

REDUCTION DE MODELE ET TRAITEMENT D'ANTENNE

J-P. LE CADRE, P. RAVAZZOLA

IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, FRANCE
 GERDSM, Le Brusac, 83140 Six Fours Les Plages, FRANCE

RÉSUMÉ

Le but de cet article est de présenter de nouvelles méthodes de traitement d'antenne applicables à des réseaux linéaires passifs. Le principe de base consiste à modéliser les sorties de capteurs par un système linéaire, puis à estimer le modèle le mieux adapté (au sens d'un certain critère). Cet article donne des solutions efficaces à des problèmes fondamentaux tels que : approximation par une matrice de Toeplitz de rang donné, détection des sources faibles, bruit additif de corrélation (spatiale) inconnue. Les méthodes présentées ont des avantages certains vis-à-vis des méthodes usuelles, sont d'une utilisation simple et peu coûteuse ; ces affirmations sont étayées par des résultats de simulation.

SUMMARY

The aim of this paper is to present new array processing methods for passive linear arrays. The basic idea consists in modelling the sensor outputs by a linear system, then in estimating the best suited model (for a given criterion). This paper provides efficient solutions to basic problems as : approximation by a Toeplitz matrix of given rank, detection of small sources, additive noise with unknown (spatial) correlation. The presented methods represent considerable improvements with respect to the usual ones, are easy to use and inexpensive; these claims are supported with simulation results.

1 - INTRODUCTION

La modélisation des sorties des capteurs d'une antenne linéaire à capteurs équirépartis par un système linéaire s'avère être un outil puissant, en particulier pour prendre en compte des hypothèses fondamentales relatives à la propagation (hypothèse "onde plane") ou au bruit additif. Ainsi la modélisation de ces sorties par un système linéaire est un moyen efficace pour séparer les contributions respectives des sources et du bruit même dans le cas où les corrélations spatiales de celui-ci sont inconnues. Cette propriété représente une amélioration considérable par rapport aux méthodes haute-résolution usuelles [1].

Les méthodes de réalisation (stochastique) approchées donnent une solution convenable au problème posé ci-dessus ; toutefois elles laissent dans l'ombre le problème fondamental suivant: trouver une estimation du sous-espace source qui préserve la structure onde plane. On doit alors considérer le problème suivant : estimer une matrice de Toeplitz (de rang donné) qui approxime au mieux une autre matrice de Toeplitz, cette fois de rang maximal (ie : nombre de capteurs) ; ceci afin de préserver la structure particulière (Toeplitz ou Hankel) induite par les hypothèses "onde plane" et de stationnarité spatiale. La théorie de l'approximation des fonctions rationnelles dans les espaces de Hardy développée par Adamjan, Arov et Krein constitue le cadre théorique de la solution du problème ci-dessus ; le problème initial qui nécessite l'utilisation de matrices de dimension infinie est ensuite traduit en un autre, cette fois de dimension finie, en utilisant les propriétés des systèmes linéaires (de dimension finie) et des réalisations équilibrées. Un autre avantage de cette approche provient de l'utilisation d'une norme L_∞ à la place d'une norme L_2 , permettant d'estimer un modèle "collant"

mieux aux variations locales du spectre spatial et donc d'améliorer la détection des sources faibles.

La méthode proposée nécessite seulement la résolution d'un problème d'éléments propres généralisés (se réduisant le plus souvent à un problème simple). Des résultats de simulation présentent des comparaisons entre les approches évoquées ci-dessus et les méthodes haute-résolution usuelles et essayent de mettre en évidence les avantages des premières.

