

## DECONVOLUTION D' UN CANAL A NON-MINIMUM DE PHASE PAR PREDICTION

Odile MACCHI                      Yi GU

Laboratoire des Signaux et Systèmes CNRS- ESE  
Plateau du Moulon 91192 Gif sur Yvette

**RESUME.** Le problème considéré est la restitution de l'entrée inconnue d'un filtre inconnu  $\mathcal{F}$  à l'aide de la sortie du filtre. On montre que le filtre inverse est séparable en la cascade de 3 filtres: un rétroprédicteur, un prédicteur et un gain (CAG). Le prédicteur est choisi récursif en vu de l'assimiler, en transmission de données, à la boucle d'égalisation contenant les décisions passées. Il compense la partie phase minimale de  $\mathcal{F}$ . Le rétroprédicteur est transverse et compense la partie phase maximale. Les deux prédicteurs s'adaptent de manière autodidacte. Pour des canaux de transmission téléphoniques, c' est le rétroprédicteur qui est prépondérant. L'algorithme d'initialisation est très peu complexe et sa vitesse de convergence est satisfaisante.

**SUMMARY.** We treat the problem of restoring an unknown white sequence at the input of an unknown filter  $\mathcal{F}$  on the basis of the sequence at the filter output. It is shown that the inverse filter can be split into three cascaded filters: a backward predictor, a forward predictor and a (scalar) gain. The forward predictor is chosen as recursive in order to play the role of the decision feedback part of an equalizer in the case of data transmission. It corresponds to the minimal phase part of the filter  $\mathcal{F}$ . The backward predictor is transversal and corresponds to the maximal phase part. Both predictors can be controlled in a self- adaptive mode. For telephone transmission channels, the backward predictor is more important. The learning algorithm has very low complexity and satisfactory convergence speed.

**1.Introduction.** On considère le problème de la déconvolution en mode autodidacte d'un système linéaire  $\mathcal{F}$  qui reçoit une suite d'entrée  $a_k$ . Soit  $f_0, \dots, f_N$  la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{F}$ ; et soit  $F(z) = \sum_{i=0}^N f_i z^{-i}$  sa fonction de transfert. La déconvolution consiste à trouver le filtre  $\mathcal{H}$  inverse de  $\mathcal{F}$  sur la base de la seule observation de la suite des signaux

$$x_k = \mathcal{F}(a_k) = \sum_{i=0}^N f_i a_{k-i} \quad (1-1)$$

de sorte que le signal déconvolué  $y_k = \mathcal{H}(x_k)$  soit très proche de  $a_k$ .

Lorsque le canal  $\mathcal{F}$  est à phase non minimale, on sait que ce problème n'a de solution qu'avec un retard  $\delta$ : on cherche à restaurer la donnée  $a_{k-\delta}$  à partir de la suite  $\{\dots, x_{k-i}, \dots, x_k\}$ . On peut alors décomposer (1.1) en deux termes:  $f_\delta a_{k-\delta}$  est la partie utile de l'observation, tandis que le reste  $\sum_{i \neq \delta} f_i a_{k-i}$ , nuisible, est

appelé interférence entre symboles. Celle-ci devra être éliminée (ou réduite) par la déconvolution. La caractéristique autodidacte (ou sans moniteur) signifie que non seulement les  $f_i$  sont inconnus, mais la suite  $a_k$  est inaccessible. Cette suite est supposée blanche, mais non nécessairement indépendante. Un tel problème se pose par exemple dans le domaine sismique; la suite  $f_i$  est alors appelée ondelette, les  $a_k$  décrivent les couches du sous-sol.

