Quelques remarques concernant l'extension de la méthode de Prony-Pisarenko au cas des signaux vectoriels

Joël Le Roux,
LISAN, Université de Nice,
Parc Valrose 06034, Nice Cedex

Résumé

Le but de cette communication est de discuter la pertinence de différentes possibilités d'extension au cas des signaux vectoriels de la méthode de Prony-Pisarenko. La finalité de cette méthode est l'estimation de paramètres d'un modèle caractérisant un ensemble de signaux déterministes engendrés par un système linéaire sans entrée évoluant à partir de conditions initiales et entâchés d'un bruit de mesure blanc. La communication insiste plus particulièrement sur l'importance de la forme du bruit blanc vectoriel qui doit être considéré dans cette modélisation. Les difficultés de la mise en oeuvre pratique de cette extension de la méthode de Prony sont soulignées.

Abstract

This communication discusses the theoretical problems arising in the extension of the "Prony-Pisarenko" identification method to the analysis of vectorial signals. The purpose of this method being the modelization of deterministic signals (generated by a linear system evolving from initial condition without input) when they are measured in the presence of an additive white noise. The communication is especially concerned by the definition of the vectorial white noise that must be used in the extension. Difficulties arising in the practical implementation of the proposed extension are mentionned

1 - Introduction

La méthode de Prony-Pisarenko s'est avérée être d'un intérêt certain dans un bon nombre d'applications nécessitant la modélisation de signaux scalaires : la méthode de Pisarenko [Pisarenko, 1973], limitée au cas des signaux stationnaires a trouvé une application remarquable dans la détection de sources de signaux Sonar [Bienvenu, 1980] (on peut aussi rapprocher cette méthode de la décomposition en valeurs singulières [Klema, 1980 ; Kumaresan, 1983]) et dans l'identification des signaux sinusoïdaux entâchés d'un bruit de mesure [Gueguen, 1980]; le problème de Prony [Prony, 1795] qui correspond à l'identification d'exponentielles amorties se résoud par une méthode assimilable à la généralisation de la méthode de Pisarenko au cas des signaux non stationnaires [Koopmans, 1937 ; Weiss, 1963 ; Levin, 1964 ; Smith, 1967 ; Futura, 1970 ; Aoki, 1970 ; Van Blaricum, 1978 a et b, Henderson, 1981]. Elle nous a permis de proposer une méthode précise de modélisation spectrale particulièrement bien adaptée à l'analyse de signaux vocaux [Le Roux, 1982]. L'application de cette technique au traitement en temps réel des signaux devrait trouver rapidement un intérêt dans les applications industrielles parce qu'il est maintenant relativement facile de programmer (en virgule flottante) un processeur de traitement du signal pour qu'il réalise la mise sous forme tridiagonale d'une matrice de covariance puis la recherche de ses valeurs propres grâce à l'algorithme QR classique qui converge généralement en un très petit nombre d'itérations ; le temps de calcul requis par cette recherche de valeurs propres et de vecteurs propres n'est guère plus élevé que celui nécessité par le calcul de la matrice de covariance.

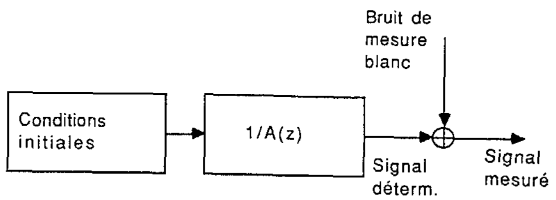

Figure 1 : Modèle de génération du signal

En ce qui concerne le rapprochement des noms de Prony et de Pisarenko, il faut noter que le travail original de Prony ne prend pas explicitement en compte le caractère probabiliste des erreurs de mesure : il envisage une solution exacte des équations. Néanmoins, lorsque le nombre de paramètres à estimer est inférieur au nombre de mesures ou encore lorsque ses calculs aboutissent à des exponentielles complexes alors qu'il cherche des exponentielles réelles, il modifie les résultats de mesure qui lui paraissent les moins corrects, en respectant l'hypothèse d'une entrée nulle. Il ne suppose pas l'existence d'une entrée sur le système modélisé, ce qui conduirait à des résultats similaires à ceux de la méthode de prédiction linéaire. C'est en général cette seconde forme de l'extension que les anglo-saxons attachent au nom de Prony (Marple, 1987).