2 - DESCRIPTION DES SORTIES DE CAPTEURS PAR UN SYSTEME LINEAIRE

Sous l'hypothèse onde plane et à une fréquence donnée (omise pour la suite), la sortie du i -ème capteur de l'antenne s'écrit :

$$y_i = \sum_{k=1}^m \alpha_k \exp[-j(i-1)\phi_k] + v_i \quad j^2 = -1 \quad (1)$$

où m est le nombre de sources, α_k est l'amplitude aléatoire du signal porté par la k -ème onde, ϕ_k représente le déphasage déterministe (facteur de propagation) relatif à cette onde entre deux capteurs successifs, et $\{v_i\}$ est un bruit additif gaussien de moyenne nulle.

On se propose de représenter les sorties des capteurs par un modèle ARMA à phase minimale dont le modèle des innovations est de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{F} \mathbf{X}_i + \mathbf{T} w_i \\ y_i = \mathbf{h}^* \mathbf{X}_i + w_i \end{cases} \quad (2)$$

où $\{w_i\}$ est un bruit blanc gaussien centré de densité spatiale σ_w^2 . La fonction de transfert de ce modèle et sa densité spatiale se



déduisent aisément de (2), soit :

$$\begin{cases} H_m(z) = \mathbf{h}^* (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{T} + 1 \\ \gamma_m(z) = \sigma_w^2 H_m(z) H_m^*(z^{-1}) \end{cases} \quad (3)$$

$H_m(z)$ étant invariant par changement de base, on montre que les pôles du modèle sont les valeurs propres de la matrice de transition \mathbf{F} . On peut mettre cette représentation en parallèle avec une représentation usuelle qui modélise le signal reçu comme la somme de m ondes planes (modèle AR d'ordre m avec tous ses pôles sur le cercle unité $\mathcal{C}(0,1)$, de fonction de transfert $1/A_s(z)$) et d'un bruit (modèle ARMA spatial de fonction de transfert $B_b(z)/A_b(z)$) ; alors la densité spatiale de ce processus s'écrit :

$$\gamma_m(z) = \frac{N(z)}{A_s(z) A_s^*(z^{-1}) A_b(z) A_b^*(z^{-1})} \quad (4)$$

Lorsque le signal reçu par les capteurs est modélisable par le système linéaire (2), il y a égalité entre ces deux expressions de la densité spatiale ; ce qui implique que les valeurs propres de \mathbf{F} sont les pôles du signal reçu, les valeurs propres de module 1 (ou proches) correspondant aux pôles liés aux sources.

Le problème consiste à déterminer \mathbf{F} , la matrice d'observabilité \mathcal{O} du système joue un rôle fondamental :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^* \\ \mathbf{h}^* \mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{h}^* \mathbf{F}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

La connaissance de \mathcal{O} permet de déterminer aisément \mathbf{F} . Introduisant les notions de futur et passé ie :

$\mathbf{Y}_{i,+} = [y_i, y_{i+1}, \dots]^T$ futur des observations au i -ème capteur

$\mathbf{Y}_{i,-} = [y_{i-1}, y_{i-2}, \dots]^T$ passé de celles-ci

L'approche stochastique consiste à déterminer un vecteur d'état \mathbf{X}_i résumant toute l'information passée pour prédire de façon optimale (au sens d'un certain critère) l'espace des observations futures, ce qui se formalise par la propriété classique [2] :

Prop. 1 : L'état d'un modèle d'état à phase minimale résume le passé des observations ($\mathbf{X}_i = \mathbf{A} \mathbf{Y}_{i,-}$, $\mathbf{A} (p, n)$) et permet de prédire le futur de celles-ci ($\mathbf{Y}_{i,+} | \mathbf{Y}_{i,-} = \mathcal{O} \mathbf{X}_i$).

Les méthodes de réalisation stochastique [3], [4] consistent à déterminer la matrice \mathbf{A} résumant au mieux le passé au sens d'un certain critère.

3- ALGORITHMES DE REALISATION STOCHASTIQUE

Divers critères ont été proposés dans ce but, nous les exposerons brièvement en insistant sur les liens qui existent entre eux [2], [5].