Le même problème se pose dans les réseaux de transmission, les "données"  $a_k$  prenant des niveaux discrets connus. Dans le cas des réseaux multipoints il est effectivement impossible, même comme préalable à la transmission, d'avoir accès à la suite  $a_k$ . On parle alors d'égalisation autodidacte. Mais dans ce cas, à l'aide d'une fonction de décision en escalier  $Q$  avec des seuils intermédiaires entre les niveaux, on peut restituer les données par la règle  $\hat{a}_{k-\delta} = Q(y_k)$ . Pourvu que le filtre  $\mathcal{H}$  soit proche de l'optimalité, les niveaux  $a_{k-\delta}$  et  $\hat{a}_{k-\delta}$  sont identiques. C'est sur ce principe que fonctionnent les égaliseurs adaptatifs classiques; les paramètres du filtre  $\mathcal{H}$ , regroupés en un vecteur  $H$ , s'adaptent récursivement selon un algorithme d'égalisation classique

$$H_k = H_{k-1} + f(y_k - \hat{a}_{k-\delta}, \dots); \quad y_k = \mathcal{H}_{k-1}(x_k); \quad (EC)$$

qui fonctionne sous l'hypothèse implicite que  $\hat{a}_k = a_k$ , donc comme si l'algorithme de déconvolution était piloté par un moniteur. Cependant cette méthode n'est applicable que si l'on possède déjà une bonne approximation de  $\mathcal{F}^{-1}$ , c'est à dire quand l'initialisation  $H_0$  de (EC) fournit les données  $a_{k-\delta}$  sans erreur par la fonction  $Q$ . Naturellement ce problème a déjà été considéré. C'est ainsi que dans [1] il est traité en supposant connue la distribution de probabilité des  $a_k$ . Des moments croisés d'ordre 3 entre  $a_k$  et  $x_k$  sont utilisés dans [2] avec l'hypothèse que  $E(a_k^3)$  n'est pas nul. Le moment d'ordre 4 appelé trispectre peut aussi fournir une solution [3]. Le but de ce travail est de présenter une méthode d'initialisation très générale, car elle n'utilise pas la connaissance des  $a_k$  ni même de leur distribution de probabilité. Elle se fonde sur des principes de prédiction et de rétroprédiction permettant de corriger les zéros de  $F(z)$  situés tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du cercle unité (C). Au contraire de [4] elle ne nécessite pas non plus que les  $a_k$  soient discrets.

**2 Canal à minimum (resp. maximum) de phase:** On donne le nom de canal de type "I - pur" (pour intérieur) à un canal à phase minimale pour laquelle  $F(z)$  se factorise en

$$F(z) = f_0 \prod_{i=1}^N (1 - I_i z^{-1}) = f_0 (1 + r_1 z^{-1} + \dots + r_N z^{-N}), \quad (2-1)$$

$$\text{où } |I_i| < 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2-2)$$

Tous les zéros de  $F$  sont donc intérieurs à (C). L'inégalité (2-2) montre que la suite  $|r_i|$  a tendance à décroître de sorte que  $|f_0|$  approche du maximum des  $|f_i|$ . Ainsi la réponse d'un canal I - pur présente un front de descente. Il est bien connu que l'inverse d'un tel canal est un prédicteur  $\mathcal{P}$  (à un coefficient multiplicatif près) qui calcule l'innovation:

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (2-3)$$

entre  $x_k$  et sa prédiction linéaire optimale sur la base des échantillons passés  $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots$ . L'optimalité s'entend ici au sens de la minimisation du critère  $J = E(e_k^2)$ . Dans cet article nous ne

considérons pas le prédicteur transverse classique mais le prédicteur récursif pur, plus original,



$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{\gamma} c_i e_{k-i}, \quad (2-4)$$

car il est bien adapté aux applications d'égalisation. Il est clair que le filtre de prédiction  $e_k = \mathcal{P}(x_k)$  a comme fonction de transfert

$$P(z) = [1 + \sum_{i=1}^{\gamma} c_i z^{-i}]^{-1}. \quad (2-5)$$

En comparant avec (2.1), on voit que pour fabriquer  $\mathcal{H}$  il faut choisir simplement

$$\gamma = N; \quad c_i = r_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2-6)$$

et qu'il faut faire suivre  $\mathcal{P}$  d'une amplification  $\mathcal{G}$  par un facteur fixe

$$g = f_0^{-1}; \quad y_k = g e_k. \quad (2-7)$$

Or la minimisation de  $\mathcal{J}$ , donc la détermination des  $c_i$ , peut se faire en mode autodidacte, par un algorithme classique de prédiction adaptative, par exemple ( $\mu > 0$ )