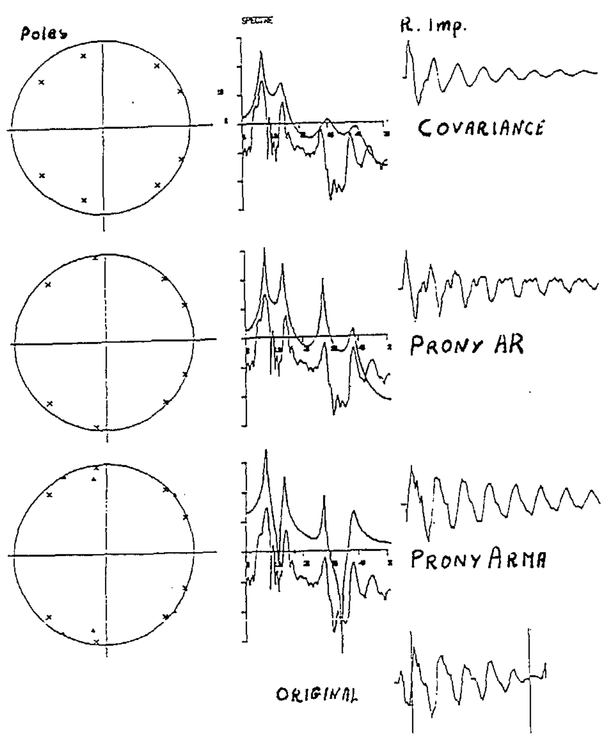

Figure 2 : Résultat de l'application du modèle au signal vocal

1.1 - La méthode scalaire

La méthode suppose que le signal analysé y(t) est la somme de deux signaux : un signal s(t) déterministe qui est la sortie d'un système linéaire 1/A(z) avec

$$A(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i z^{-i} \qquad (1)$$

évoluant à partir de conditions initiales sans action d'entrée sur ce système et un bruit v(t) de variance λ entâchant la mesure de s(t). L'équation fondamente permettant de calculer les coefficients du polynôme A(z) et la variance λ se déduit de ces hypothèses :

$$Ra = a\lambda \qquad (2)$$

où R est la matrice de covariance du signal y(t) dont les éléments sont

$$R_{m,n} = E\{y(t-m)y^*(t-n)\} \qquad (3)$$

y^* est le conjugué de y, a est un vecteur dont les composantes sont les coefficients de A(z) et λ est la plus petite valeur propre de R.

1.2 - Extensions au cas des signaux vectoriels

Quand on envisage l'extension de cette méthode au cas des signaux vectoriels, on est naturellement amené à considérer que les coefficients a_i du modèle cherché sont des matrices de dimension q. Dans ce cas, la recherche du modèle déterministe A(z) suppose la recherche d'une solution de la forme

$$(R - W)a = 0 \qquad (4)$$

où la matrice R est la covariance du signal analysé dont les blocs sont

$$R_{m,n} = E\{y(t-m)y^*(t-n)\} \qquad (5)$$

où y^* est le vecteur ligne transposé et conjugué de y. La matrice W est la matrice de covariance du bruit de mesure centré stationnaire et indépendant du signal déterministe ; la matrice (R-W) doit être définie non négative. a est une matrice de rang q comportant q lignes et (p+1)q colonnes.

L'extension de la méthode de Prony-Pisarenko suppose non seulement l'indépendance du bruit de mesure et du signal déterministe qui a conduit à (5), mais aussi la stationnarité de ce bruit de mesure. Par conséquent la matrice W devra avoir une structure de Toeplitz par blocs.