3.1 - Critère d'efficacité de la prédiction [3]

Il consiste à chercher la matrice $\mathbf{A} (p, n)$ minimisant la variance de l'erreur de prédiction, ie :

$$\text{Min}_{\mathbf{A}} \text{tr} [\text{cov}(\mathbf{Y}_+ - \mathbf{Y}_+ | \mathbf{X})]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_-$$

ce qui conduit au problème suivant :

$$\text{Min}_{\mathbf{A}} \left\{ \text{tr} \left[\Gamma_+ - \mathbf{H} \mathbf{A}^* (\mathbf{A} \Gamma_- \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H}^* \right] \right\} \quad (6)$$

$$\left(\Gamma_+ \equiv \mathbf{E}(\mathbf{Y}_+ \mathbf{Y}_+^*), \Gamma_- \equiv \mathbf{E}(\mathbf{Y}_- \mathbf{Y}_-^*), \mathbf{H} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{Y}_+ \mathbf{Y}_-^*) \right)$$

Il est à noter que \mathbf{A} possède théoriquement une structure particulière, ie :

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{T}, (\mathbf{F} - \mathbf{T} \mathbf{h}^*) \mathbf{T}, \dots, (\mathbf{F} - \mathbf{T} \mathbf{h}^*)^{n_2-1} \mathbf{T} \right] \quad (7)$$

($n_2 \equiv \frac{n}{2}$, nombre de capteurs = n)

Cependant, il est impossible dans le cas général de prendre en compte cette structure particulière de \mathbf{A} pour minimiser le cri-

tère défini par (6). Oubliant la structure particulière de \mathbf{A} , le minimisation de (6) se résume à un problème d'algèbre linéaire qui est résolu simplement par décomposition en éléments propres de la matrice (hermitienne) $\mathbf{H} \Gamma_-^{-1} \mathbf{H}^*$, ie :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}_1^* \mathbf{H} \Gamma_-^{-1} \quad (8)$$

où \mathbf{B} est une matrice inversible quelconque et $(\Sigma_1^{-1}, \mathbf{U}_1)$ sont

les p composantes principales de $\mathbf{H} \Gamma_-^{-1} \mathbf{H}^*$.

Un critère légèrement différent a été développé par Desai et Pal [4].

3.2 - Méthode des coefficients de corrélation canoniques

Cette approche est basée sur le fait que l'information sur \mathbf{Y}_+ qui est "contenue" dans \mathbf{Y}_- peut s'exprimer grâce à quelques paramètres indiquant le degré de dépendance du futur vis-à-vis du passé (les coefficients de corrélation canoniques). Ceci conduit en fait [5] à définir la fonctionnelle d'information mutuelle I :

$$I(\mathbf{Y}_+, \mathbf{X}) = \mathcal{H}(\mathbf{Y}_+) + \mathcal{H}(\mathbf{X}) - \mathcal{H}\left(\frac{\mathbf{Y}_+}{\mathbf{X}}\right) \quad (9)$$

($\mathcal{H}(\mathbf{X})$: entropie du vecteur gaussien \mathbf{X})

L'estimation de l'état \mathbf{X} ($\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_-$) maximisant cette fonctionnelle d'information mutuelle conduit au problème numérique :

$$\text{Min}_{\mathbf{A}} \left\{ \det \left[\Gamma_+ - \mathbf{H} \mathbf{A}^* (\mathbf{A} \Gamma_- \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H}^* \right] \right\} \quad (10)$$

Notons que les deux critères (6) et (10) ne diffèrent que par la fonctionnelle utilisée (tr ou det), le problème de minimisation est résolu par décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$\Gamma_+^{-1/2} \mathbf{H} (\Gamma_-^{-1/2})^* \quad [2].$$