$$C_k = C_{k-1} + \mu e_k E_{k-1}; \quad e_k = x_k - C_{k-1}^T E_{k-1}, \quad (2-8)$$

où  $C_{k-1}$  regroupe les  $N$  coefficients  $c_1, \dots, c_N$  à l'instant  $k-1$  et où  $E_{k-1} \triangleq (e_{k-1}, \dots, e_{k-N})^T$  correspond aux échantillons du passé utilisés par le prédiction pour fabriquer  $\hat{x}_k$ . La détermination du gain  $g$  peut se faire par CAG pourvu qu'au moins un moment (non nul) des  $a_k$  soit connu. Par exemple

$$G_k = G_{k-1} + \varepsilon (A - y_k^2); \quad g_k = \sqrt{G_k}; \quad (\varepsilon > 0). \quad (2-9)$$

Dans ce cas le problème est donc résolu.

De la même manière un canal à phase maximale dit de type "O - pur" parce que tous les zéros de  $F(z)$  sont extérieurs (outside) à  $C$  selon

$$F(z) = f_N \prod_{j=1}^N (z^{-1} - O_j^{-1}) = f_N (q_0 + \dots + q_{N-1} z^{-N+1} + z^{-N}), \quad (2-10)$$

$$\text{où } |O_j| > 1, \quad (2-11)$$

peut être inversé (à un retard  $\delta$  près) en mode autodidacte. L'inégalité (2.11) montre que la suite  $|q_j|$  a tendance à croître, de sorte que  $|f_N|$  approche du maximum des  $|f_i|$ . Ainsi la réponse d'un canal de type O - pur présente un front de montée. A l'aide de (2.10) il vient aisément

$$F^{-1}(z) z^{-\delta} = f_N^{-1} z^{-\delta+N} \prod_{i=1}^N (1 - O_i^{-1} z^{-1}), \quad (2-12)$$

$$= f_N^{-1} z^{N+L-\delta} (z^{-L} - \sum_{i=1}^N b_i z^{-L+i}). \quad (2-13)$$

Dans (2.13) grâce à la condition (2.11) le produit a été inversé par un développement en série, tronqué au terme  $z^{-L}$ . On peut choisir le retard  $\delta = N+L$  et (2.13) fait apparaître que  $\mathcal{H}$  comporte un rétroprédicteur transverse  $\mathcal{R}$  de fonction de transfert  $z^{-L}$

$\sum_{i=1}^N b_i z^{-L+i}$  qui fabrique sur la base de son futur une prédiction

$$x_{k-L} = \sum_{i=1}^L b_i x_{k-L+i}; \quad p_k = x_{k-L} - x_{k-L} \quad (2-14)$$

de l'échantillon  $x(k-L)$ ;  $\mathcal{R}$  est suivi d'un amplificateur  $\mathcal{G}$  de gain fixe qui délivre

$$y_k = g p_k; \quad g = f_N^{-1}. \quad (2-15)$$

Comme pour le prédicteur, l'innovation  $p_k$  doit être de puissance minimale afin d'être blanche et par le critère  $\mathcal{J}' = E(p_k^2)$ ,  $\mathcal{R}$

peut être obtenu en mode autodidacte, par exemple en calculant le vecteur  $B$  de rétroprédiction selon

$$B_k = B_{k-1} + v p_k X_k; \quad X_k \triangleq (x_{k-L+1}, \dots, x_k)^T \quad (2-16)$$

avec  $v > 0$ . Prédicteurs et rétroprédicteurs utilisés comme déconvolveurs autodidactes sont illustrés sur les figures 1 et 2.