On suppose de plus que le bruit de mesure est blanc. Une extension naïve nous amène alors à utiliser la notion de bruit blanc vectoriel communément admise : toutes les composantes du bruit blanc vectoriel sont des bruits blancs et elles sont indépendantes les unes des autres sauf pour un décalage en temps nul ; la matrice de covariance du bruit de mesure est alors diagonale par blocs et tous les blocs diagonaux sont identiques. Ce choix, qui est le plus simple, doit en général être rejeté, et ceci pour deux raisons :

Premièrement, ce choix interdit *a priori* l'analyse d'un certain nombre de problèmes où cette hypothèse de blancheur est excessivement restrictive. Par exemple la méthode de Prony semble être un outil intéressant pour la modélisation des cavités résonnantes que ce soit dans le domaine des ondes électromagnétique ou celui des ondes acoustiques : dans ces deux cas, il est raisonnable de considérer que le "bruit" de mesure est dû aux composantes sinusoïdales qui se compensent mutuellement, le signal "déterministe" correspondant aux raies spectrales restantes qui forment un système d'ondes stationnaires lorsque la cavité est sans pertes. Si l'analyse vectorielle se fait en plaçant des capteurs en différents endroits de la cavité, il n'est pas réaliste de supposer que les bruits de mesure sont indépendants car les opérateurs qui font passer des uns aux autres de ces bruits sont des retards. De même, si on cherche à localiser des sources sonar en mesurant des composantes spectrales voisines du signal capté, il est probable que les bruits de mesure sur ces différentes composantes seront corrélés spatialement.

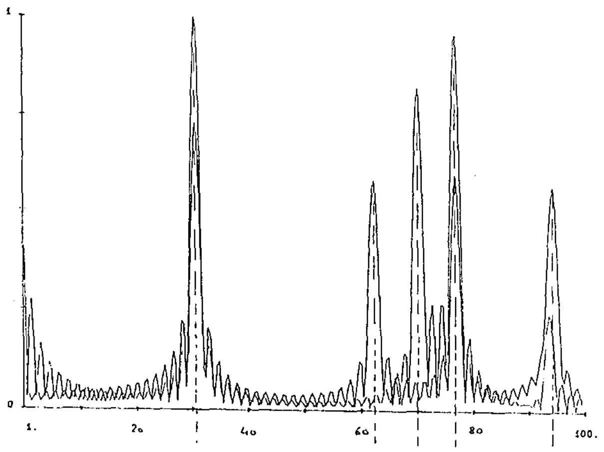

Figure 3 : Spectres de signaux électromagnétiques dans une cavité

Deuxièmement, quelques simulations ou encore l'analyse de quelques cas simples suffisent à convaincre que la soustraction d'une matrice de Toeplitz diagonale par blocs d'une matrice de covariance ne permet en général pas d'annuler simultanément q vecteurs propres de la matrice obtenue par cette soustraction (voir par exemple [Le Roux, 1985]) tout en en conservant le caractère défini non négatif.

Il est donc nécessaire d'envisager une forme plus complexe pour la matrice W. La tentative la plus naturelle consiste à supposer, dans le cas où le signal analysé n'est pas stationnaire (Prony), que le bruit de mesure, lui, est stationnaire mais pas nécessairement blanc. On peut alors montrer qu'il existe une manière unique de construire une matrice de Toeplitz par blocs et symétrique vérifiant

$$Wa = a\Lambda \qquad (6)$$

où la matrice a est la matrice des q vecteurs propres associés aux q plus petites valeurs propres de R regroupées dans la matrice diagonale Λ. Cette construction se ramène à une résolution de système linéaire. Mais cette solution est triviale dans le cas stationnaire et elle ne permet pas, en général, d'assurer le caractère défini non négatif des matrices W et (R-W).

2 - Le modèle proposé

Nous sommes ainsi amenés à proposer une généralisation de la notion de bruit blanc au cas des signaux vectoriels qui n'interdise pas l'interdépendance des différents bruits de mesure tout en assurant que pris séparément chacun de ces bruits de mesure soit blanc.