La matrice \mathbf{A} étant estimée, \mathbf{F} peut en être déduite par deux méthodes puisque :

$$\begin{cases} \mathcal{O} \mathbf{A} = \mathbf{H} \Gamma_-^{-1} \text{ et } \mathcal{O}^\dagger \mathbf{F} = \mathcal{O}^\dagger \\ \text{ou} \\ \mathbf{X}_{i+1} | \mathbf{X}_i = \mathbf{F} \mathbf{X}_i \end{cases} \quad [2] \quad (11)$$

3.3 - Liens avec le traitement d'antenne

Dans le cas d'un bruit additif spatialement blanc, on montre aisément [5] que $\mathbf{H} \Gamma_- \mathbf{H}^* = \mathcal{D} \Delta \mathcal{D}^*$ (\mathcal{D} : matrice des vecteurs sources), ce qui permet de relier ce qui précède aux méthodes usuelles de traitement d'antenne. Ceci est notablement plus compliqué dans le cas d'un bruit non blanc.

On peut montrer [5] que les lignes de \mathbf{A} minimisent les angles principaux entre les images de Γ_- et $(\mathbf{H}^* \mathbf{H})$. Sous l'hypothèse que la longueur de corrélation du bruit est courte, \mathbf{H} est perturbée par "seulement" une petite matrice triangulaire et les vecteurs de $\mathcal{S}m(\mathbf{H}^* \mathbf{H}) \cap \mathcal{S}m(\Gamma_-)$ sont principalement reliés aux vecteurs sources.

3.4 - Conclusions

Les méthodes proposées sont des méthodes de réalisation approchées, car la structure de \mathbf{A} n'est pas prise en compte. Leur intérêt est cependant évident [2], en particulier lorsque le bruit additif est de corrélation inconnue.

La prise en compte de la structure du problème (celle de \mathbf{A} par exemple), semble quasiment impossible dans le cas général en utilisant les techniques d'algèbre linéaire, par contre, la théorie de l'approximation de fonctions s'avère être un moyen efficace pour résoudre le problème.

4 - METHODES DE REALISATION OPTIMALES

L'approximation d'un système linéaire par un autre d'ordre inférieur représente une part importante de la littérature en automatique : toutefois cette théorie ne semble pas (à première vue) très adaptée au traitement d'antenne, l'exposé qui suit fait la preuve du contraire.

4.1 - Cadre général de ces méthodes

Les sorties de capteurs sont modélisées par un modèle paramétrique d'ordre maximal dans un premier temps, dans ce cas ce sera un modèle AR d'ordre maximal (ie égal au nombre de capteurs). Le choix de ce modèle est justifié d'une part par le fait

qu'il est le plus aléatoire dans le cas d'une antenne linéaire à capteurs équirépartis (ie maximisant l'entropie) et d'autre part par le fait qu'il est toujours possible de reconstruire les covariances (Γ) de l'observation à partir de celui-ci. C'est simplement une autre représentation de celles-ci. Un modèle d'état des sorties des capteurs peut être aisément déduit de celui-ci et il est alors possible d'utiliser les méthodes optimales de réduction de modèle [6]. On désire obtenir une approximation exacte, préservant la structure (onde plane) et n'utilisant pas les méthodes d'approximations usuelles au sens des moindres carrés (conduisant habituellement à des méthodes d'analyse en composantes principales). On se ramène pour cela à un problème d'approximation de fonctions (de transfert), le théorème de Adamjan, Arov et Krein (AAK) constitue la clé de cette approximation bien qu'il utilise des matrices de dimension infinie. Fort heureusement, il est possible de traduire ce problème en un autre de dimension finie (en utilisant la structure finie) et donc de construire un algorithme utilisable.

4.2 - Formulation du problème

La fonction de transfert $f(z)$ d'un modèle d'état étant donnée, ie $f(z) = \mathbf{h}^* (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{T} + 1$, on cherche une approximation (pour une norme donnée) de cette fonction par une fonction de transfert d'un système d'ordre inférieur.

