge parfois.

On propose de régulariser les paramètres MA par contrainte. Une reparamétrisation de la PSF permet de lier les coefficients par une loi connue a priori.

a. Les contraintes:

La régularité des coefficients de la partie MA est obtenue en contraignant ces paramètres sur une fonction continue (morceau de Gaussienne par exemple, de polynôme, ondelette...). Une deuxième contrainte est introduite assurant la conservation d'énergie de la PSF, c'est-à-dire, dans le domaine spatial:

$$\sum_{k,1} c(k,1) = 1 \quad (6)$$

Par exemple, pour une fonction gaussienne, on définit:

$$c(k,1) = \kappa \exp\left(-\frac{12+k^2}{\eta}\right) \quad (7)$$

κ est choisi tel que (<) soit vérifiée. La PSF est entièrement définie par l'estimation du seul hyperparamètre η , représentant l'écart-type de la gaussienne.

Le nombre de paramètres à estimer diminue puisque un ou deux hyperparamètres η_j suffisent à la définition de la PSF, au lieu des K_1+K_2+1 paramètres $c(i,j)$ de l'équation (5). Cette diminution s'accompagne d'une diminution de la dispersion de l'estimateur.

Les hyperparamètres seront contraints dans un ensemble tel que la PSF ainsi définie ait la longueur pré-déterminée.

b. Le critère:

La nécessité d'introduire des informations a priori et des contraintes sur les paramètres, ainsi que la sensibilité de la restauration à l'estimation de la PSF, nous ont conduit à utiliser l'estimateur du Maximum de Vraisemblance. Son utilisation permet en particulier l'introduction d'informations a priori sur les paramètres à estimer.

Le principe en est simple: étant donné l'image observée et les structures de modèles et de filtres choisies, l'estimateur de vraisemblance donne les valeurs des paramètres des modèles qui correspondent le mieux à l'image observée.

D'un point de vue formel, la fonction de vraisemblance est définie par:

$$L(\theta) = p(y/\theta) \quad (8)$$

où $y = \{y(1,j), \dots, y(N,j)\}$ est une colonne de l'image observée et $p(y/\theta)$ la fonction de probabilité conditionnelle de y connaissant l'ensemble des paramètres θ :

$$\theta = \{a(\cdot), \sigma_u^2, \eta_i, i=1, 2, \dots\} \quad (9)$$

Sous des hypothèses gaussiennes, il est possible de calculer la vraisemblance $L(\theta)$ en fonction du processus d'innovation calculé au cours du filtrage récursif de Kalman [9]. On obtient une expression simplifiée en prenant le logarithme négatif de $L(\theta)$:

$$-\log(L(\theta)) = -\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{(v(k))^2}{S(k)} + \log(S(k)) \right\} \quad (10)$$

où $v(k)$ est le processus d'innovation, calculé dans la procédure de filtrage et $S(k)$ sa covariance, égale à:

$$S(k) = c Q(k) c^T + \sigma_w^2 \quad (11)$$



$Q(k)$ est la covariance de l'erreur $(x(k) - x^c(k))$, calculée dans l'équation de Riccati du filtre de Kalman.

c. L'optimisation:

La procédure globale fait intervenir itérativement le filtre de Kalman pour restaurer l'image et calculer la vraisemblance, et l'optimisation de la fonction de vraisemblance pour le calcul des paramètres. Pour chaque évaluation de la vraisemblance $L(\theta)$, le signal $y(.j)$ est filtré avec les paramètres de θ donnés. La fonction à optimiser étant non linéaire par rapport aux paramètres à estimer, puisque calculée à travers l'équation de Riccati, une méthode de gradient est utilisée pour l'optimisation [10]. Le gradient est calculé numériquement. Cette procédure d'estimation et restauration a été utilisée en restauration d'image pour des PSF de petites dimensions [11].

RESULTATS

Nous présentons les tests effectués sur une image noir et blanc, le "Cameraman", ayant 256 niveaux de gris. Cette image est artificiellement bougée, par convolution avec une PSF définie sur 8 points dans le sens vertical par la PSF suivante:

$$c(0,1) = K \cdot \exp(-l^2/\eta) \quad l=0, \dots, 7$$

avec $\eta=25$ et K tel que la contrainte (6) soit respectée. L'image bougée est présentée sur la figure 5.a.

L'ordre du modèle AR est fixé à un. Le paramètre AR $a(1,j)$ et η estimés sur les colonnes 40 à 80 sont présentés sur les figures 3 et 4. La moyenne des η estimés est $\eta_m=29$.

L'image 5.b est le résultat de la restauration obtenue en utilisant la valeur moyenne η_m . Pour le filtrage des colonnes autres que celles comprises entre 40 et 80, le paramètre AR $a(1,j)$ est estimé sur le signal flou, par un algorithme de Burg.