**3. Déconvolution par prédiction et rétroprédiction** Pour un canal  $\mathcal{F}$  à phase ni minimale ni maximale nous partitionons les  $N$  zéros de  $F(z)$  en  $\gamma$  zéros  $\{I_i\}$  intérieurs à  $C$  et  $\beta$  zéros  $\{O_j\}$  extérieurs à  $C$  ( $N = \beta + \gamma$ ) selon la décomposition de  $F(z)$

$$F(z) = f \prod_{j=1}^{\beta} (z^{-1} - O_j^{-1}) \prod_{i=1}^{\gamma} (1 - I_i z^{-1}). \quad (3-1)$$

D'après (2.13), le retard  $\delta$  de restitution dépend du nombre ( $\beta$ ) de zéros extérieurs et vaut  $L + \beta$ . Il en découle immédiatement la structure de l'inverse  $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{R}$  par rétroprédiction, prédiction et CAG, selon la figure 3. Il est à noter que l'ordre de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{P}$  peut être échangé, mais que le rétroprédicteur ne peut être rendu récursif du fait qu'il travaille sur le futur, alors que cela est possible pour le prédicteur qui travaille sur le passé.

On peut montrer [5] que la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{F}$  a un front de montée de durée  $\beta + 1$  suivi d'une descente de durée  $\gamma$ , de sorte que le coefficient dominant est voisin de  $f_\beta$ . Plus les zéros sont proches de  $C$ , plus ils créent d'interférence entre symboles. Ainsi si  $\mathcal{F}$  n'a pas de zéro  $O_j$  proche de  $C$ , il est dit de type I; il est dominé par ses zéros intérieurs et  $\{f_i\}$  ne présente qu'un front de montée négligeable. La partie principale de  $\mathcal{H}$  est alors le prédicteur  $\mathcal{P}$ . De même si les zéros extérieurs sont plus proches de  $C$  que les zéros intérieurs, ils sont responsables d'un front de montée important et le canal est dit de type O. La partie principale de  $\mathcal{H}$  est le rétroprédicteur  $\mathcal{R}$ .

Prenons l'exemple d'un canal de type I avec un seul zéro extérieur très éloigné de  $C$ :  $\beta = 1, O^{-1} = \varepsilon$ . Le prédicteur  $\mathcal{P}$  permet de compenser tous les zéros intérieurs. Comme sa sortie est blanche, la fonction de transfert  $F(z)$  de  $\mathcal{P} \cdot \mathcal{F}$  est de module constant sur  $C$ ; donc

$$F'(z) \propto (z^{-1} - \varepsilon) / (1 - \varepsilon z^{-1}) = -\varepsilon + (1 - \varepsilon^2) [z^{-1} + \varepsilon z^{-2} + \varepsilon^2 z^{-3} + \dots]. \quad (3-2)$$

On voit que front de montée et front de descente sont réduits à  $\varepsilon$  par rapport à l'échantillon dominant  $(1 - \varepsilon^2)$ . Donc l'interférence entre symbole est très réduite grâce au prédicteur.

**4. Degré de corrélation:** Pour classer un canal quelconque selon les types O ou I, il est nécessaire d'introduire une mesure des interférences entre symboles. Nous adoptons le degré de corrélation  $\rho$  entre la sortie  $y_k$  du canal déconvolué et l'entrée  $a_{k-\delta}$  à restituer (le retard  $\delta$  étant convenablement choisi)

$$\rho \triangleq |E(y_k a_{k-\delta})| / [E(y_k^2) E(a_{k-\delta}^2)]^{1/2}. \quad (4-1)$$

Commençons par le rétroprédicteur transverse  $\mathcal{R}$ , décrit par les équations (2.14,15). Notons que  $\rho$  est indépendant du gain  $g$ . Il est clair que  $y_k$  s'écrit sous la forme

$$y_k = A_k^T S_B; \quad A_k \triangleq (a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-L-\beta})^T, \quad (4-2)$$

car il est linéaire en les  $a_k$ . Le vecteur  $S_B$  dépend du canal  $\mathcal{F}$

et du vecteur B de rétroprédiction. Il est donc évident que

$$\rho_B = |s_B^B| / \|S_B\|, \quad \delta = L + \beta, \quad (4-3)$$

avec la norme-2 usuelle. De la sorte  $\rho_B = 1$  équivaut à  $S_B = (0, \dots, 0, \pm 1)^T$  relation qui équivaut elle-même à  $y_k = \pm a_{k-\delta}$ , c'est à dire à l'inversion parfaite du canal (au signe près).