L'utilisation de la norme L_∞ nous semble préférable pour la détection des sources faibles, ce qui nous amène à considérer le problème d'approximation ci-dessous.

Prob. 1 : Etant donnée $f \in L_\infty$ et un entier positif k , déterminer :

$$\inf \left(\|f - \varphi\|_\infty : \varphi \in H_{\infty,k} \right) \quad (12)$$

et une fonction φ_k (de $H_{\infty,k}$) pour laquelle le minimum est atteint.

$H_{\infty,k}$ est l'ensemble des fonctions méromorphes de L_∞ ($\|f\|_\infty = \sup |f(z)| ; z \in \mathcal{E}(0,1)$) qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_k)} \quad (13)$$

où : $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{D}(0,1)$ et $g \in H_\infty$

Pour cette définition, H_∞ est le sous-espace des fonctions de L_∞ pour lesquelles $c(n) = 0$ pour $n > 0$ ($c(n)$ étant le n -ième coefficient de Fourier de f relativement à la base complète (z^{-n}) , $z = \exp(j\theta)$).

Ce problème a été résolu par AAK, sa solution consiste à utiliser la matrice de Hankel définie pour une fonction f relativement à une base z^{-1}, z^{-2}, \dots dans $L_2 \ominus H_2$ définie par :

$$H_f = \begin{bmatrix} c(1)c(2)c(3) & \dots \\ c(2)c(3)c(4) & \dots \\ c(3)c(4)c(5) & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (14)$$

alors un premier résultat permet de comprendre l'intérêt de cette matrice.

Rés. 1 : $\|H_f\|_\infty = \text{dist}_{L_\infty}(f, H_\infty)$. La fonction de H_∞ qui minimise cette distance étant donnée par le théorème de Néhari [7]. De plus, le théorème de Kronecker permet de préciser la nature de la solution.

Théorème de Kronecker : Soit $f \in L_\infty$, alors H_f est de rang fini $\leq k$ si et seulement si $f \in H_{\infty,k}$.

Le théorème de AAK donne une solution explicite au Prob. 1.

Théorème (AAK) : Soit $f \in L_\infty$ et $k \geq 0$. Alors : $\text{dist}_{L_\infty}(f, H_{\infty,k}) = \sigma_{k+1}(H_f)$ où les $\{\sigma_i\}$ sont les valeurs singulières de H_f rangées par valeurs décroissantes, de plus cette distance est atteinte pour une unique fonction $\varphi_k \in H_{\infty,k}$ donnée par la formule ci-dessous :

$$\varphi_k(z) = f(z) - [H_f \mathbf{v}_{k+1}](z) / v_{k+1}(z)$$

$$\text{où : } [H_f \mathbf{v}_{k+1}](z) \equiv \Pi. (f(z) \mathbf{v}_{k+1}(z))$$

\mathbf{v}_{k+1} : vecteur singulier de H_f correspondant à $\sigma_{k+1}(H_f)$

et les opérateurs Π et Π_+ sont définis par :

$$\Pi. \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i z^{-i} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i z^{-i}, \quad \Pi_+ = \mathbf{I} - \Pi. \quad (15)$$

on obtient alors :

$$\varphi_k(z) = f(z) - \sigma_{k+1} \frac{u_{k+1}(z)}{v_{k+1}(z)} \quad (16)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} u_{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} u_j^{k+1} z^{-j} \\ v_{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} v_j^{k+1} z^{j-1} \end{cases}$$

Ce résultat est explicite mais a l'inconvénient d'utiliser la matrice de Hankel H_f et ses vecteurs singuliers qui ne sont évidemment pas accessibles (antenne à nombre fini de capteurs). L'utilisation d'un modèle fini de représentation des sorties de capteurs permet de transformer ce problème en dimension finie.