CONCLUSION

Cette simulation simple montre la faisabilité de la méthode d'estimation et restauration proposée. Cet algorithme offre la possibilité d'introduire toutes les informations a priori que l'on peut déterminer, que ce soit sur le modèle de l'image ou sur la PSF. C'est un point essentiel car, plus il est possible de fixer de variables a priori, plus les inconnues restantes seront correctement estimées et l'image d'autant mieux restaurée.

Les prochaines recherches doivent porter sur des études expérimentales de défocalisations réelles. Le problème est de définir la fonction et les paramètres appropriés modélisant une défocalisation.

REFERENCES

- [1] H.C. Andrews, B.R. Hunt. "Digital image Restoration" Prentice Hall - Signal Processing Series - 1977 -
- [2] J.W. Woods, "Markov Image Modeling" IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol. AC-23, n°5, octobre 1978.
- [3] A.K. Jain "A Semi-Causal Model for Recursive Filtering in Two-Dimensional Images" IEEE Trans. on Computers, Vol. C-26, n°4, April 1977, pp. 343-350.
- [4] J. Biemond, J. Rieske, J.J. Gerbrands "A fast Kalman filter for images degraded by both blur and noise" IEEE vol. ASSP-31, n°5, octobre 1983
- [5] L.Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu, "Amélioration de la restauration d'image floues utilisant une image miroir" Revue Traitement du signal, 1988.
- [6] A.M. Tekalp, A.T. Erdem, "Image-Blur Identification by Moving Average Model Order Estimation" Signal Proc. IV, EUSIPCO Septembre 1988, Grenoble.
- [7] G. Favier, G. Salut, "Factorisation spectrale et équation de Riccati" GRETSI, Nice, 1979.
- [8] D. Graupe, D.J. Krause, and J.B. Moore, "Identification of autoregressive moving average parameters of time series" IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol AC-20, Feb. 1975, pp.104-106.
- [9] K.J. Aström, "Maximum Likelihood and Prediction Error Methods" Automatica, Vol. 16, pp. 551-574, 1980.
- [10] N.K. Gupta, R.K. Mehra "Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation and Reduction in Sensitivity Function Calculations" IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol AC-190, n°6, Dec. 1974, pp.774-783.
- [11] L. Blanc-Féraud "Modélisation d'image. Application à la compression numérique et à la restauration d'image floue." Thèse à paraître. LASSY, Université de Nice.
- [12] "R.L. Lagendijk, D.L. Angwin, H. Kaufman, J. Biemond "Recursive and iterative methods for image identification and restoration" Signal Proc. IV, EUSIPCO Septembre 1988, Grenoble., pp.235-238.

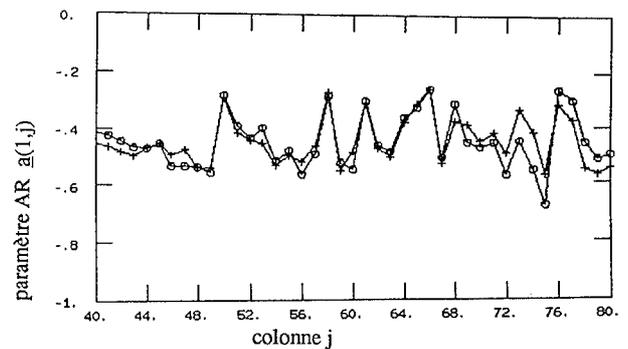


Figure 3: paramètre $a(1,j)$ estimé pour j de 40 à 80 (rond); paramètre $a(1,j)$ calculés par Burg sur les colonnes j de l'image nette d'origine (croix).

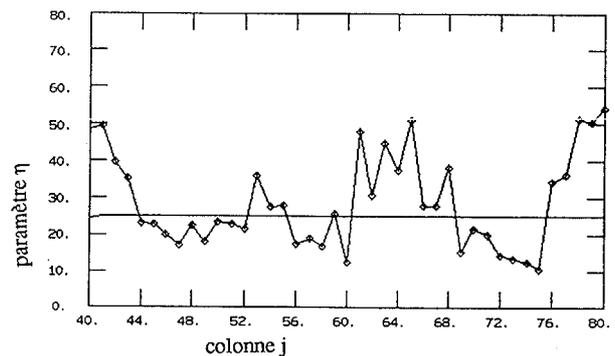


Figure 4: paramètre η estimé sur les colonnes j de 40 à 80. Valeur optimale $\eta=25$.



Figure 5.a: Image bougée sur 8 points.

PSNR = 18 dB.



Figure 5.b: Image restaurée avec les paramètres estimés. PSNR = 38 dB.