Pour un canal de type O le rétroprédicteur optimal  $B^*$  (qui minimise  $E(p_k^2)$ ) doit donc améliorer (augmenter) nettement le

degré de corrélation  $\rho$ , par rapport au canal originel ( $B=0$ ), pour lequel  $y_k = g x_{k-L}$ . D'où la condition

$$\rho_{B^*} > \rho_0 = |f_B| / (\sum_{i=0}^N |f_i|^2)^{1/2}. \quad (4-5)$$

Ceci est illustré sur la figure 6 pour un canal de Nyquist.

De la même manière, le prédicteur récursif optimal  $\mathcal{P}^*$  (suivi du gain  $g$ ), décrit par les équations (2.3,4,7) avec  $E(e_k^2)$  minimum, doit augmenter le degré de corrélation (4.1) si

le canal est de type I. Ce degré est seulement fonction du vecteur C de prédiction. D'où la condition  $\rho_C > \rho_0$ .

**5.Exemple: transmission de données** Dans le cas des transmission de données,  $a_k$  prend des niveaux discrets,  $\pm 1, \pm 3$  dans ce qui suit. Le déconvolveur de la figure 3 prend alors le nom d'égaliseur récursif linéaire et il est facile de voir qu'il est décrit par l'équation

$$y_k = \sum_{i=0}^L d_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^Y c_j y_{k-j} \quad (5-1)$$

à condition que

$$d_j = g b_{L-j}, \quad j = 0, \dots, L-1; \quad d_L = g. \quad (5-2)$$

Pour restituer les niveaux, on traite la sortie par le détecteur Q comportant les seuils 0,  $\pm 2$ . En présence de bruit on n'a jamais  $y_k = a_{k-\delta}$ , alors que  $\hat{a}_{k-\delta} = a_{k-\delta}$ . Les performances sont donc améliorées en insérant la décision Q dans la boucle récursive de (5.1) qui est remplacé par l'équation non linéaire

$$y_k = \sum_{i=0}^L d_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^Y c_j \hat{a}_{k-\delta-j}. \quad (5-3)$$

On parle alors d'égaliseur " avec décision dans la boucle". Evidemment cette boucle peut à son tour se schématiser comme l'indique la figure 4, en une cascade  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{G}$  (CAG) et  $\mathcal{P}$ . Ce dernier élément est un prédicteur récursif rendu non linéaire par la présence de Q dans la boucle. Il est clair qu'en restant dans un cadre linéaire l'ordre de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{P}$  peut être échangé. En revanche on ne peut placer  $\mathcal{P}$  avant  $\mathcal{R}$  car il n'y a aucun sens à introduire la décision  $\hat{a} = Q(y)$  avant le bout de la chaîne de déconvolution. C'est pour la même raison que nous avons utilisé un prédicteur récursif et non transverse, ce dernier ne permettant pas d'insérer la décision Q, donc de diminuer le bruit. Soit  $H = [d_0, \dots, d_L, -c_1, \dots, -c_Y]^T$  le vecteur des paramètres de cet égaliseur. Comme il a été dit en introduction, lorsque l'initialisation  $H_0$  de H est correcte, l'algorithme classique d'égalisation (EC), basé sur le résidu  $y_k - \hat{a}_{k-\delta}$ , conduit sans difficulté [5] à l'inversion parfaite du canal  $\mathcal{F}$ . Dans la suite cette méthode est appliquée après s itérations d'initialisation.

Nous donnons maintenant une méthode d'initialisation de H qui découle du fait que le canal  $\mathcal{F}$  est de type O. Pour cette raison les coefficients C de  $\mathcal{P}$  sont maintenus à zéro au départ, tandis que les coefficients B de  $\mathcal{R}$  évoluent selon (2.14), (2.16) et que le CAG évolue selon (2.9) La classification de  $\mathcal{F}$

selon le type O est justifiée par la figure 5 qui montre que les zéros extérieurs sont dominants.