On peut alors envisager que les q bruits de mesure scalaires $v_1 \ldots v_q$ sont engendrés par q générateurs de bruits blancs scalaires indépendants $u_1 \ldots u_q$ de la manière suivante : pour m = 1, ... , q

$$v_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{mk}(t-\tau)\, u_k(\tau) \qquad (7)$$

où $\phi_{mk}(\tau)$ est la réponse impulsionnelle d'un déphaseur pur de gain constant g_{mk} dont la fonction de transfert est par exemple de la forme

$$\Phi_{mk}(z) = g_{mk} f_{mk}(z)[f_{mk}^*(z^{-1})]^{-1} \qquad (8)$$

Ce déphaseur n'est pas nécessairement causal et la fonction $f_{mk}^*(z^{-1})$ peut avoir des racines à l'extérieur du cercle unité ; de plus, on peut toujours prendre $\Phi_{mm}(z)$ égal à 1 car on ne s'intéresse qu'au déphasage relatif des bruits sur les différents capteurs.

Il est inutile d'envisager le cas où le nombre de sources de bruits indépendants serait supérieur au nombre de capteurs, car il ne serait pas possible de séparer ces bruits surnuméraires des q bruits de base.

La fonction d'autocorrélation du bruit de mesure est alors associée à la densité spectrale matricielle dont les éléments sont

$$\Omega_{mn}(z) = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} g_{mk} g_{nk}^* f_{mk}(z) f_{nk}(z^{-1})[f_{mk}^*(z^{-1}) f_{nk}^*(z)]^{-1} \qquad (9)$$

L'élément (m,n) d'un bloc distant de t de la diagonale de la matrice W Toeplitz par blocs se trouvera en calculant par transformée en z inverse la fonction d'intercorrélation associée à $\Omega_{mn}(z)$. Cette fonction d'intercorrélation est la somme pondérée de m produits de convolution de réponses impulsionnelles de déphaseurs purs ; c'est donc la somme pondérée de m (m = 1, ... , q) réponses impulsionnelles de déphaseurs ; elle n'est pas nécessairement causale.

Un exemple de la forme de cette matrice de bruit est donné ci-dessous lorsque le nombre q de mesures et le degré p du modèle sont égaux à deux ; les éléments diagonaux des blocs non diagonaux sont nuls car les bruits de mesure pris indépendamment sont blancs :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \dot{\alpha}_{01} & 0 & \dot{\beta}_{01} & 0 & \dot{\gamma}_{01} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \dot{\beta}_{10} & 0 & \dot{\gamma}_{10} & 0 \\ 0 & \beta_{10} & \alpha_{00} & \dot{\alpha}_{01} & 0 & \dot{\beta}_{01} \\ \beta_{01} & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{11} & \dot{\beta}_{10} & 0 \\ 0 & \gamma_{10} & 0 & \beta_{10} & \alpha_{00} & \dot{\alpha}_{01} \\ \gamma_{01} & 0 & \beta_{01} & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

Remarque : Cette construction de la matrice de corrélation des bruits de mesure se fait à partir de la donnée des déphaseurs qui agissent sur les sources de bruits ; réciproquement, on peut se demander si toute matrice de Toeplitz par blocs de cette forme (définie positive et dont les éléments diagonaux des blocs non diagonaux sont nuls) peut être associée à un ensemble de bruits blancs vectoriels et de déphaseurs ; si cette association n'est pas toujours possible, il faudrait alors tenter d'affiner la connaissance des propriétés de cette matrice de corrélation des bruits. Cependant, comme il est toujours possible de trouver un déphaseur pur, causal ou non, dont la valeur de la réponse impulsionnelle est connue pour q échantillons consécutifs, il est probable qu'une matrice de la forme W soit suffisante pour caractériser un bruit blanc vectoriel.