4.3 - Implication de la structure finie [8]

Rappelons en premier lieu l'égalité classique $H = \theta \mathcal{E}(\mathcal{E} : \text{matrice de commandabilité du système})$, par conséquent :

$$\begin{aligned} \sigma_i(H^* H) &= \sigma_i(\mathcal{E}^* \mathcal{O}^* \mathcal{O} \mathcal{E}) = \sigma_i(\mathcal{E} \mathcal{E}^* \mathcal{O} \mathcal{O}^*) \\ &= \sigma_i(P Q) \end{aligned}$$

où P et Q sont respectivement les gramiens de commandabilité et d'observabilité. Les matrices P et Q dépendent fortement des coordonnées du modèle d'état mais non les valeurs singulières de leur produit $P Q$, de plus ce produit matriciel présente le grand intérêt d'être de dimension finie.

Supposons que la partie strictement propre de la fonction de transfert soit :

$$f(z) = \mathbf{h}^* (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{T} = n(z) / d(z)$$

avec :

$$d(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})$$

En utilisant une transformation en un système équilibré (ie : les gramiens d'observabilité et de commandabilité sont simultanément diagonaux), on peut obtenir des expressions plus simples des fonctions $u_i(z)$ et $v_i(z)$.

Plus précisément, soit $H = H_f$ et \mathcal{E} une transformation équilibrante.

$$(\mathbf{F}, \mathbf{h}^*, \mathbf{T}) \rightarrow (\mathbf{F}_b, \mathbf{h}_b^*, \mathbf{T}_b) \quad (\text{triplet équilibré}), \text{ alors si}$$

$$H = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}, \text{ on a } \mathcal{O}_b = \mathbf{U} \Sigma^{1/2} \text{ et } \mathcal{E}_b = \Sigma^{1/2} \mathbf{V}$$

Par conséquent :

$$\mathbf{u}_i = \mathcal{O}_b \Sigma^{-1/2} \mathbf{e}_i$$

(\mathbf{e}_i i -ème vecteur colonne de la matrice identité et \mathbf{u}_i i -ème vecteur colonne de \mathbf{U})

D'où, on déduit aisément que :

$$\mathbf{u}_i(z) = \sigma_i^{-1/2} \mathbf{h}_b^* (z\mathbf{I}_n - \mathbf{F}_b)^{-1} \mathbf{e}_i \quad (18)$$

De la même façon, on obtient :

$$\mathbf{v}_i(z) = \sigma_i^{-1/2} \mathbf{T}_b^* (\mathbf{I}_n - z\mathbf{F}_b^*)^{-1} \mathbf{e}_i \quad (19)$$

Le fait fondamental est que cette dernière égalité peut être aisément modifiée par une propriété classique des systèmes équilibrés [6].

Prop. 2 : Les égalités ci-dessous sont vérifiées dans le cas d'un système SISO :

$$\mathbf{F}_b^* = \mathbf{Q} \mathbf{F}_b \mathbf{Q}^* ; \mathbf{T} = \mathbf{Q}^* \mathbf{h}^* ; \mathbf{Q} \text{ matrice diagonale unitaire.}$$

D'après l'égalité (18), on voit que $u_i(z)$ a une forme rationnelle, ie $u_i(z) = \frac{m(z)}{d(z)}$

$$\text{alors (19) et la Prop. 2 permettent d'écrire } v_i(z) \text{ en fonction de } u_i(z), \text{ soit encore :} \quad (20)$$



$$v_i(z) = q_i z^{-1} \bar{u}_i(z^{-1}) = q_i \frac{\tilde{m}(z)}{\tilde{d}(z)} \quad (\text{avec } |q_i|^2 = 1) \quad (21)$$

où q_i est le i -ème élément de la diagonale de Q et $\tilde{m}(z)$

(resp. $\tilde{d}(z)$) les polynômes inversés de $m(z)$ (resp. $d(z)$), ie :

$$\tilde{m}(z) = z^{n-1} \bar{m}(z^{-1}) \quad (\text{resp. } \tilde{d}(z) = z^n \bar{d}(z^{-1}))$$