**Conditions des simulations** Un canal de Nyquist a sa fonction de transfert en cosinus surélevé avec symétrie autour du point de Nyquist. Le roll-off qui détermine l'excès de bande est pris ici égal à 1/6, ce qui correspond au cas pratique des transmissions téléphoniques à 9600 bit/s. Le degré de corrélation  $\rho_0$  du canal originel dépend de la phase d'échantillonnage  $\varphi$ . Il décroît de 1 à 0.66 lorsque  $\varphi$  augmente de 0 à  $\pi$ . Les canaux de la figure 5 correspondent à  $\varphi = \pi/2$  et à  $0.98\pi$ , le deuxième étant très sévère. ( zero extérieur très proche de (C)) Le canal  $\mathcal{F}$  possède  $N+1=21$  coefficients, dominés par le coefficient  $f_{11}$ . Ceci confirme le fait, visible en figure 5, qu'il y a toujours 10 zéros extérieurs à (C) et 10 zéros intérieurs à (C), soit  $\beta = \gamma = 10$ . La longueur du rétroprédicteur est  $L=10, L=20, L=30$  suivant le cas. La figure 6 représente le degré de corrélation originel  $\rho_0$  aussi que le degré  $\rho_{B^*}$  du rétroprédicteur calculés analytiquement, en fonction du déphasage  $\varphi$ . Jusqu'à  $\varphi = 2\pi/3$ ,  $L=10$  est suffisant. De  $2\pi/3$  à  $0.8\pi$  il faut  $L=20$ . Au delà il faut un rétroprédicteur de longueur 30. Avec ces valeurs, l'amélioration de  $\rho$  est considérable. Elle suffit pour l'initialisation autodidacte de l'égaliseur, comme le montrent les simulations de la figure 7, où la courbe 1 représente le résidu  $E((y_k - a_{k-\delta})^2)$  (moyenné sur 50 itérations) en fonction du temps, pour une phase  $\varphi = 0.7\pi$  et pour  $L=20$ . On passe en égalisation classique après 2000 itérations. Au contraire la courbe 2 montre que si dans la phase autodidacte la rétroprédiction est supprimée (tout en conservant le CAG) l'égalisation classique échoue, comme nous pouvions le prévoir par les arguments des paragraphes précédents.

La figure 8 illustre la suppression du front de montée de  $\mathcal{F}$  par rétroprédiction, comme il a été expliqué en (3.2) avec un déphasage  $\varphi = 0.8\pi$  et  $L=20$ . Le front de descente n'est pratiquement pas changé par le rétroprédicteur. C'est le prédicteur, placé en aval, qui se chargera de le supprimer dans la phase ultérieure d'égalisation classique.

La méthode que nous venons de présenter est très générale. Elle s'applique à une entrée discrète ou analogique et nécessite de savoir très peu de choses a priori: le canal est-il de type O ou I ? La complexité de calcul est très faible et la vitesse de convergence satisfaisante.

REFERENCES

- [1] A. BENVENISTE, M. GOURSART, G. RUGET, *IEEE Trans.A.C.* Vol.25, pp. 385-398, June 1980.
- [2] K.S. LII, M. ROSENBLAT, *Ann.Statist.vol.10*, pp.1195-1208, 1982.
- [3] C.L. NIKIAS, Proc. 3rd ASSP workshop, Boston, Nov. 1986, pp 17-20.
- [4] O. MACCHI et E.EWEDA, *IEEE.Trans.* IT, Mars 1984, vol.30, n°. 2, pp. 161-176.
- [5] Y. GU. thèse UPS, Mars 1989.