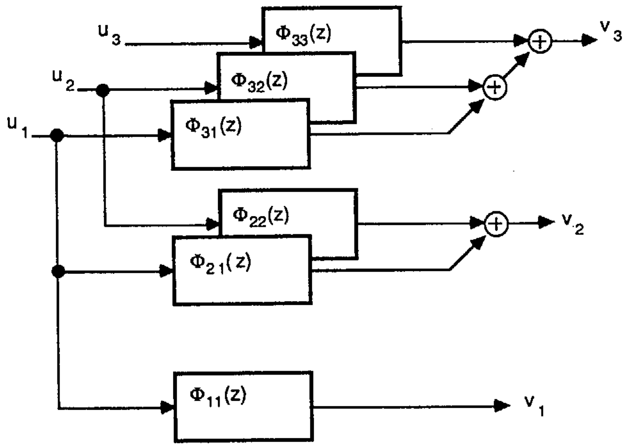

Figure 4 : Modèle de bruit blanc vectoriel

3 - Problèmes posés par la recherche d'une solution correspondant au modèle proposé.

Une première difficulté, analogue à celle qui apparaît dans l'extension où la matrice de bruit est diagonale par blocs, est dûe au fait que rien ne dit que le problème a une solution

$$(R-W)a = 0 \qquad (10)$$

$$(R-W) \geq 0 \qquad (11)$$

Dans les deux cas on peut tenter de pallier cette difficulté en cherchant une solution approchée : quelle est la matrice W (respectant les contraintes du modèle de bruit) qui minimise la plus grande des q plus petites valeurs propres de (R-W). Si on envisage d'utiliser cette approche, le modèle de bruit proposé ici devrait permettre de trouver une valeur inférieure pour ce minimum, parce que ce modèle inclut le précédent tout en possédant un plus grand nombre de degrés de liberté.

Actuellement nous sommes réduits à rechercher une éventuelle solution par approximations successives :

1 - Initialisation des valeurs de g_{mk} et des coefficients de $f_{mk}(z)$ de $\Omega_{mn}(z)$

2 - Calcul de la matrice de corrélation W associée

3 - Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de R-W

4 - Recherche du sens des petites variations des valeurs de g_{mk} et des coefficients de $f_{mk}(z)$ qui diminue la plus grande des q plus petites valeurs propres de (R-w).

5 - Réactualisation des valeurs de $\Omega_{mn}(z)$ et de W compte tenu de ce sens de variation

6 - Répétition des étapes 2, 3, 4 et 5 jusqu'à l'obtention d'un point d'équilibre

On peut éventuellement simplifier cette séquence d'opérations si on suppose que toute matrice W définie positive peut être associée à une façon d'engendrer les bruits de mesure (cf. la remarque du deuxième paragraphe). Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de repasser dans le domaine fréquentiel et la réactualisation des coefficients se fait directement sur les éléments de la matrice W.

Une fois le modèle récursif calculé, on peut trouver un estimateur du signal déterministe en calculant les conditions initiales qui minimisent l'écart quadratique entre le signal évoluant à partir de ces conditions initiales et le signal mesuré ; cette estimation nécessite le calcul préalable de la réponse impulsionnelle du modèle récursif 1/A(z) et se ramène à une résolution d'un système linéaire d'équations de type Wiener-Hopf tout comme dans le cas scalaire (cf. [Le Roux, 1982]).

4 - Conclusion

Nous avons proposé dans cette communication d'envisager une forme de bruit de mesure qui permet d'étendre la méthode d'identification de Prony-Pisarenko au cas des signaux vectoriels. Il s'avère que l'extension ainsi proposée soulève encore des difficultés d'ordre théorique qui pourraient peut-être s'étudier à partir de l'analyse des propriétés des réponses impulsionnelles des déphaseurs purs. L'implantation d'une méthode d'identification fondée sur ce modèle de bruit pose elle aussi de sérieuses difficultés : la solution particulièrement élégante qui, dans le cas scalaire, consiste à rechercher un vecteur propre est remplacée par une recherche "à tatons" qui tente de se rapprocher autant que possible d'un minimum (éventuellement local) d'une fonction ; il faut ensuite vérifier si le minimum de cette fonction est bien la solution recherchée (si cette dernière existe).