D'après le théorème de AAK la meilleure L_∞ -approximation d'ordre k de la fonction de transfert initiale est déterminée par :

$$\varphi_k(z) = \frac{n(z)}{d(z)} - q_{k+1} \sigma_{k+1} \frac{m(z) \tilde{d}(z)}{\tilde{m}(z) d(z)} = \frac{q(z)}{d(z) \tilde{m}(z)} \quad (22)$$

De plus, on peut prouver (en utilisant des propriétés élémentaires des fonctions de la variable complexe) que la fraction rationnelle $q(z)/d(z)$ est en fait un polynôme $p(z)$ de degré $< n$, on obtient donc :

$$\varphi_k(z) = \frac{p(z)}{\tilde{m}(z)} \quad (23)$$

avec :

$$p(z) = \frac{n(z) \tilde{m}(z) - \lambda \tilde{d}(z) m(z)}{d(z)} \quad (\lambda = q_{k+1} \sigma_{k+1})$$

Cette dernière forme de $\varphi_k(z)$ permet de déterminer les coefficients du polynôme $m(z)$ en résolvant l'équation polynomiale ci-dessous :

$$p(z) d(z) = n(z) \tilde{m}(z) - \lambda \tilde{d}(z) m(z) \quad (24)$$

Il faut noter, à ce point, que le calcul de $m(z)$ qui est le dénominateur de $\varphi_k(z)$ s'avère suffisant en traitement d'antenne où on cherche en fait à estimer les gisements des sources. La résolution de cette équation a donc une importance fondamentale.

4.4 - Résolution de l'équation polynomiale

En égalant les diverses puissances de z [8], on déduit de (24) les deux équations matricielles ci-dessous :

$$J S_2 J \mathbf{p} = R_2 \bar{\mathbf{m}} - \lambda J \bar{S}_1 J \mathbf{m} \quad (z^i : i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (25)$$

$$S_1 \mathbf{p} = R_1 \bar{\mathbf{m}} - \lambda \bar{S}_2 \mathbf{m} \quad (z^i : i = n, \dots, 2n-1) \quad (26)$$

avec les notations ci-dessous :

$$\begin{cases} n(z) = c_n + c_{n-1}z + \dots + c_1 z^{n-1} \\ d(z) = a_n + a_{n-1}z + \dots + a_1 z^{n-1} + z^n \\ m(z) = m_{n-1} + m_{n-2}z + \dots + m_0 z^{n-1} \\ p(z) = p_{n-1} + p_{n-2}z + \dots + p_0 z^{n-1} \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \\ a_{n-2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_n & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & c_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} c_n & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ c_2 & \dots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

J : matrice antidiagonale unité.

On déduit (par substitution) des deux équations matricielles ci-dessus une équation unique :

$$(J S_2 J S_1^{-1} R_1 - R_2) \bar{\mathbf{m}} = \lambda (J S_2 J S_1^{-1} \bar{S}_2 - J \bar{S}_1 J) \mathbf{m} \quad \mathbf{m}^t = (m_0, m_1, \dots, m_{n-1}) \quad (27)$$

Le vecteur \mathbf{m} des paramètres est donc obtenu en résolvant un problème d'éléments propres généralisés qui peut se réduire en fait à un problème d'éléments propres simples. Une fois les coefficients de $m(z)$ calculés, ceux de $p(z)$ s'en déduisent aisément. L'utilisation pratique de l'algorithme est très simple.