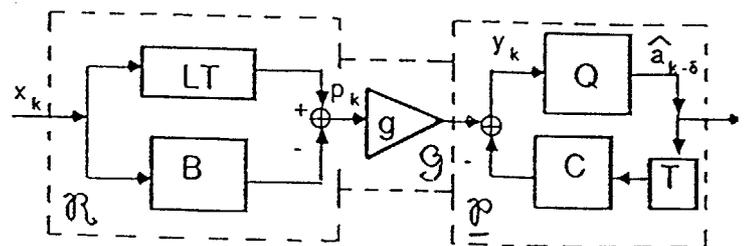


fig. 4. Egalisation avec décision dans la boucle par rétroprédiction et prédiction non linéaire

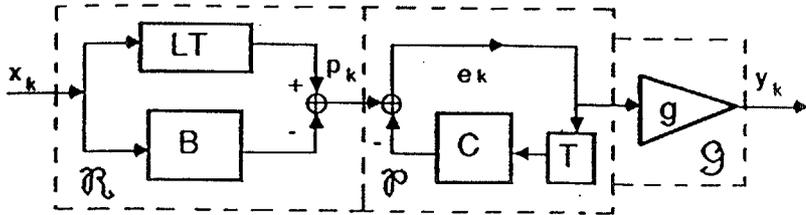


fig. 3. Déconvolution  $\mathfrak{H}$  par rétroprédiction et prédiction (canal quelconque)

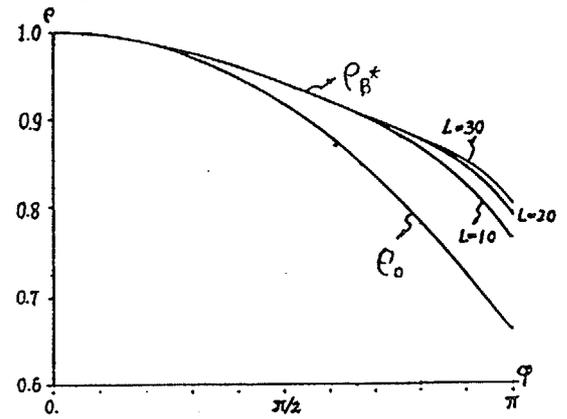


fig. 6. Degré de corrélation sans filtrage et avec rétroprédiction

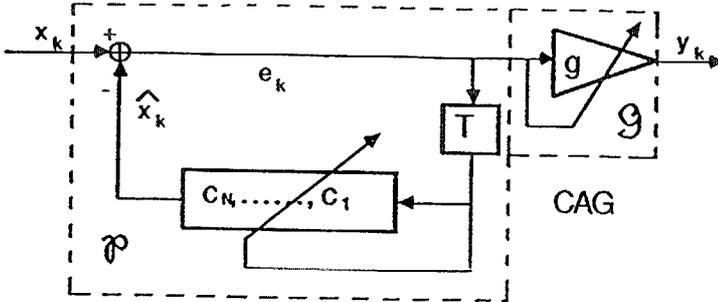


fig. 1. Déconvolution aveugle  $\mathfrak{H}$  par prédiction (canal "I-pur")

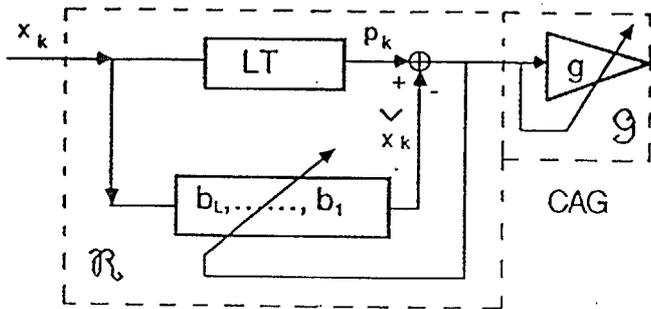


fig. 2. Déconvolution aveugle  $\mathfrak{H}$  par rétroprédiction (canal "O-pur")