Même si les difficultés soulevées par l'approche proposée sont sérieuses, et bien qu'elle pose sans doute plus de problèmes qu'elle n'en résoud, il reste que les tentatives d'une formulation plus simple de l'extension de la méthode de Prony sont particulièrement restrictives et ne pourront traiter de façon réaliste qu'un nombre limité de problèmes respectant des hypothèses excessivement contraignantes.

Je remercie Albert Papiernik, Dominique Pompéi et Jean-Loup Dubard du laboratoire d'électronique de l'université de Nice pour les discussions fructueuses qui ont abouti à l'utilisation de cette technique de modélisation en analyse de signaux électromagnétiques dans les cavités résonnantes et les antennes et pour m'avoir fourni l'exemple de la figure 3.

Références bibliographiques

M. Aoki and P. Yue, "On *a priori* error estimates of some identification methods", IEEE trans. on Automatic Control, vol AC-15, n° 5, Oct. 1970, pp 541-548.

G. Bienvenu and L. Kopp, "Adaptivity to background noise spatial coherence for high resolution passive methods", Int. Conf. on ASSP, Denver, 1980, pp 307-310.

K. Futura and J. G. Paquet, "On the identification of time-invariant discrete processes", IEEE trans. on Automatic Control, vol. AC-15, 1970, pp 153-155.

C. Gueguen, Y. Grenier and F. Giannella, "Factorial linear modelling, algorithms and applications", Int. Conf. on ASSP, Denver, 1980, pp 618-621.

T. L. Henderson, "Geometric methods for determining system poles from transient responses", IEEE trans. on ASSP, vol. ASSP-29, n°5, Oct. 1981, pp 982-988.

V. C. Klema and A. J. Laub, "The singular value decomposition : its computation and some applications", IEEE trans. on Automatic Control, vol AC-25, n° 2, April 1980, pp 164-176.

T. J. Koopmans, "Linear regression analysis of economics time series", De Erven F. Bohn, N.V. Haarlem, The netherlands, 1937.

R. Kumaresan and D. W. Tufts, "estimating the angles of arrival of multiple plane waves", IEEE trans AES-19, 1983, pp 123-133.

J . Le Roux, "Sur les algorithmes de factorisation spectrale dans le cas des signaux stationnaires échantillonnés", Thèse de doctorat d'état, Université de Nice, Octobre 1985.

J. Le Roux and F. Giannella, "Whiteness of the measurement noise as a criterion for ARMA modelization of speech", Int. Conf. on ASSP, Paris, May 1982.

M.J. Levin, "Estimation of a system pulse transfer function in the presence of noise", IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC-9, n° 5, July 1964, pp 229-235.

S. L. Marple, "Digital spectral analysis with applications", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.

F. V. Pisarenko, "The retrivial of harmonics from a covariance function", Geophysics J.R., Astr. Soc. n° 33, 1973, pp 347-366.

R. Prony, "Essai expérimental et analytique sur la loi de la dilatabilité des fluides élastiques et des vapeurs de l'alkool à différentes températures", J. de l'école Polytechnique, n° 1, Floréal et Prairial, an III (1795), pp 24-80.

F. W. Smith and W. B. Hilton, "Monte Carlo evaluation of methods for pulse transfer function estimation", IEEE trans. on Automatic Control, vol AC-12, 1967, pp 568-576.

M. L. Van Blaricum, "A review of Prony's method techniques for parameter estimation", proc. RADC conf. on Spectrum estimation", 1978, pp 125-135.

M. L. Van Blaricum and R. Mittra, "Problems and solutions associated with Prony's methods for procerssing transient data", IEEE trans. on Antenna and Propagation, vol AP-26, n° 1, January 1978, pp 174-182.

L. Weiss and R. N. McDonough, "Prony's method, z-transforms and Padé approximations", SIAM Rev., vol. 5, n° 2, April 1963, pp 145-149.