4.5 - Utilisation pratique

La méthode requiert un modèle d'état initial des sorties de capteurs, un modèle AR d'ordre maximal (ie : le nombre de cap-

teurs) nous semble être le mieux adapté, car il correspond à l'extension la plus aléatoire des covariances des observations. L'algorithme prend la forme suivante après DFT des sorties de capteurs :

- 1) estimation des covariances des sorties ($n+1$ capteurs) ie : $\hat{r}_0 \dots \hat{r}_n$
- 2) estimation des coefficients du modèle AR correspondant, soit : $(1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, b^2)$
- 3) résoudre le problème d'éléments propres (27) qui se réduit ici à un problème d'éléments propres simples avec :

$$a_1 = \hat{a}_1, \dots, a_{n-1} = \hat{a}_{n-1}, a_n = \hat{a}_n$$

$$c_1 = 0, \dots, c_{n-1} = 0, c_n = 1$$

sélectionner le $(k+1)$ -ième vecteur propre généralisé (pour obtenir une approximation de rang k) et calculer $m_{k+1}(z)$.

- 4) calculer les racines de $m_{k+1}(z)$ et leurs arguments (noter que par définition de $H_{\infty, k}$, $m_{k+1}(z)$ a exactement k racines dans $\mathcal{D}(0, 1)$).

4.6 - Discussion

Le choix du modèle initial revêt une importance non négligeable ; il nous semble peu souhaitable de "débruiter" les données puisque le rajout d'une constante dans la fonction de transfert ne change pas les valeurs de H_f , par ailleurs une modélisation initiale ARMA donne de piètres résultats. La fonction g de H_∞ (se trouvant au numérateur de φ_k) peut modéliser la coloration spatiale du bruit.

Un modèle initial AR d'ordre maximal semble donc être la meilleure solution dans tous les cas (y compris en présence d'une forte coloration spatiale du bruit) ; celui-ci peut être estimé par diverses méthodes, les résultats sont légèrement différents suivant la méthode retenue.

4.7 - Simulation

On désire mettre en évidence les performances en détection de la méthode. Pour cela, on considère une antenne linéaire de 20 capteurs (à $\lambda/2$) et on simule 3 sources dans du bruit blanc de gisements et SNR respectifs (30°, -10 dB), (36°, -20 dB) et (45°, -3 dB) ; le travers de l'antenne correspond à 90°. Pour 10 tests indépendants (BT = 200), la méthode de réalisation "optimale" détecte 8 fois la source faible alors que la méthode du goniomètre ne la détecte pas.

5 - CONCLUSION

Cet article montre l'utilité de modéliser les sorties de capteurs d'une antenne rectiligne par un système linéaire. Nous avons pu constater l'efficacité des méthodes utilisant cette modélisation sur de nombreuses simulations. Les méthodes de réalisation "approchées" (§3) améliorent considérablement les performances des méthodes H.R. usuelles en présence de bruit corrélé (meilleure détection des sources faibles, élimination des sources parasites dues aux bosses de la densité spatiale du bruit), mais l'estimation du sous-espace source s'obtient encore par une analyse en composantes principales. Par contre, la méthode de réalisation "optimale" (§4) estime celui-ci en utilisant sa structure particulière et permet d'améliorer encore les performances en détection tout en conservant la robustesse des méthodes précédentes vis-à-vis de la corrélation du bruit.

REFERENCES

- [1] G. Bienvenu et L. Kopp, VII Col. GRETSI, Nice, 1979, pp106-110.
- [2] P. Ravazzola et J-P Le Cadre, à paraître en 1989 dans la revue Traitement du Signal.
- [3] K.S. Arun, D.V. Bhaskar Rao and S.Y. Kung, Proc. 22nd Conf. Dec. and Contr., 1983, pp 1353-1355.
- [4] U.B. Desai and D. Pal, Proc. 21 th Conf. Dec and Contr., 1982, pp 1105-1112.
- [5] P. Ravazzola et J-P Le Cadre, soumis à la revue International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.
- [6] J-P Le Cadre et P. Ravazzola, Proc. ICASSP, 1989, Glasgow.
- [7] N. Young, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [8] L.M. Silverman and M. Bettayeb, Proc. 1980 Joint Autom. Contr. Conf., paper FA8A.