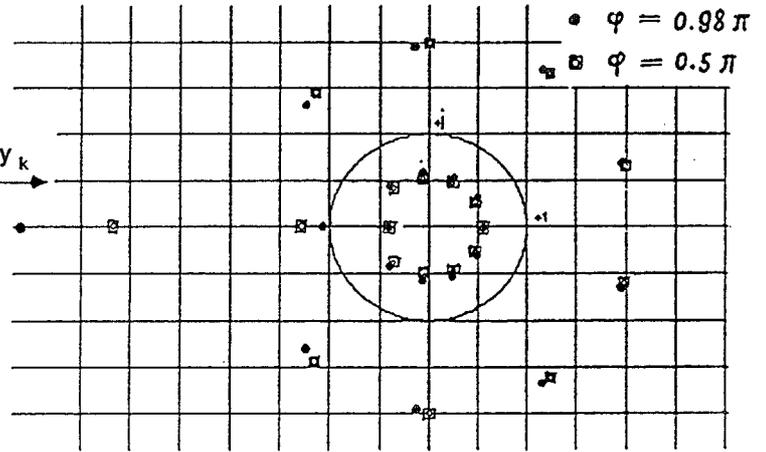


fig. 5. Zéros de  $F(z)$  pour le canal de Nyquist déphasé

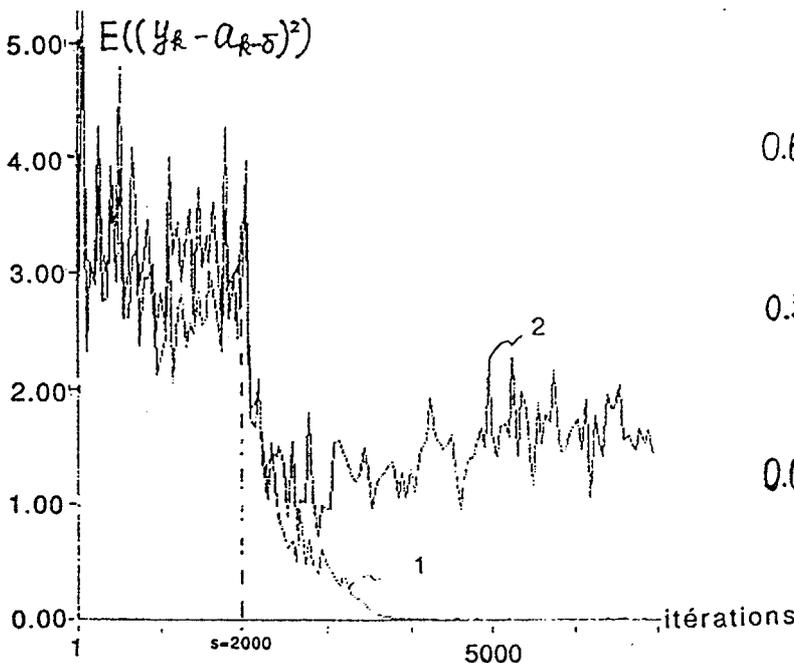


fig. 7. Egalisation autodidacte d'un canal de transmission par rétroprédiction ( $\varphi = 0.7\pi$ ,  $L=20$ )

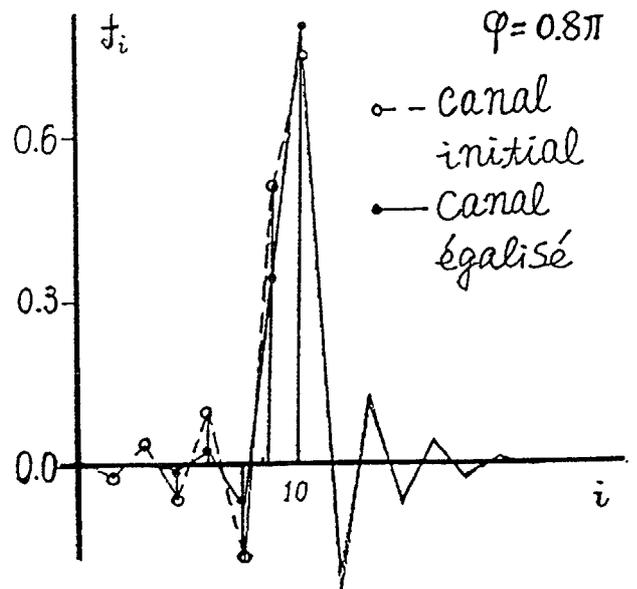


fig. 8. Réduction du front de montée par rétroprédiction